Máquinas eléctricas

Quinta edición

Stephen J. Chapman



MÁQUINAS ELÉCTRICAS

MÁQUINAS ELÉCTRICAS

QUINTA EDICIÓN

Stephen J. Chapman

BAE Systems Australia

Revisión técnica

Carlos Rodríguez Pérez
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey,
Campus Estado de México

Alfredo Santana Díaz
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey,
Campus Toluca



MÉXICO • BOGOTÁ • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA • MADRID • SAO PAULO
NUEVA YORK • SAN JUAN • SANTIAGO • AUCKLAND • LONDRES • MILÁN
MONTREAL • NUEVA DELHI • SAN FRANCISCO • SINGAPUR • ST. LOUIS • SIDNEY • TORONTO

Director General México: Miguel Ángel Toledo Castellanos
Editor sponsor: Pablo E. Roig Vázquez
Coordinadora editorial: Marcela I. Rocha Martínez
Editora de desarrollo: Ana Laura Delgado Rodríguez
Supervisor de producción: Zeferino García García
Traducción: Sergio Sarmiento Ortega

MÁQUINAS ELÉCTRICAS
Quinta edición



Prolongación Paseo de la Reforma 1015, Torre A,
Piso 17, Colonia Desarrollo Santa Fe,
Delegación Álvaro Obregón,
C.P. 01376, México, D.F.
Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana, Reg. Núm. 736

ISBN: 978-607-15-0724-2
(ISBN edición anterior: 978-970-10-4947-1)

Traducido de la quinta edición en inglés de *Electric Machinery Fundamentals*, © 2012 by The McGraw-Hill Companies, Inc.
New York, N.Y. All rights reserved. ISBN: 978-0-07-352954-7

1234567890 1098765432

Impreso en México *Printed in Mexico*

Para mi hija Sarah Rivkah Chapman,
quien probablemente usará este libro
en sus estudios en la Swinburne
University, Melbourne.

Acerca del autor

Stephen J. Chapman egresó como ingeniero electricista en 1975 de la Universidad del Estado de Louisiana, obtuvo una maestría en ingeniería eléctrica en la Universidad Central de Florida en 1979 y realizó otros estudios de posgrado en la Universidad de Rice.

De 1975 a 1980 fue oficial de la Armada de Estados Unidos y asignado a la enseñanza de la ingeniería eléctrica en la US Naval Nuclear Power School en Orlando, Florida. De 1980 a 1982 estuvo adscrito a la Universidad de Houston, donde dirigió el programa de sistemas de potencia en el College of Technology.

De 1982 a 1988 y de 1991 a 1995 fue miembro del cuerpo técnico del Laboratorio Lincoln del Instituto Tecnológico de Massachusetts en Lexington, Massachusetts, y en las instalaciones de Kwajalein Atoll, en la República de las Islas Marshall. Mientras estuvo ahí, realizó investigación sobre sistemas de procesamiento de señales de radar. Durante los últimos años dirigió cuatro grandes sistemas de procesamiento de señales de radar (TRADEX, ALTAIR, ALCOR y MMW) en Kwajalein.

De 1988 a 1991 fue ingeniero investigador en la Shell Development Company en Houston, Texas, donde realizó investigación en el procesamiento de señales sísmicas. También estuvo en la Universidad de Houston, donde siguió dando clases.

Actualmente es gerente de modelación de sistemas y de análisis operacional en BAE SYSTEMS Australia, en Melbourne.

Es miembro senior del Instituto de Ingenieros Eléctricos y Electrónicos (y de varias de las sociedades que lo componen), así como de Engineers Australia.

Contenido breve

Contenido

Prefacio

Desde que se publicó la primera edición de *Máquinas eléctricas* hubo un rápido avance en el desarrollo de controladores de estado sólido para motores, los cuales tienen una capacidad mayor y son más complejos. La primera edición de este libro establecía que los motores de corriente directa eran el método más indicado para aplicaciones con demanda de velocidad variable. Hoy en día esta aseveración ya no es tan cierta. Ahora, en aplicaciones que requieren control de velocidad, se seleccionan motores de inducción de corriente alterna con control de estado sólido. Los motores de corriente directa han quedado muy relegados a aplicaciones especiales en las cuales se dispone de una fuente de alimentación apropiada, como en los sistemas eléctricos automotores.

La tercera edición se reestructuró ampliamente para reflejar estos cambios. En los capítulos 3 a 6 se estudian los motores y generadores de corriente alterna, antes de abordar lo relacionado con las máquinas de corriente directa. Además, se ha reducido el espacio dedicado a las máquinas de corriente directa, en comparación con las ediciones anteriores. Esta edición continúa con esta misma estructura básica.

Además, el antiguo capítulo 3 sobre electrónica de potencia se ha eliminado de esta quinta edición. La retroalimentación con los usuarios indicó que ese material era demasiado detallado para un rápido vistazo y lo suficientemente detallado para un curso de electrónica de estado sólido. Debido a que muy pocos profesores utilizaban ese material, se eliminó de esta edición y se añadió como suplemento en el sitio web del libro. Cualquier profesor o estudiante que desee continuar usando el material de ese capítulo puede descargarlo libremente.

A fin de de mejorar el aprendizaje del estudiante, al inicio de cada capítulo se han añadido objetivos de aprendizaje.

El capítulo 1 introduce los conceptos básicos de las máquinas y concluye con su aplicación a la máquina lineal de corriente directa, el ejemplo más sencillo posible de una máquina. El capítulo 2 abarca el estudio de los transformadores, los cuales no son máquinas rotatorias, pero comparten muchas técnicas de análisis similares.

Después del capítulo 2 el profesor puede escoger entre enseñar primero lo relacionado con las máquinas de corriente directa o con las de corriente alterna. Los capítulos 3 a 6 se dedican a las máquinas de corriente alterna, y los capítulos 7 y 8 a las máquinas de corriente directa. Estas secuencias de capítulos son independientes entre sí, de modo que el profesor puede cubrir el material en el orden que mejor satisfaga a sus necesidades. Por ejemplo, un curso semestral centrado en las máquinas de corriente alterna podría planearse con partes de los primeros seis capítulos, y el tiempo restante dedicarse a las máquinas de corriente directa. Un curso semestral concentrado en las máquinas de corriente directa podría programarse con partes de los capítulos 1, 2, 7 y 8 y el tiempo restante dedicarse a las máquinas de corriente alterna. En el capítulo 9 se estudian los motores monofásicos y los motores especiales, como los universales, los de paso, los de corriente directa sin escobillas, los de polo sombreado, etcétera.

Se revisaron y corrigieron los ejercicios de tarea y las secciones de final de capítulo y se modificaron o añadieron más de 70% con respecto a la edición anterior.

En los últimos años han ocurrido cambios significativos en los métodos que se utilizan para la enseñanza de la maquinaria en la ingeniería y tecnología eléctricas. En las universidades, los programas de ingeniería disponen de excelentes herramientas de análisis, como MATLAB®, que simplifica los cálculos más complejos y permite que los estudiantes realicen una exploración de manera interactiva del comportamiento de las variables en los problemas. Esta edición de *Máquinas eléctricas* selecciona la aplicación de MATLAB para mejorar la experiencia de aprendizaje del estudiante. Por

---

MATLAB es marca registrada de The MathWorks, Inc.
The MathWorks, Inc., 3 Apple Hill Drive, Natick, MA 01760-2098 USA
E-mail: info@mathworks.com; www.mathworks.com

ejemplo, en el capítulo 6 se utiliza para calcular las características par-velocidad de los motores de inducción y para explorar las propiedades de los motores de inducción de doble jaula de ardilla.

Este texto no cubre la enseñanza de MATLAB, pues se supone que el estudiante está familiarizado, como resultado de sus estudios previos. Además, el texto *no* requiere que el estudiante conozca MATLAB. Este programa mejora la experiencia de aprendizaje si se dispone de éste; si no, pueden descartarse los ejemplos de MATLAB y utilizar los demás.

Este libro no se habría logrado sin la ayuda de docenas de personas durante los últimos 25 años. Es gratificante para mí observar que el libro es aún popular después de todo ese tiempo y mucho de eso se debe a la excelente retroalimentación de los revisores. Para esta edición le doy las gracias especialmente a:

Ashoka K. S. Bhat
University of Victoria

William Butuk
Lakehead University

Shaahin Filizadeh
University of Manitoba

Rajesh Kavasseri
North Dakota State University

Ali Keyhani
The Ohio State University

Andrew Knight
University of Alberta

Xiaomin Kou
University of Wisconsin-Platteville

Ahmad Nafisi
California Polytechnic State University
San Luis Obispo

Subhasis Nandi
University of Victoria

Jesús Fraile-Ardanuy
Universidad Politécnica de Madrid

Riadh Habash
University of Ottawa

Floyd Henderson
Michigan Technological University

M. Hashem Nehrir
Montana State University-Bozeman

Ali Shaban
California Polytechnic State University,
San Luis Obispo

Kuang Sheng
Rutgers University

Barna Szabados
McMaster University

Tristan J. Tayag
Texas Christian University

Rajiv K. Varma
The University of Western Ontario

Stephen J. Chapman
Melbourne, Victoria, Australia

CAPÍTULO 1

Introducción a los principios de las máquinas

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

- Aprender las bases de la mecánica rotacional: velocidad angular, aceleración angular, par y la ley de Newton de la rotación.
- Aprender cómo producir un campo magnético.
- Comprender los circuitos magnéticos.
- Entender el comportamiento de los materiales ferromagnéticos.
- Comprender la histéresis en los materiales ferromagnéticos.
- Entender la ley de Faraday.
- Comprender cómo se produce una fuerza inducida en un alambre.
- Entender cómo se produce un voltaje inducido a través de un cable.
- Comprender la operación de una máquina lineal simple.
- Poder trabajar con potencias reales, reactivas y aparentes.

1.1 LAS MÁQUINAS ELÉCTRICAS, LOS TRANSFORMADORES Y LA VIDA DIARIA

Una **máquina eléctrica** es un dispositivo que puede convertir energía mecánica en energía eléctrica o energía eléctrica en energía mecánica. Cuando este dispositivo se utiliza para convertir energía mecánica en energía eléctrica se denomina *generador*, y cuando convierte energía eléctrica en energía mecánica se llama *motor*. Puesto que puede convertir energía eléctrica en mecánica o viceversa, una máquina eléctrica se puede utilizar como generador o como motor. Casi todos los motores y generadores útiles convierten la energía de una a otra forma a través de la acción de campos magnéticos. En este libro sólo se consideran las máquinas que utilizan campos magnéticos para tales conversiones.

El *transformador* es un dispositivo eléctrico estrechamente relacionado con las máquinas eléctricas. Convierte energía eléctrica ca a un nivel de voltaje a energía eléctrica ca a otro nivel de voltaje. Como los transformadores operan sobre los mismos principios que los generadores y los motores, es decir, utilizan la acción de un campo magnético para realizar el cambio de nivel de voltaje, por lo general se estudian junto con éstos.

Estos tres tipos de dispositivos eléctricos se encuentran en todos los ámbitos de la vida cotidiana moderna. En el hogar, los motores eléctricos hacen funcionar a los refrigeradores, congeladores, aspiradoras, batidoras, equipos de aire acondicionado, ventiladores y muchos otros aparatos similares. En los talleres los motores suministran la fuerza motriz para casi todas las herramientas. En consecuencia, los generadores son necesarios para suministrar la energía que utilizan todos estos motores.

¿Por qué son tan comunes los motores y los generadores eléctricos? La respuesta es muy simple: la electricidad es una fuente de energía limpia y eficiente, fácil de controlar y transmitir a grandes distancias. Un motor eléctrico no requiere de ventilación ni combustibles constantes, a diferencia de los motores de combustión interna; por esta razón es adecuado en ambientes donde no se desea tener residuos contaminantes. Además, la energía calorífica y la mecánica se pueden convertir en energía eléctrica en sitios lejanos y transmitirla a grandes distancias hasta cualquier hogar, oficina o fábrica donde se requiera. Los transformadores ayudan a este proceso por medio de la reducción de las pérdidas de energía en el sitio donde se genera la energía eléctrica y en el sitio donde se utiliza.

1.2 NOTA REFERENTE A LAS UNIDADES Y NOTACIÓN

El estudio y diseño de las máquinas eléctricas y sistemas de potencia es una de las áreas más antiguas de la ingeniería eléctrica. Su estudio principia a finales del siglo XIX. En ese entonces se comienzan a estandarizar internacionalmente las unidades eléctricas y llegan a ser utilizadas por los ingenieros en todo el mundo. Los volts, amperes, ohms, watts y otras unidades similares del sistema métrico de unidades se emplean desde hace mucho tiempo para describir las cantidades eléctricas de las máquinas.

En los países de habla inglesa se miden desde hace mucho tiempo las cantidades mecánicas con el sistema inglés de unidades (pulgadas, pies, libras, etc.). En el estudio de las máquinas se continuó con esta práctica. Por esta razón, durante muchos años las cantidades eléctricas y mecánicas se han medido con diferentes sistemas de unidades.

En 1954 se adoptó como norma internacional un sistema de unidades basado en el sistema métrico que se conoce como *Sistema Internacional* (SI) y se ha acogido en la mayor parte del mundo. Estados Unidos es prácticamente el único país que mantiene el sistema inglés, ya que incluso Gran Bretaña y Canadá adoptaron el SI.

Inevitablemente, con el paso del tiempo, las unidades del SI se convertirán en la norma también en Estados Unidos. Incluso las sociedades profesionales como el Instituto de Ingenieros Eléctricos y Electrónicos (IEEE, por sus siglas en inglés) tienen como norma utilizar el sistema métrico para todos sus trabajos. Sin embargo, muchas personas crecieron utilizando el sistema inglés de unidades, y éste seguirá en uso por un buen tiempo. En la actualidad, los estudiantes de ingeniería y los ingenieros practicantes en Estados Unidos deben estar familiarizados con ambos tipos de unidades, ya que se encontrarán con ambas en sus vidas profesionales. Por lo tanto, este libro incluye problemas y ejemplos que utilizan ambos tipos de unidades, tanto el SI como el sistema inglés. En los ejemplos se hace hincapié en las unidades del SI, pero no se descartan por completo los sistemas más viejos.

Notación

En este libro se resaltan con negritas los vectores, los fasores eléctricos y otros valores complejos (por ejemplo, **F**), mientras que los valores escalares se registran en itálicas (por ejemplo, *R*). Además, se utiliza un tipo de letra especial para representar las cantidades magnéticas tales como la fuerza magnetomotriz (por ejemplo, $\mathcal{F}$).

1.3 MOVIMIENTO ROTATORIO, LEY DE NEWTON Y RELACIONES DE POTENCIA

Casi todas las máquinas eléctricas rotan sobre un eje llamado *flecha*. Debido a la naturaleza rotatoria de la máquina es importante tener un conocimiento básico del movimiento rotatorio. Esta sección contiene un breve repaso de los conceptos de distancia, velocidad, aceleración, ley de Newton y potencia, los cuales son aplicados a las máquinas rotatorias. Para un análisis más detallado de los conceptos de dinámica rotatoria, véanse las referencias 2, 4 y 5.

En general, se requiere un vector tridimensional para describir la rotación de un objeto en el espacio. Sin embargo, dado que las máquinas giran sobre un eje fijo, su rotación queda restringida a una dimensión angular. Con relación a un extremo del eje de la máquina, la dirección de rotación puede ser descrita ya sea en el *sentido de las manecillas del reloj* (SMR) o en *sentido contrario al de las manecillas del reloj* (SCMR). Para los propósitos de este volumen, un ángulo de rotación en sentido contrario al de las manecillas del reloj será positivo y en el sentido de las manecillas del reloj será negativo. En cuanto a la rotación sobre un eje fijo, todos los conceptos de esta sección se reducen a magnitudes escalares.

En seguida se definen los conceptos importantes del movimiento rotatorio y se establece la relación que tienen con los conceptos correspondientes del movimiento rectilíneo.

Posición angular (θ)

La posición angular θ de un objeto es el ángulo en que se sitúa, medido desde algún punto de referencia arbitrario. Por lo general, la posición angular se mide en radianes o grados, lo cual es equivalente al concepto de distancia en el movimiento rectilíneo.

Velocidad angular (ω)

La velocidad angular (o rapidez) es la tasa de cambio en la posición angular con respecto al tiempo. Se supone que es positiva si la rotación es en sentido contrario al de las manecillas del reloj. En el movimiento giratorio, la velocidad angular es el concepto análogo al concepto de velocidad lineal. La velocidad lineal unidimensional se define como la tasa o razón de cambio en el desplazamiento sobre la línea (r) con respecto al tiempo.

$$v = \frac{dr}{dt} \tag{1-1}$$

De manera similar, la velocidad angular ω se define como la tasa o razón de cambio del desplazamiento angular θ con respecto al tiempo.

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \tag{1-2}$$

Si las unidades de la posición angular están en radianes, la velocidad angular se mide en radianes por segundo.

Cuando se trata de máquinas eléctricas normales, los ingenieros utilizan con frecuencia unidades diferentes a los radianes por segundo para describir la velocidad del eje. Frecuentemente, la velocidad angular se expresa en revoluciones por segundo o revoluciones por minuto. Puesto que la velocidad angular es un concepto importante en el estudio de las máquinas, se acostumbra utilizar diferentes símbolos para representar la velocidad cuando se expresa en unidades distintas, lo cual permite minimizar cualquier posible confusión en cuanto a las unidades. En este libro se utilizan los siguientes símbolos para describir la velocidad angular:

ω_m velocidad angular expresada en radianes por segundo
f_m velocidad angular expresada en revoluciones por segundo
n_m velocidad angular expresada en revoluciones por minuto

En estos símbolos el subíndice m indica una cantidad mecánica en contraposición a una cantidad eléctrica. Si no existe posibilidad alguna de confusión entre las cantidades mecánica y eléctrica, se omite el subíndice.

Estas medidas de velocidad del eje se relacionan entre sí mediante las siguientes ecuaciones:

$$n_m = 60 f_m \tag{1-3a}$$

$$f_m = \frac{\omega_m}{2\pi} \tag{1-3b}$$

Aceleración angular (α)

La aceleración angular es la tasa de cambio de la velocidad angular con respecto al tiempo. Es positiva si la velocidad angular se incrementa en sentido algebraico. La aceleración angular es el análogo rotacional del concepto de aceleración en el movimiento rectilíneo. Así como la aceleración lineal unidimensional se define con la ecuación

$$a = \frac{dv}{dt} \tag{1-4}$$

la aceleración angular se define mediante la ecuación

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \tag{1-5}$$

Si las unidades de la velocidad angular están en radianes por segundo, la aceleración angular se mide en radianes por segundo al cuadrado.

Par (τ)

En el movimiento rectilíneo una *fuerza* aplicada sobre un objeto ocasiona un cambio de velocidad de éste. Si no se ejerce una fuerza neta sobre el objeto, su velocidad permanece constante. Cuanto mayor sea la fuerza aplicada al objeto, más rápidamente cambiará su velocidad.

En el movimiento rotatorio existe un concepto similar. Cuando un objeto rota, su velocidad angular permanece constante a menos que se ejerza un *par* sobre él. Cuanto mayor sea el par aplicado al objeto, más rápidamente cambiará su velocidad angular.

¿Qué es par? Se le puede llamar, aunque no con mucha exactitud, la “fuerza de torsión” aplicada a un objeto. Este concepto es fácil de entender. Imagine un cilindro que rota libremente alrededor de su eje. Si se le aplica una fuerza al cilindro, de manera que la línea de acción pase por el eje del mismo (figura l-l*a*), el cilindro no rotará. Sin embargo, si se aplica la misma fuerza de modo que su línea de acción pase a la derecha del eje del cilindro (figura l-l*b*), éste tenderá a rotar en dirección contraria a la de las manecillas del reloj. El par o acción de torsión sobre el cilindro depende de: 1) la magnitud de la fuerza aplicada y 2) de la distancia entre el eje de rotación y la línea de acción de la fuerza.

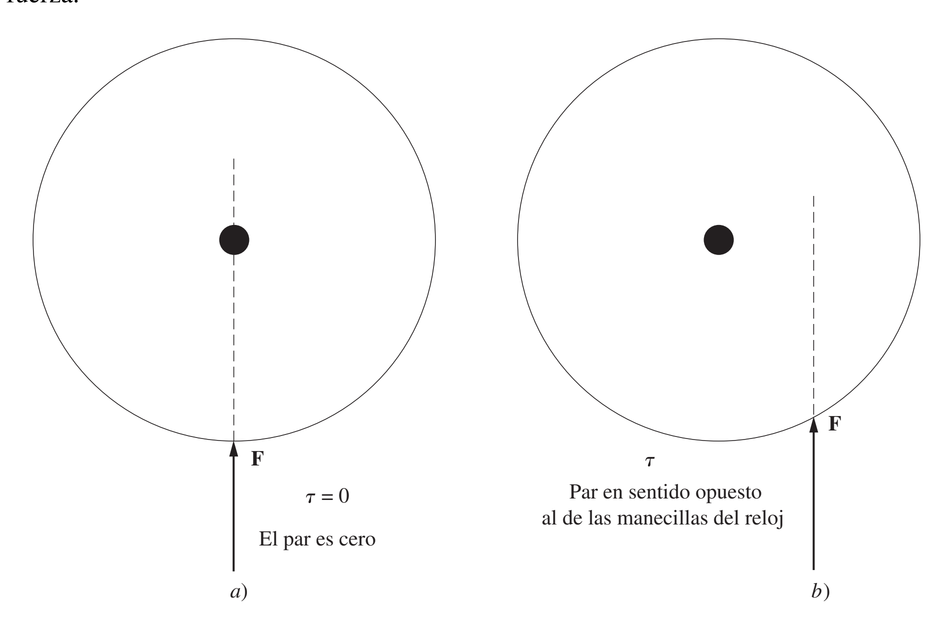


FIGURA 1-1 *a*) Fuerza aplicada a un cilindro de modo que pase por su eje de rotación $\tau = 0$. *b*) Fuerza aplicada a un cilindro de manera que su línea de acción no pase por el eje de rotación. Aquí τ va en sentido opuesto al de las manecillas del reloj.

El par sobre un objeto se define como el producto de la fuerza aplicada al objeto y la distancia más corta entre la línea de acción de la fuerza y el eje de rotación del objeto. Si **r** es un vector que apunta desde el eje de rotación hasta el punto de aplicación de la fuerza y si **F** es la fuerza aplicada, el par puede describirse como

$$\begin{aligned} \tau &= \text{(fuerza aplicada)(distancia perpendicular)} \\ &= (F)\,(r \operatorname{sen} \theta) \\ &= rF \operatorname{sen} \theta \end{aligned} \tag{1-6}$$

donde θ es el ángulo entre el vector **r** y el vector **F**. La dirección del par será en el sentido de las manecillas del reloj si tiende a causar la rotación en el sentido de las manecillas del reloj y en sentido contrario al de las manecillas del reloj si tiende a causar la rotación en este sentido (figura 1-2).

Las unidades del par son newton-metro en las unidades del SI y libra-pie para el sistema inglés.

FIGURA 1-2 Deducción de la ecuación del par en un objeto.

Ley de rotación de Newton

La ley de Newton, en cuanto a objetos que se mueven en línea recta, describe la relación entre la fuerza aplicada a un objeto y su aceleración resultante. Esta relación está dada por la ecuación

$$F = ma \tag{1-7}$$

donde

F = fuerza neta aplicada al objeto
m = masa del objeto
a = aceleración resultante

En unidades SI, la fuerza se mide en newtons, la masa en kilogramos y la aceleración en metros por segundo al cuadrado. En el sistema inglés, la fuerza se mide en libras, la masa en slugs, y la aceleración en pies por segundo al cuadrado.

Una ecuación semejante describe la relación entre el par aplicado a un objeto y su aceleración angular resultante. Esta relación, llamada *ley de rotación de Newton*, está dada por la ecuación

$$\tau = J\alpha \tag{1-8}$$

donde τ es el par neto aplicado, expresado en newton-metro o libra-pie, y α es la aceleración angular resultante expresada en radianes por segundo al cuadrado. El término J cumple con el mismo propósito que el de masa de un objeto en el movimiento lineal, al cual se le llama *momento de inercia* del objeto y se mide en kilogramos-metro cuadrado o slug-pie cuadrado. El cálculo del momento de inercia de un objeto no se incluye en los propósitos de este libro. Puede verse información al respecto en la referencia bibliográfica al final del capítulo 2.

Trabajo (*W*)

En el movimiento rectilíneo el trabajo se define como la aplicación de una *fuerza* a lo largo de una *distancia*, que se expresa mediante la ecuación

$$W = \int F\,dr \tag{1-9}$$

donde se supone que la fuerza es colineal con la dirección del movimiento. Para el caso especial de una fuerza constante aplicada en forma colineal con la dirección del movimiento, esta ecuación se transforma en

$$W = Fr \tag{1-10}$$

En el SI, la unidad de medida del trabajo es el joule, y en el sistema inglés el pie-libra.

En el movimiento rotatorio, trabajo es la aplicación de un *par* a lo largo de un *ángulo*. En este caso la ecuación es

$$W = \int \tau\,d\theta \tag{1-11}$$

y si el par es constante

$$W = \tau\theta \tag{1-12}$$

Potencia (P)

La potencia es la tasa a la cual se realiza trabajo o el incremento de trabajo por unidad de tiempo. La ecuación de potencia es

$$P = \frac{dW}{dt} \tag{1-13}$$

Generalmente se mide en joules por segundo (watts), pero también se puede medir en pie-libra por segundo o en caballos de fuerza (hp).

Si se aplica esta definición y se supone que la fuerza es constante y colineal con la dirección del movimiento, la potencia está dada por

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}(Fr) = F\left(\frac{dr}{dt}\right) = Fv \tag{1-14}$$

Asimismo, si el par es constante, en el movimiento rotatorio la potencia está dada por

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}(\tau\theta) = \tau\left(\frac{d\theta}{dt}\right) = \tau\omega$$

$$P = \tau\omega \tag{1-15}$$

La ecuación (1-15) es muy importante en el estudio de las máquinas eléctricas, porque describe la potencia mecánica aplicada al eje de un motor o de un generador.

La ecuación (1-15) indica la relación correcta entre la potencia, el par y la velocidad si la potencia se mide en watts, el par en newton-metro y la velocidad en radianes por segundo. Si se utilizan otras unidades para medir cualquiera de las cantidades indicadas, se debe introducir una constante en la ecuación como factor de conversión. Aún es común en Estados Unidos medir el par en libra-pie, la velocidad en revoluciones por minuto y la potencia en watts (W) o caballos de fuerza (hp). Si se emplean los factores de conversión adecuados en cada término, la ecuación (1-15) se convierte en

$$P\ (\text{watts}) = \frac{\tau\ (\text{lb-pie})\, n\ (\text{r/min})}{7.04} \tag{1-16}$$

$$P\ (\text{caballos de fuerza}) = \frac{\tau\ (\text{lb-pie})\, n\ (\text{r/min})}{5\,252} \tag{1-17}$$

donde el par se mide en libra-pie y la velocidad en revoluciones por minuto.

1.4 EL CAMPO MAGNÉTICO

Como se indicó, los campos magnéticos son el mecanismo fundamental para convertir la energía de una forma a otra en motores, generadores y transformadores. Existen cuatro principios básicos que describen cómo se utilizan los campos magnéticos en estos aparatos:

1. Un conductor que porta corriente produce un campo magnético a su alrededor.
2. Un campo magnético variable en el tiempo induce un voltaje en una bobina de alambre si pasa a través de ella (este principio es la base del *funcionamiento del transformador*).
3. Un conductor que porta corriente en presencia de un campo magnético experimenta una fuerza inducida sobre él (ésta es la base del *funcionamiento del motor*).
4. Un conductor eléctrico que se mueva en presencia de un campo magnético tendrá un voltaje inducido en él (ésta es la base del *funcionamiento del generador*).

La presente sección describe y trata sobre la producción de un campo magnético por medio de un conductor que porta corriente, mientras que las siguientes secciones de este capítulo explican los otros tres principios.

Producción de un campo magnético

La ley básica que gobierna la producción de un campo magnético por medio de una corriente es la ley de Ampere:

$$\oint \mathbf{H} \cdot dl = I_{\text{neta}} \tag{1-18}$$

donde **H** es la intensidad del campo magnético producida por la corriente I_{neta}, y dl es el elemento diferencial a lo largo de la trayectoria de integración. En unidades del SI, I se mide en amperes y H en amperes-vuelta por metro. Para entender mejor el significado de esta ecuación, es de gran ayuda aplicarla al sencillo ejemplo de la figura 1-3, que muestra un núcleo rectangular con un devanado de N vueltas de alambre enrollado sobre una de las piernas o columnas del núcleo. Si el núcleo es de hierro o de ciertos metales similares (llamados *materiales ferromagnéticos*), casi todo el campo magnético producido por la corriente permanecerá dentro del núcleo, de modo que el camino de integración especificado en la ley de Ampere es la longitud media del núcleo l_n. La corriente que pasa por el camino de integración I_{neta} es entonces Ni, puesto que la bobina de alambre corta dicho camino N veces mientras pasa la corriente i. La ley de Ampere se expresa entonces como

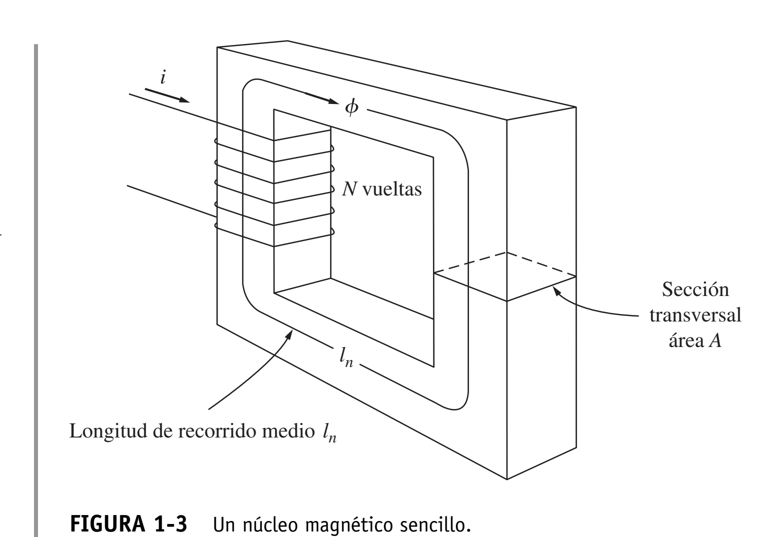


FIGURA 1-3 Un núcleo magnético sencillo.

$$Hl_n = Ni \tag{1-19}$$

donde H es la magnitud del vector de intensidad del campo magnético **H**. De esta manera, la magnitud de intensidad del campo magnético en el núcleo debido a la corriente aplicada es

$$H = \frac{Ni}{l_n} \tag{1-20}$$

La intensidad del campo magnético **H** es, de alguna manera, una medida del "esfuerzo" de una corriente por establecer un campo magnético. La potencia del campo magnético producido en el núcleo depende también del material de que está hecho. La relación entre la intensidad del campo magnético **H** y la densidad del flujo magnético resultante **B** producida dentro del material está dada por

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} \tag{1-21}$$

donde

$\mathbf{H}$ = intensidad del campo magnético
μ = *permeabilidad* magnética del material
$\mathbf{B}$ = densidad de flujo magnético resultante

La densidad de flujo magnético real producida en una sección del material está dada entonces por el producto de dos términos:

H, que representa el esfuerzo de la corriente por establecer un campo magnético
μ, que representa la facilidad relativa para establecer un campo magnético en un material dado

La intensidad del campo magnético se mide en ampere-vueltas por metro, la permeabilidad en henrys por metro y la densidad de flujo resultante en webers por metro cuadrado, conocido como teslas (T).

La permeabilidad del espacio libre (aire) se denomina μ_0, y su valor es

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m} \tag{1-22}$$

La permeabilidad de cualquier material comparada con la del espacio libre se denomina *permeabilidad relativa*:

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} \tag{1-23}$$

La permeabilidad relativa es una medida útil para comparar la capacidad de magnetización de los materiales. Por ejemplo, los aceros que se utilizan en las máquinas modernas tienen permeabilidades relativas de 2 000 a 6 000 o más. Esto significa que, para una cantidad de corriente dada, en la sección de acero habrá entre 2 000 y 6 000 veces más flujo que en la sección correspondiente de aire. (La permeabilidad del aire es la misma que la del espacio libre.) Obviamente, los metales que forman los núcleos de un transformador o de un motor cumplen un papel de extrema importancia para incrementar y concentrar el flujo magnético en el aparato.

Debido a que la permeabilidad del hierro es mucho mayor que la del aire, la mayor parte del flujo en un núcleo de hierro, como el que aparece en la figura 1-3, permanece dentro del núcleo en lugar de viajar a través del aire circundante, cuya permeabilidad es mucho más baja. La pequeña cantidad de flujo disperso que abandona el núcleo de hierro es muy importante para determinar el enlace de flujo entre las bobinas y las autoinductancias de las bobinas en transformadores y motores.

En un núcleo como el que se muestra en la figura 1-3, la magnitud de la densidad de flujo está dada por

$$B = \mu H = \frac{\mu N i}{l_n} \tag{1-24}$$

Ahora el flujo total en cierta área está dado por

$$\phi = \int_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \tag{1-25a}$$

donde $d\mathbf{A}$ es la diferencial del área. Si el vector de densidad de flujo es perpendicular a un plano de área A y si la densidad de flujo es constante en toda el área, la ecuación se reduce a

$$\phi = BA \tag{1-25b}$$

De esta forma, el flujo total en el núcleo de la figura 1-3, producido por la corriente i en el devanado, es

$$\phi = BA = \frac{\mu N i A}{l_n} \tag{1-26}$$

donde A es el área de la sección transversal del núcleo.

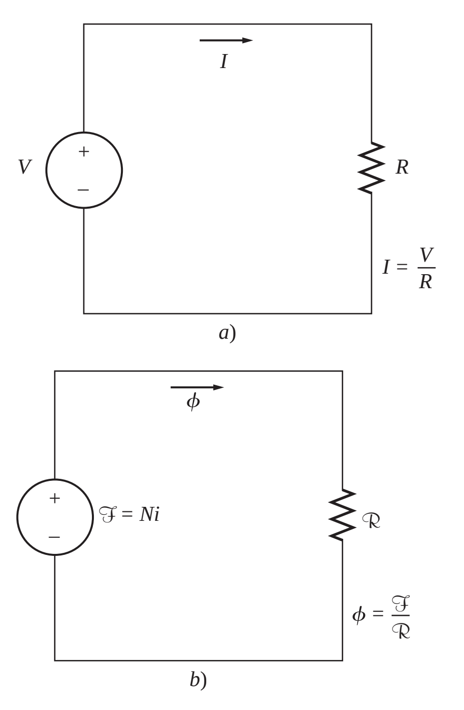


FIGURA 1-4 *a*) Circuito eléctrico sencillo. *b*) Circuito magnético análogo al núcleo del transformador.

Circuitos magnéticos

En la ecuación (1-26) se observa que la *corriente* en una bobina de alambre conductor enrollado alrededor de un núcleo produce un flujo magnético en éste. Esto en cierta forma es análogo al voltaje que produce un flujo de corriente en el circuito eléctrico. Es posible definir un "circuito magnético" cuyo comportamiento está determinado por ecuaciones análogas a aquellas establecidas para un circuito eléctrico. Con frecuencia, el modelo de circuito del comportamiento magnético se utiliza en el diseño de máquinas y transformadores eléctricos para simplificar el proceso de diseño, que de otro modo sería muy complejo.

En un circuito eléctrico sencillo como el de la figura 1-4*a*), la fuente de voltaje V genera una corriente I a lo largo de la resistencia R. La relación entre estas cantidades está dada por la ley de Ohm:

$$V = IR$$

En el circuito eléctrico, el voltaje o fuerza electromotriz genera el flujo de corriente. Por analogía, la cantidad correspondiente en el circuito magnético se denomina *fuerza magnetomotriz* (fmm). La fuerza magnetomotriz de un circuito magnético es igual al flujo efectivo de corriente aplicado al núcleo, o

$$\mathcal{F} = Ni \qquad \textbf{(1-27)}$$

donde $\mathcal{F}$ es el símbolo de la fuerza magnetomotriz, medida en amperes-vueltas.

En el circuito magnético, al igual que la fuente de voltaje en el circuito eléctrico, la fuerza magnetomotriz tiene una polaridad asociada a ella. El *terminal positivo* de la fuente de fmm es el terminal de donde sale el flujo y el *terminal negativo* es el terminal por donde el flujo retorna a la fuente. La polaridad de la fuerza magnetomotriz de una bobina de alambre puede determinarse mediante la utilización de la regla de la mano derecha: si la curvatura de los dedos de la mano derecha apunta en la dirección del flujo de corriente de la bobina, el dedo pulgar apuntará en la dirección positiva de la fmm (véase la figura 1-5).

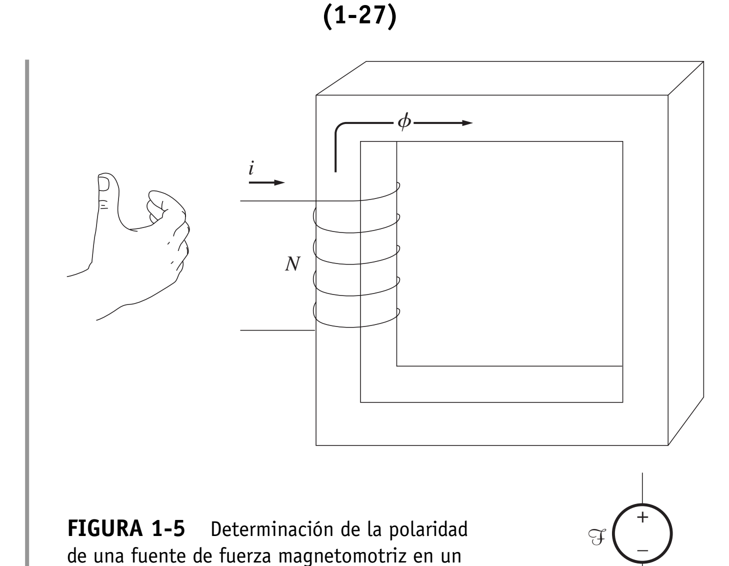


FIGURA 1-5 Determinación de la polaridad de una fuente de fuerza magnetomotriz en un circuito magnético.

En un circuito eléctrico, el voltaje aplicado ocasiona un flujo de corriente I. En forma similar, en un circuito magnético, la fuerza magnetomotriz aplicada ocasiona un flujo ϕ. La relación entre voltaje y corriente en un circuito eléctrico está dada por la ley de Ohm ($V = IR$); en forma semejante, la relación entre la fuerza magnetomotriz y el flujo es

$$\mathcal{F} = \phi\,\mathcal{R} \qquad \textbf{(1-28)}$$

donde

$\mathcal{F}$ = fuerza magnetomotriz del circuito
ϕ = flujo del circuito
$\mathcal{R}$ = *reluctancia* del circuito



La reluctancia de un circuito magnético es el homólogo de la resistencia del circuito eléctrico y se mide en amperes-vueltas por weber.

Existe también un análogo magnético de la conductancia. Así como la conductancia en el circuito eléctrico es el inverso de su resistencia, la *permeancia* $\mathcal{P}$ de un circuito magnético es el inverso de su reluctancia:

$$\mathcal{P} = \frac{1}{\mathcal{R}} \qquad \textbf{(1-29)}$$

La relación entre la fuerza magnetomotriz y el flujo se puede expresar como

$$\phi = \mathcal{F}\mathcal{P} \qquad \textbf{(1-30)}$$

En ciertas circunstancias, es más fácil trabajar con la permeancia del circuito magnético que con su reluctancia.

¿Cuál es la reluctancia en el núcleo de la figura 1-3? En este núcleo el flujo está dado por la ecuación (1-26):

$$\phi = BA = \frac{\mu NiA}{l_n} \qquad \textbf{(1-26)}$$

$$= Ni\left(\frac{\mu A}{l_n}\right)$$

$$\phi = \mathcal{F}\left(\frac{\mu A}{l_n}\right) \qquad \textbf{(1-31)}$$

Si se compara la ecuación (1-31) con la ecuación (1-28), se observa que la reluctancia del núcleo es

$$\mathcal{R} = \frac{l_n}{\mu A} \tag{1-32}$$

En un circuito magnético las reluctancias obedecen las mismas reglas que las resistencias en un circuito eléctrico. La reluctancia equivalente de un número de reluctancias en serie es la suma de las reluctancias individuales:

$$\mathcal{R}_{eq} = \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3 + \cdots \tag{1-33}$$

De la misma forma, las reluctancias en paralelo se combinan de acuerdo con la ecuación

$$\frac{1}{\mathcal{R}_{eq}} = \frac{1}{\mathcal{R}_1} + \frac{1}{\mathcal{R}_2} + \frac{1}{\mathcal{R}_3} + \cdots \tag{1-34}$$

Las permeancias en serie y en paralelo obedecen las mismas reglas que las conductancias eléctricas.

Los cálculos de flujo en el núcleo, que se obtienen utilizando los conceptos del circuito magnético, *siempre* son aproximaciones (en el mejor de los casos su aproximación está a ± 5% del valor real). Existe un buen número de razones para que ocurra esta inexactitud inherente:

1. El concepto de circuito magnético supone que el flujo está confinado dentro del núcleo, lo cual no es cierto. La permeabilidad de un núcleo ferromagnético es de 2 000 a 6 000 veces la del aire, pero una pequeña fracción del flujo escapa del núcleo al aire circundante que es de baja permeabilidad. Este flujo que sale del núcleo se denomina *flujo disperso* y es de gran importancia en el diseño de las máquinas eléctricas.
2. En el cálculo de la reluctancia se supone cierta longitud media y una sección transversal del núcleo. Esta suposición no es muy adecuada, especialmente en los ángulos de los núcleos.
3. En los materiales ferromagnéticos la permeabilidad varía con la cantidad de flujo que existe desde antes en el material. Este efecto no lineal, que se describe con detalle más adelante, añade otra fuente de error al análisis del circuito magnético, puesto que las reluctancias que se utilizan para calcular el circuito magnético dependen de la permeabilidad del material.
4. En el supuesto de que en el recorrido del flujo en el núcleo existan entrehierros, la sección transversal efectiva del entrehierro será mayor que la del núcleo en cada lado del entrehierro. La sección extra efectiva se debe al "efecto marginal" del campo magnético en el entrehierro (figura 1-6).

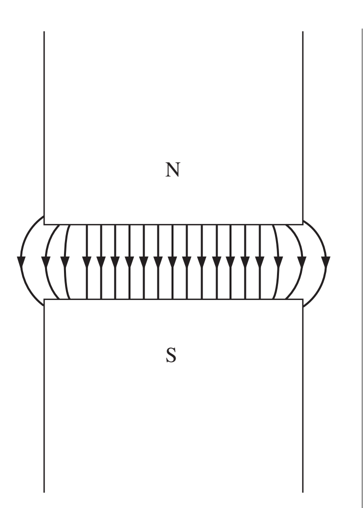


FIGURA 1-6 Efecto marginal de un campo magnético en un entrehierro. Nótese el incremento de la sección transversal del entrehierro en comparación con la sección transversal del metal.

Es posible eliminar parcialmente estas fuentes internas de error si se utilizan una longitud de recorrido media y una sección transversal "corregidas" o "efectivas", en lugar de la longitud física y el área reales obtenidas en los cálculos.

Aunque existen muchas limitaciones inherentes al concepto de circuito magnético, éste es aún la herramienta más útil disponible para el cálculo de los flujos en el diseño práctico de las máquinas. Efectuar el cálculo exacto utilizando las ecuaciones de Maxwell es muy difícil, y no es necesario puesto que con el método aproximado se obtienen resultados satisfactorios.

Los siguientes ejemplos ilustran los cálculos básicos de circuitos magnéticos. Observe que en estos ejemplos las respuestas están dadas con tres cifras significativas.

EJEMPLO 1-1

En la figura 1-7*a*) se observa un núcleo ferromagnético. Tres lados de este núcleo tienen una anchura uniforme, mientras que el cuarto es un poco más delgado. La profundidad del núcleo visto es de 10 cm (hacia dentro de la página), mientras que las demás dimensiones se muestran en la figura. Hay una bobina de 200 vueltas enrollada sobre el lado izquierdo del núcleo. Si la permeabilidad relativa μ_r es de 2 500, ¿qué cantidad de flujo producirá una corriente de 1 A en la bobina?

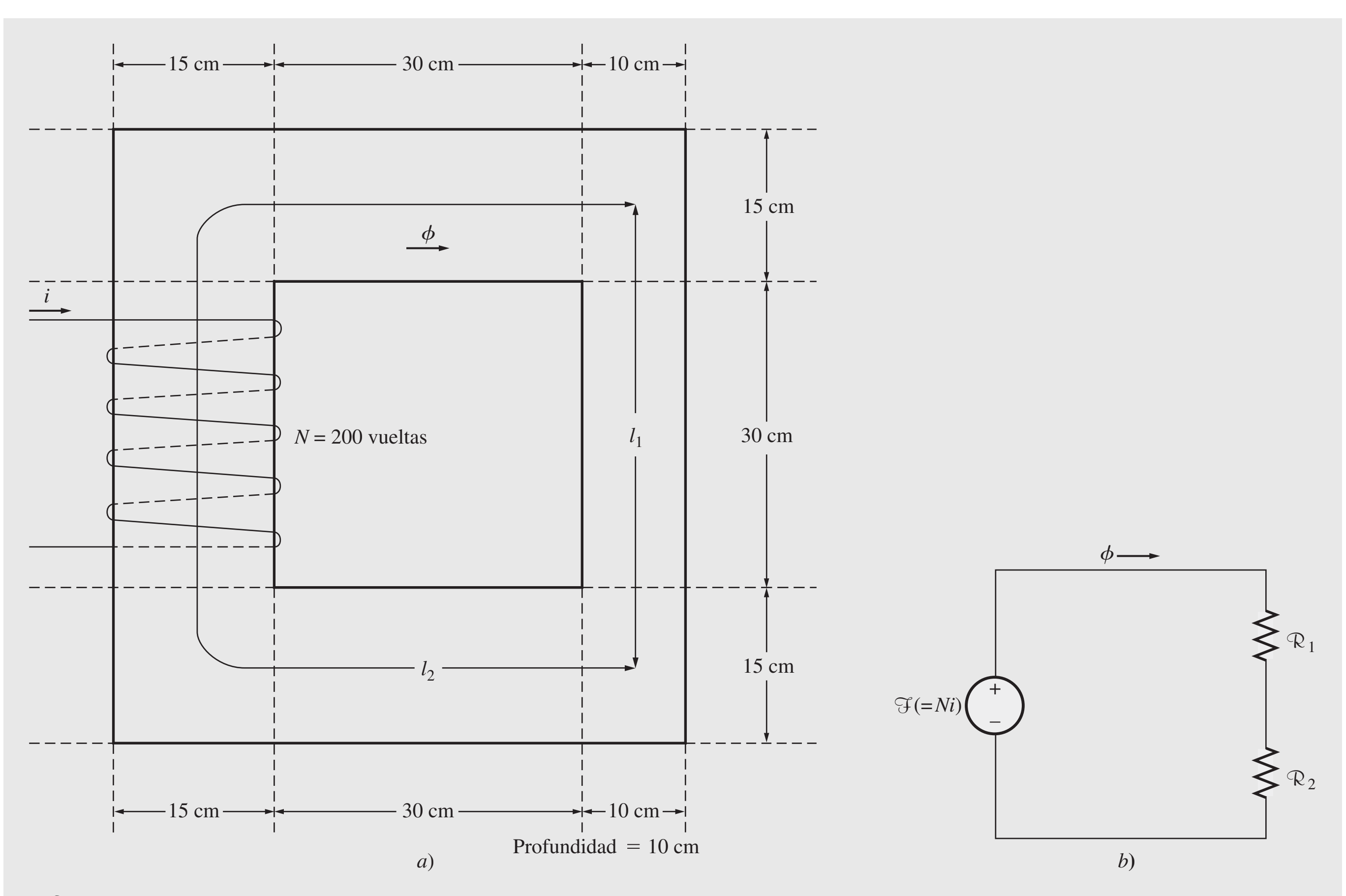


FIGURA 1-7 *a*) Núcleo ferromagnético del ejemplo 1-1. *b*) Circuito magnético correspondiente a *a*).

Solución

Se resolverá este problema de dos maneras diferentes, una a mano y otra utilizando el programa MATLAB, y se demostrará que ambas conducen a la misma respuesta.

Tres lados del núcleo tienen la misma área en la sección transversal, mientras que el cuarto lado tiene un área diferente. Entonces, se puede dividir el núcleo en dos regiones: 1) la correspondiente al lado más delgado y 2) la que forman los otros tres lados en conjunto. El circuito magnético correspondiente a este núcleo se muestra en la figura 1-7*b*).

La longitud media de la región 1 es de 45 cm y el área transversal de $10 \times 10 \text{ cm} = 100 \text{ cm}^2$. De esta forma, la reluctancia de la región es

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_1 &= \frac{l_1}{\mu A_1} = \frac{l_1}{\mu_r \mu_0 A_1} \\ &= \frac{0.45 \text{ m}}{(2\,500)(4\pi \times 10^{-7})(0.01 \text{ m}^2)} \\ &= 14\,300 \text{ A} \bullet \text{espiras/Wb}\end{aligned} \quad \text{(1-32)}$$

La longitud media de la región 2 es de 130 cm y el área de la sección transversal es de $15 \times 10 \text{ cm} = 150 \text{ cm}^2$. De esta forma, la reluctancia de esta región es

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_2 &= \frac{l_2}{\mu A_2} = \frac{l_2}{\mu_r \mu_0 A_2} \\ &= \frac{1.3 \text{ m}}{(2\,500)(4\pi \times 10^{-7})(0.015 \text{ m}^2)} \\ &= 27\,600 \text{ A} \bullet \text{espiras/Wb}\end{aligned} \quad \text{(1-32)}$$

Por lo tanto, la reluctancia total del núcleo es

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{eq} &= \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 \\ &= 14\,300 \text{ A} \bullet \text{espiras/Wb} + 27\,600 \text{ A} \bullet \text{espiras/Wb} \\ &= 41\,900 \text{ A} \bullet \text{espiras/Wb}\end{aligned}$$

La fuerza magnetomotriz total es

$$\mathcal{F} = Ni = (200 \text{ espiras})(1.0 \text{ A}) = 200 \text{ A} \bullet \text{espiras}$$

El flujo total en el núcleo está dado por

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{R}} = \frac{200 \text{ A} \bullet \text{espiras}}{41\,900 \text{ A} \bullet \text{espiras/ Wb}} \\ &= 0.0048 \text{ Wb}\end{aligned}$$

Si se desea, este cálculo se puede realizar utilizando una copia del texto del MATLAB. A continuación se muestra el código simple para calcular el flujo en el núcleo.

```
% Archivo M: ex1_1.m
% Archivo M para calcular el flujo en el ejemplo 1-1
11 = 0.45;                          % Longitud de la región 1
12 = 1.3;                           % Longitud de la región 2
a1 = 0.01;                          % Área de la región 1
a2 = 0.015;                         % Área de la región 2
ur = 2 500;                         % Permeabilidad relativa
u0 = 4*pi*1E-7;                     % Permeabilidad del espacio libre
n = 200;                            % Número de vueltas sobre el núcleo
i = 1;                              % Corriente en amperes

% Calcular la primera reluctancia
r1 = 11 / (ur * u0 * a1);
disp (['r1 = ' num2str(r1)]);

% Calcular la segunda reluctancia
r2 = 12 / (ur * u0 * a2);
disp (['r2 = ' num2str(r2)]);

% Calcular la reluctancia total
rtot = r1 + r2;

% Calcular la fmm
mmf = n * i;

% Finalmente, obtener el flujo del núcleo
flujo = fmm / rtot;

% Mostrar el resultado
disp ([' flujo = ' num2str(flujo)]);
```

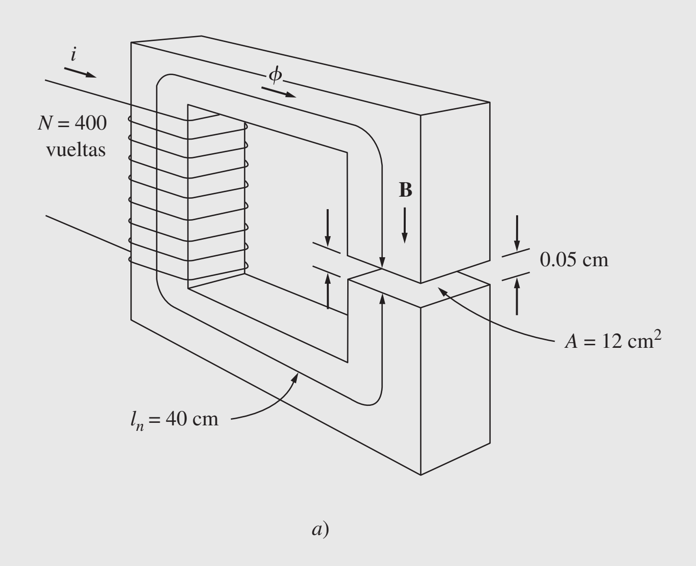
Cuando se ejecuta el programa, los resultados que arroja son:

```
» ex1_1
r1 = 14323.9449
r2 = 27586.8568
Flujo = 0.004772
```

Este programa produce la misma respuesta a la que se llegó por medio de los cálculos manuales al número de cifras significativas en el problema.

EJEMPLO 1-2

La figura 1-8*a*) muestra un núcleo ferromagnético cuya longitud media es de 40 cm. Hay un pequeño entrehierro de 0.05 cm en la estructura del núcleo. El área de la sección transversal del núcleo es de 12 cm^2, la permeabilidad relativa del núcleo es de 4 000 y la bobina de alambre en el núcleo tiene 400 vueltas. Suponga que el efecto marginal en el entrehierro incrementa 5% la sección transversal efectiva del entrehierro. Dada esta información, encuentre *a*) la reluctancia total del camino del flujo (hierro más entrehierro) y *b*) la corriente requerida para producir una densidad de flujo de 0.5 T en el entrehierro.



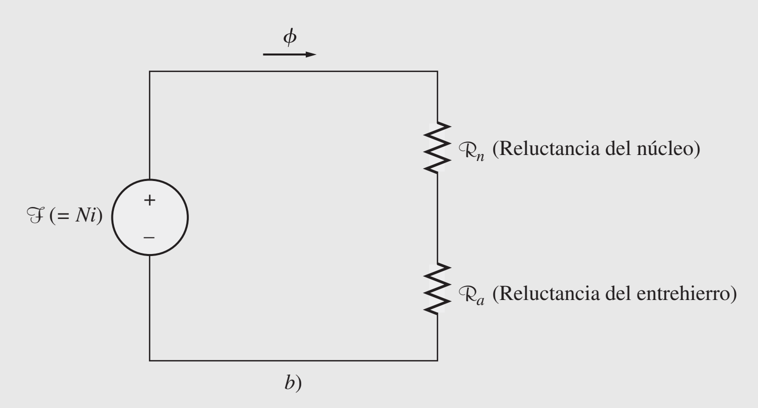


FIGURA 1-8 *a*) Núcleo ferromagnético del ejemplo 1-2. *b*) Circuito magnético correspondiente a *a*).

Solución

El circuito magnético correspondiente a este núcleo se muestra en la figura 1-8*b*).

a) La reluctancia del núcleo es

$$\mathcal{R}_c = \frac{l_n}{\mu A_c} = \frac{l_n}{\mu_r \mu_0 A_c} \qquad \textbf{(1-32)}$$

$$= \frac{0.4 \text{ m}}{(4\,000)(4\pi \times 10^{-7})(0.002 \text{ m}^2)}$$

$$= 66\,300 \text{ A} \bullet \text{espiras/Wb}$$

El área efectiva del entrehierro es de $1.05 \times 12\ \text{cm}^2 = 12.6\ \text{cm}^2$; por lo tanto, la reluctancia del entrehierro es de

$$\mathcal{R}_a = \frac{l_a}{\mu_0 A_a} \tag{1-32}$$

$$= \frac{0.0005\ \text{m}}{(4\pi \times 10^{-7})(0.00126\ \text{m}^2)}$$

$$= 316\ 000\ \text{A} \bullet \text{espiras/Wb}$$

Entonces, la reluctancia total en el camino del flujo es

$$\mathcal{R}_{\text{eq}} = \mathcal{R}_n + \mathcal{R}_a$$

$$= 66\ 300\ \text{A} \bullet \text{espiras/Wb} + 316\ 000\ \text{A} \bullet \text{espiras/Wb}$$

$$= 382\ 300\ \text{A} \bullet \text{espiras/Wb}$$

Nótese que el entrehierro contribuye con la mayor cantidad de reluctancia a pesar de que su longitud es 800 veces menor que la del núcleo.

b) La ecuación (1-28) establece que

$$\mathcal{F} = \phi\mathcal{R} \tag{1-28}$$

Puesto que el flujo $\phi = BA$ y $\mathcal{F} = Ni$, esta ecuación se transforma en

$$Ni = BA\mathcal{R}$$

entonces

$$i = \frac{BA\mathcal{R}}{N}$$

$$= \frac{(0.5\ \text{T})(0.00126\ \text{m}^2)(383\ 200\ \text{A} \bullet \text{espiras/ Wb})}{400\ \text{espiras}}$$

$$= 0.602\ \text{A}$$

Nótese que puesto que se requería el flujo en el *entrehierro*, el área efectiva de éste se utilizó en la ecuación.

EJEMPLO 1-3

La figura 1-9*a*) muestra un rotor y un estator sencillos de un motor de cd. La longitud media del recorrido del flujo en el estator es de 50 cm, y el área de su sección transversal es de 12 cm^2. La longitud media correspondiente al rotor es de 5 cm y el área de su sección transversal también es de 12 cm^2. Cada entrehierro entre el rotor y el estator tiene un ancho de 0.05 cm y el área de su sección transversal (incluyendo el efecto marginal) es de 14 cm^2. El hierro del núcleo tiene una permeabilidad relativa de 2 000, y hay 200 vueltas alrededor del núcleo. Si la corriente en el alambre se ajusta a l A, ¿cuál será la densidad de flujo resultante en el entrehierro?

Solución

Para determinar la densidad de flujo del entrehierro, se requiere primero calcular la fuerza magnetomotriz aplicada al núcleo y la reluctancia total en el recorrido del flujo. Con esta información se puede encontrar el flujo total en el núcleo. Finalmente, una vez que se conoce el área de la sección transversal del entrehierro, se puede calcular la densidad de flujo.

La reluctancia del estator es

$$\mathcal{R}_s = \frac{l_s}{\mu_r \mu_0 A_s}$$

$$= \frac{0.5\ \text{m}}{(2\ 000)(4\pi \times 10^{-7})(0.0012\ \text{m}^2)}$$

$$= 166\ 000\ \text{A} \bullet \text{espiras/Wb}$$

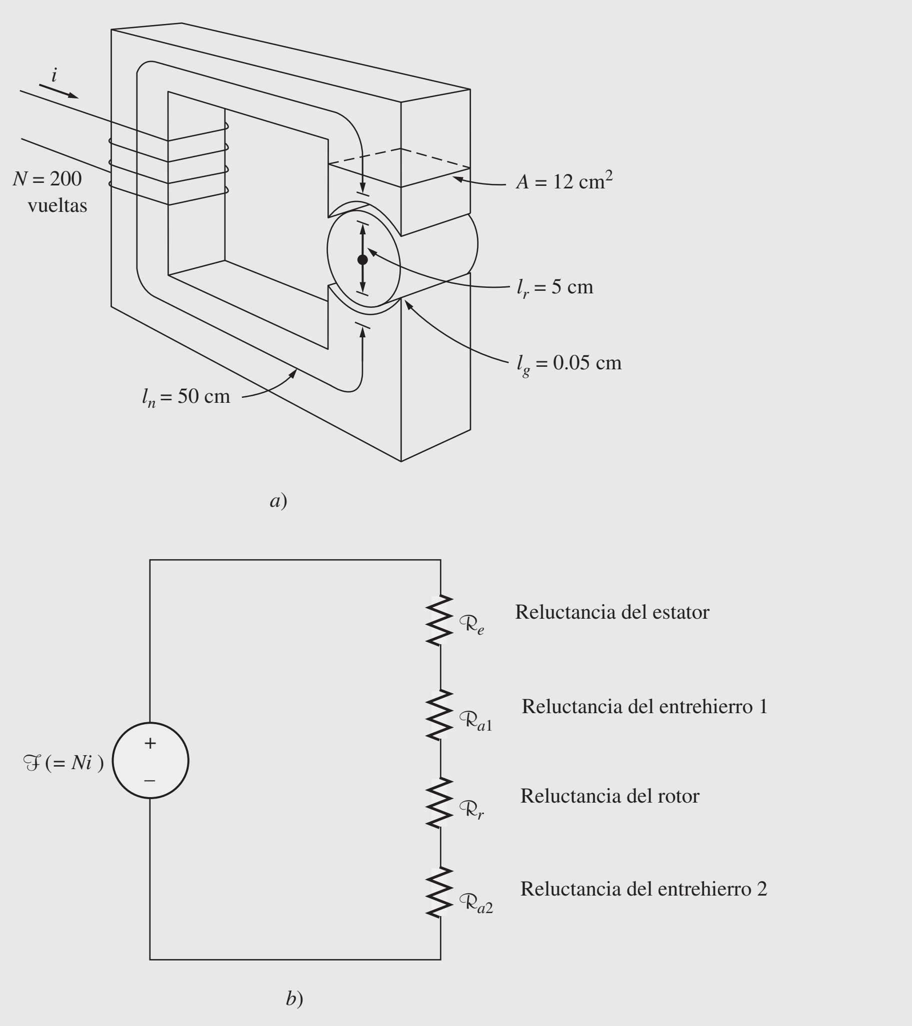


FIGURA 1-9 *a*) Diagrama simplificado de un rotor y un estator de motor cd. *b*) Circuito magnético correspondiente a *a*).

La reluctancia del rotor es

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_r &= \frac{l_r}{\mu_r \mu_0 A_r} \\ &= \frac{0.05 \text{ m}}{(2\,000)(4\pi \times 10^{-7})(0.0012 \text{ m}^2)} \\ &= 16\,600 \text{ A} \bullet \text{espiras/Wb}\end{aligned}$$

La reluctancia del entrehierro es

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_a &= \frac{l_a}{\mu_r \mu_0 A_a} \\ &= \frac{0.0005 \text{ m}}{(1)(4\pi \times 10^{-7})(0.0014 \text{ m}^2)} \\ &= 284\,000 \text{ A} \bullet \text{espiras/Wb}\end{aligned}$$

El circuito magnético correspondiente a esta máquina se muestra en la figura 1-9*b*). La reluctancia total del camino del flujo es

$$\mathcal{R}_{eq} = \mathcal{R}_e + \mathcal{R}_{a1} + \mathcal{R}_r + \mathcal{R}_{a2}$$
$$= 166\,000 + 284\,000 + 16\,600 + 284\,000 \text{ A} \bullet \text{espiras/Wb}$$
$$= 751\,000 \text{ A} \bullet \text{espiras/Wb}$$

La fuerza magnetomotriz neta aplicada al núcleo es

$$\mathcal{F} = Ni = (200 \text{ espiras})(1.0 \text{ A}) = 200 \text{ A} \bullet \text{espiras}$$

Por lo tanto, el flujo total en el núcleo es

$$\phi = \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{R}} = \frac{200 \text{ A} \bullet \text{espiras}}{751\,000 \text{ A} \bullet \text{espiras/ Wb}}$$
$$= 0.00266 \text{ Wb}$$

Por último, la densidad de flujo en el entrehierro del motor es

$$B = \frac{\phi}{A} = \frac{0.000266 \text{ Wb}}{0.0014 \text{ m}^2} = 0.19 \text{ T}$$

Comportamiento magnético de los materiales ferromagnéticos

Al comienzo de esta sección se definió la permeabilidad magnética mediante la ecuación

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} \qquad \textbf{(1-21)}$$

Se indicó que la permeabilidad magnética de los materiales ferromagnéticos es muy alta, hasta 6 000 veces la permeabilidad del espacio libre. En esa exposición y en los ejemplos que la siguieron se supuso que la permeabilidad era constante, independiente de la fuerza magnetomotriz aplicada al material. Aunque la permeabilidad es constante en el espacio libre, *no* lo es en el hierro y en otros materiales ferromagnéticos.

Para ilustrar el comportamiento de la permeabilidad magnética en un material ferromagnético se aplica una corriente directa al núcleo que se muestra en la figura 1-3, comenzando con cero amperes e incrementándola lentamente hasta la máxima corriente posible. Cuando se grafica el flujo producido en el núcleo contra la fuerza magnetomotriz que lo produce, se obtiene una gráfica como la de la figura 1-10*a*), la cual se denomina *curva de saturación* o *curva de magnetización*. Al comienzo, un pequeño incremento de la fuerza magnetomotriz produce un gran aumento del flujo resultante. Después de cierto punto, aunque se incremente mucho la fuerza magnetomotriz, los aumentos de flujo serán cada vez más pequeños. Finalmente, el incremento de la fuerza magnetomotriz casi no produce cambios en el flujo. La región de esta figura en la cual la curva se aplana se llama *región de saturación*, y se dice que el núcleo está *saturado*. La región en la cual el núcleo cambia con rapidez se llama *región no saturada* de la curva, y el núcleo *no está saturado*. La región de transición entre las regiones no saturada y saturada se denomina a veces *rodilla* de la curva. Note que el flujo producido en el núcleo varía linealmente con la fuerza magnetomotriz aplicada en la región no saturada y se aproxima a un valor constante, independiente de la fuerza magnetomotriz en la región saturada.

Otro diagrama estrechamente relacionado con el anterior se muestra en la figura 1-10*b*). Esta figura representa la densidad del flujo magnético **B** frente a la intensidad de campo magnético **H**, y corresponde a las ecuaciones (1-20) y (1-25*b*),

$$H = \frac{Ni}{l_n} = \frac{\mathcal{F}}{l_n} \qquad \textbf{(1-20)}$$

$$\phi = BA \qquad \textbf{(1-25}b\textbf{)}$$

Es fácil deducir que para un núcleo dado la *intensidad del campo magnético es directamente proporcional a la fuerza magnetomotriz*, y que la *densidad de flujo magnético es directamente*

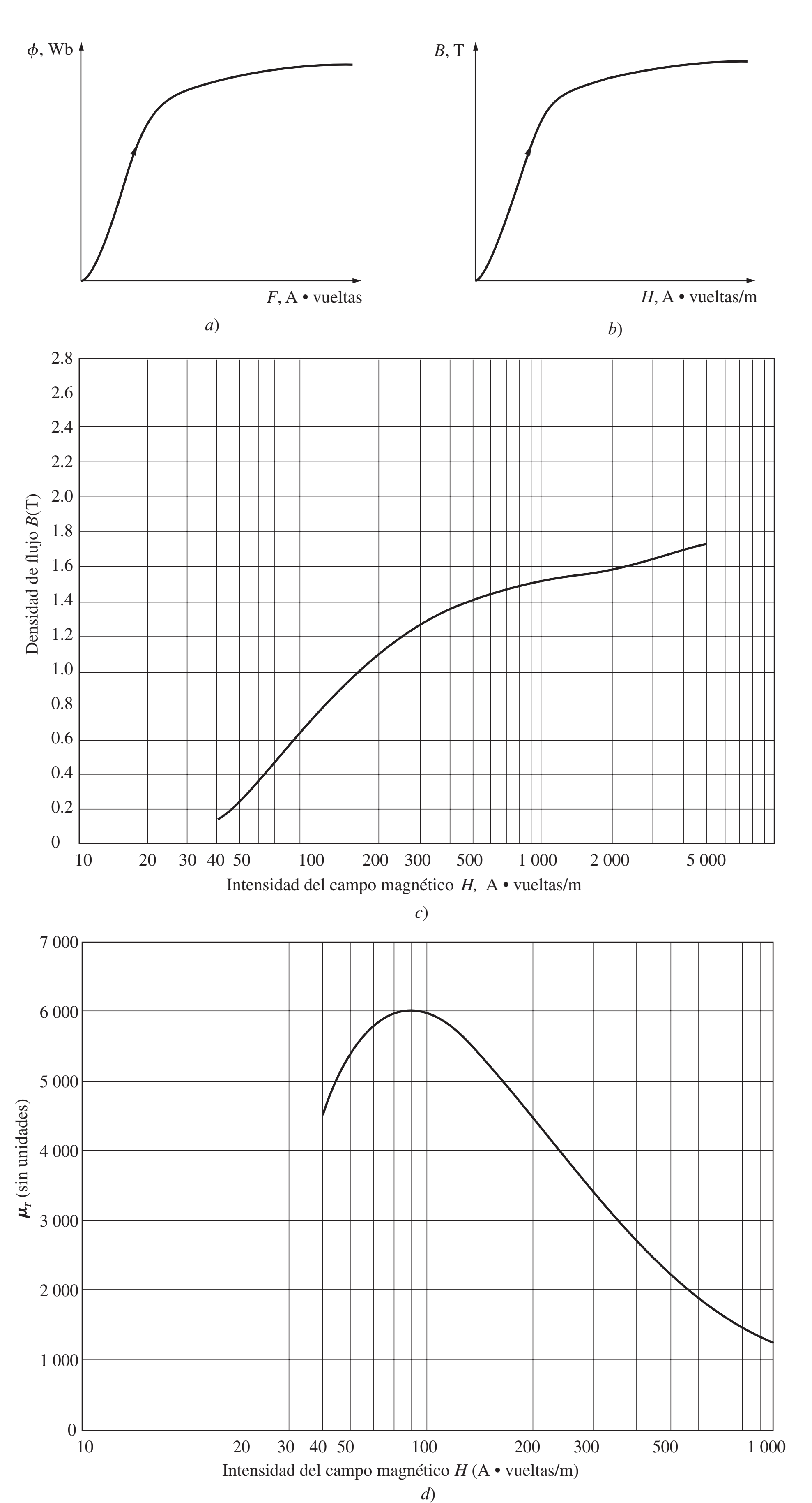


FIGURA 1-10 *a*) Curva de magnetización con cd de un núcleo ferromagnético. *b*) Curva de magnetización en términos de densidad de flujo e intensidad del campo magnético. *c*) Curva de magnetización detallada de una típica pieza de acero. *d*) Gráfica de permeabilidad relativa μ_r, como una función de la intensidad magnética H de una típica pieza de acero.

proporcional al flujo. Por lo tanto, la relación entre B y H es semejante a la relación entre el flujo y la fuerza magnetomotriz. La pendiente de la curva de densidad de flujo contra la intensidad del campo magnético para cualquier valor de H, en la figura 1-10*b*), es por definición la permeabilidad del núcleo a dicha intensidad del campo magnético. La curva muestra que la permeabilidad es grande y relativamente constante en la región no saturada, y que decrece de manera gradual hasta un valor muy bajo cuando el núcleo se encuentra muy saturado.

En la figura 1-10*c*) se puede ver con más detalle la curva de magnetización de una típica pieza de acero, y cuya intensidad del campo magnético está dada en una escala logarítmica. La región de saturación de la curva puede detallarse en la gráfica sólo cuando la intensidad del campo magnético se expresa con logaritmos.

La ventaja de utilizar núcleos de material ferromagnético en máquinas eléctricas y transformadores radica en que al aplicarles cierta fuerza magnetomotriz se obtiene un flujo mayor que el obtenido en el aire. Sin embargo, si el flujo resultante debe ser proporcional o aproximadamente proporcional a la fuerza magnetomotriz aplicada, el núcleo *debe* ser operado dentro de la región no saturada de la curva de magnetización.

Puesto que los generadores y motores reales dependen del flujo magnético para producir el voltaje y el par, se diseñan para producir el máximo flujo posible. Como resultado, la mayoría de las máquinas reales operan cerca del punto de rodilla de la curva de magnetización, y en sus núcleos el flujo no está linealmente relacionado con la fuerza magnetomotriz que lo produce. Esta no linealidad se tiene en cuenta en las muchas conductas particulares de las máquinas que se explicarán en los próximos capítulos. Se utilizará el MATLAB para resolver los ejercicios que impliquen una conducta no lineal de máquinas reales.

EJEMPLO 1-4

Encuentre la permeabilidad relativa del material ferromagnético típico, cuya curva de magnetización se muestra en la figura 1-10*c*), cuando *a*) $H = 50$, *b*) $H = 1\,00$, *c*) $H = 500$ y *d*) $H = 1\,000$ A • vueltas/m.

Solución

La permeabilidad de un material está dada por

$$\mu = \frac{B}{H}$$

y la permeabilidad relativa está dada por

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} \tag{1-23}$$

Por lo tanto, es fácil determinar la permeabilidad de cualquier intensidad de campo magnético.

a) Cuando $H = 50$ A • espiras/m, $B = 0.25$ T, entonces

$$\mu = \frac{B}{H} = \frac{0.25\text{ T}}{50\text{ A • espiras/m}} = 0.0050\text{ H/m}$$

y

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} = \frac{0.0050\text{ H/m}}{4\pi \times 10^{-7}\text{ H/m}} = 3\,980$$

b) Cuando $H = 100$ A • espiras/m, $B = 0.72$ T, entonces

$$\mu = \frac{B}{H} = \frac{0.72\text{ T}}{100\text{ A • espiras/m}} = 0.0072\text{ H/m}$$

y

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} = \frac{0.0072\text{ H/m}}{4\pi \times 10^{-7}\text{ H/m}} = 5\,730$$

c) Cuando $H = 500$ A • espiras/m, $B = 1.40$ T, entonces

$$\mu = \frac{B}{H} = \frac{1.40 \text{ T}}{500 \text{ A • espiras/m}} = 0.0028 \text{ H/m}$$

y

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} = \frac{0.0028 \text{ H/m}}{4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}} = 2\,230$$

d) Cuando $H = 1\,000$ A • espiras/m, $B = 1.51$ T, entonces

$$\mu = \frac{B}{H} = \frac{1.51 \text{ T}}{1\,000 \text{ A • espiras/m}} = 0.00151 \text{ H/m}$$

y

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} = \frac{0.00151 \text{ H/m}}{4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}} = 1\,200$$

Nótese que cuando la intensidad del campo magnético se incrementa, la permeabilidad primero aumenta y luego comienza a decrecer. La permeabilidad relativa del material ferromagnético típico como función de la intensidad del campo magnético se muestra en la figura 1-10*d*). Esta figura es la típica de todos los materiales ferromagnéticos. De la curva μ_r frente a H, puede observarse con claridad que haber supuesto como constante la permeabilidad relativa en los ejemplos 1-1 a 1-3 es válido únicamente dentro de un intervalo no muy amplio de valores de intensidad del campo magnético (o de fuerzas magnetomotrices).

En el siguiente ejemplo se supone que la permeabilidad relativa no es constante. En cambio, la relación entre B y H se da en una gráfica.

EJEMPLO 1-5

Un núcleo magnético cuadrado tiene una longitud media de 55 cm y un área de sección transversal de 150 cm^2. Una bobina de 200 vueltas de alambre está enrollada en una de las columnas del núcleo, el cual está hecho de un material cuya curva de magnetización se muestra en la figura 1-10*c*).

a) ¿Cuánta corriente se requiere para producir un flujo de 0.012 Wb en el núcleo?
b) ¿Cuál es la permeabilidad relativa del núcleo para esa corriente?
c) ¿Cuál es su reluctancia?

Solución

a) La densidad de flujo requerida en el núcleo es

$$B = \frac{\phi}{A} = \frac{0.012 \text{ Wb}}{0.015 \text{ m}^2} = 0.8 \text{ T}$$

De la figura 1-10*c*), la intensidad del campo magnético requerida es

$$H = 115 \text{ A • espiras/m}$$

De la ecuación (1-20), la fuerza magnetomotriz necesaria para producir esta intensidad de campo es

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= Ni = Hl_n \\ &= (115 \text{ A • espiras/m})(0.55 \text{ m}) = 63.25 \text{ A • espiras} \end{aligned}$$

Entonces, la corriente requerida es

$$i = \frac{\mathcal{F}}{N} = \frac{63.25 \text{ A • espiras}}{200 \text{ espiras}} = 0.316 \text{ A}$$

b) La permeabilidad del núcleo para esta corriente es

$$\mu = \frac{B}{H} = \frac{0.8 \text{ T}}{115 \text{ A • espiras/m}} = 0.00696 \text{ H/m}$$

Por lo tanto, la permeabilidad relativa es

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} = \frac{0.00696 \text{ H/m}}{4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}} = 5\,540$$

c) La reluctancia del núcleo es

$$\mathcal{R} = \frac{\mathcal{F}}{\phi} = \frac{63.25 \text{ A • espiras}}{0.012 \text{ Wb}} = 5\,270 \text{ A • espiras/Wb}$$

Pérdidas de energía en un núcleo ferromagnético

En vez de aplicar una corriente continua a los devanados dispuestos sobre el núcleo, se aplica una corriente alterna para observar qué ocurre. Dicha corriente se muestra en la figura 1-11*a*). Suponga que el flujo inicial en el núcleo es cero. Cuando se incrementa la corriente por primera vez, el flujo en el núcleo sigue la trayectoria *ab*, dibujada en la figura 1-11*b*). Ésta es básicamente la curva de saturación que se muestra en la figura 1-10. Sin embargo, cuando la corriente decrece, *el flujo representado en la curva sigue una trayectoria diferente de la seguida cuando la corriente iba en aumento*. Cuando la corriente decrece, el flujo en el núcleo sigue la trayectoria *bcd* y, más tarde, cuando la corriente se incrementa de nuevo, el flujo sigue la trayectoria *deb*. Nótese que la cantidad de flujo presente en el núcleo depende no sólo de la cantidad de corriente aplicada a los devanados del núcleo, sino también de la historia previa del flujo presente en el núcleo. Esta dependencia de la historia previa del flujo y el seguir una trayectoria diferente en la curva se denomina *histéresis*. La trayectoria *bcdeb* descrita en la figura 1-11*b*), que representa la variación de la corriente aplicada, se denomina *curva* o *lazo de histéresis*.

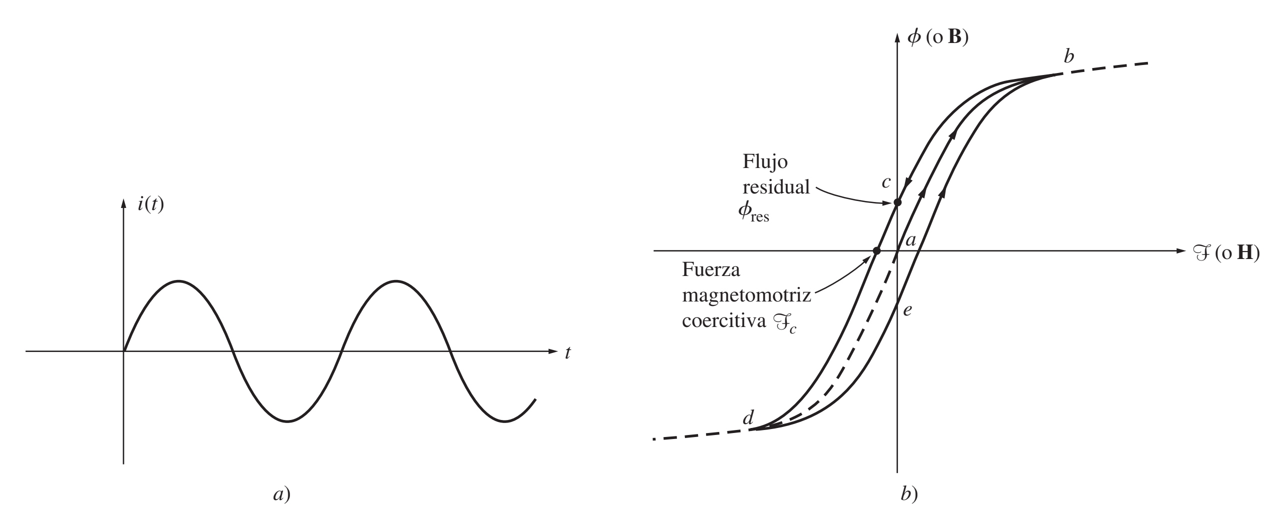


FIGURA 1-11 Curva o lazo de histéresis trazado por el flujo en un núcleo cuando se le aplica la corriente $i(t)$.

Nótese que si primero se aplica al núcleo una fuerza magnetomotriz intensa y luego se deja de aplicar, la trayectoria del flujo en el núcleo será *abc*. Cuando se suspende la fuerza magnetomotriz, el flujo *no llega* a cero, ya que permanece cierto flujo en el núcleo, denominado *flujo residual* (o flujo remanente), el cual es la causa de los imanes permanentes. Para que el flujo llegue a cero, se debe aplicar al núcleo, en dirección opuesta, cierta fuerza magnetomotriz llamada *fuerza magnetomotriz coercitiva* $\mathcal{F}_c$.

¿Por qué ocurre la curva de histéresis? Para entender el comportamiento de los materiales ferromagnéticos es necesario conocer algo acerca de su estructura. Los átomos del hierro y los de los materiales similares (cobalto, níquel y algunas de sus aleaciones) tienden a tener sus campos magnéticos fuertemente alineados entre sí. Dentro del metal hay unas pequeñas regiones llamadas *dominios*, en las que todos los átomos se alinean con sus campos magnéticos apuntando en una misma dirección, de modo que el dominio actúa dentro del material como un pequeño imán permanente. Una pieza de hierro no manifiesta polaridad magnética definida porque los dominios se encuentran dispuestos al azar en la estructura del material. La figura 1-12 representa un ejemplo de la estructura de los dominios en un trozo de hierro.

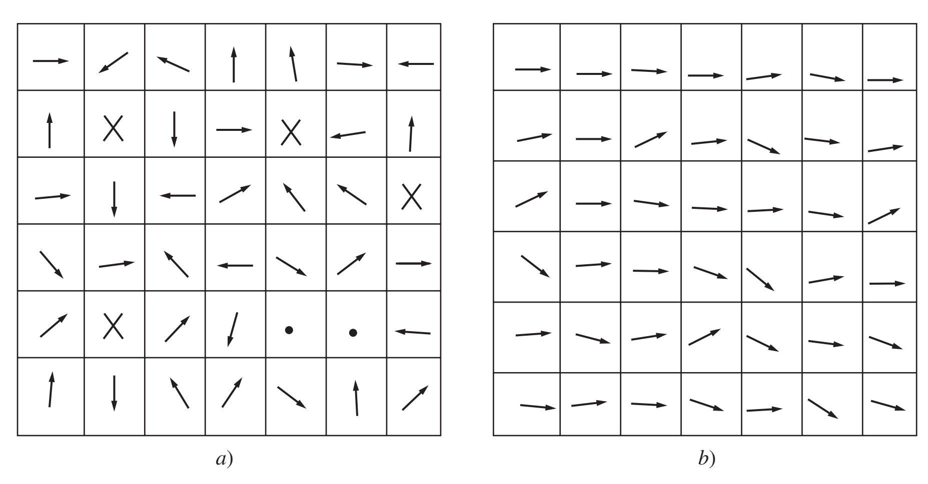


FIGURA 1-12 *a*) Dominios magnéticos orientados al azar. *b*) Dominios magnéticos alineados en presencia de un campo magnético externo.

Cuando se aplica un campo magnético externo a este trozo de hierro, los dominios orientados en la dirección del campo exterior crecen a expensas de los dominios orientados en otras direcciones, debido a que los átomos adyacentes cambian físicamente su orientación con el campo magnético aplicado. Los átomos adicionales, alineados con el campo, incrementan el flujo magnético en el hierro, lo cual causa el alineamiento de más átomos que incrementan la intensidad del campo magnético. Este efecto de retroalimentación positiva es la causa de que el hierro adquiera una permeabilidad mayor que el aire.

A medida que el campo magnético externo se fortalece, dominios completos alineados en otras direcciones se orientan como una unidad para alinearse con el campo. Por último, cuando casi todos los átomos y dominios en el hierro se han alineado con el campo externo, el incremento de la fuerza magnetomotriz puede ocasionar tan sólo un aumento de flujo igual al que ocurriría en el espacio libre (es decir, cuando todos los dominios se encuentran alineados, ya no habrá más retroalimentación para reforzar el campo). En este momento, el hierro estará *saturado* con el flujo. Ésta es la situación que se muestra en la región saturada de la curva de magnetización de la figura 1-10.

La histéresis se produce porque cuando el campo magnético exterior se suprime, los dominios no se ubican de nuevo al azar. ¿Por qué los dominios permanecen alineados? Porque los átomos requieren *energía* para recuperar su posición anterior. La energía para el alineamiento original la proveyó el campo magnético exterior; cuando el campo magnético exterior se suprime, no hay una fuente que ayude a que los dominios regresen a sus posiciones. El trozo de hierro es ahora un imán permanente.

Una vez que los dominios se alinean, algunos de ellos permanecerán en esa posición hasta que se les aplique una fuente de energía externa para cambiar su orientación. Otros ejemplos de fuentes externas de energía que pueden cambiar los límites entre los dominios o su alineamiento son la fuerza magnetomotriz aplicada en otras direcciones, un choque mecánico fuerte y el calor. Cualquiera de estos eventos puede suministrar energía a los dominios para cambiar su alineación (por esta razón, un imán permanente puede perder su magnetismo si se le deja caer, se le golpea o se le calienta).

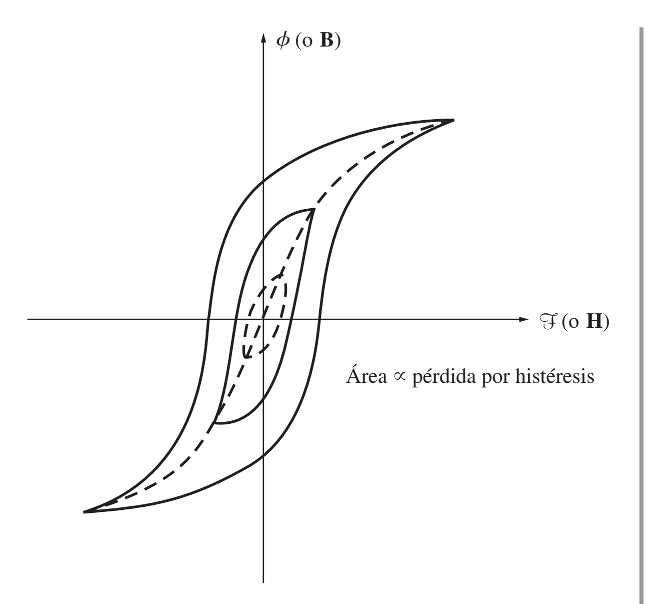


FIGURA 1-13 Efecto del tamaño de las variaciones de la fuerza magnetomotriz en la magnitud de las pérdidas por histéresis.

Como se ha visto, para cambiar la posición de los dominios se requiere de energía, esto origina cierto tipo de pérdidas de energía en todas las máquinas y transformadores. Las *pérdidas por histéresis* en el núcleo del hierro corresponden a la energía que se necesita para reorientar los dominios durante cada ciclo de corriente alterna aplicada al núcleo. Se puede demostrar que el área comprendida dentro de la curva de histéresis, la cual se forma al aplicar corriente alterna, es directamente proporcional a la energía perdida en un ciclo dado de corriente alterna. Cuanto menores sean las variaciones de la fuerza magnetomotriz aplicada al núcleo, el área de la curva será menor y serán más pequeñas las pérdidas resultantes. Este hecho se muestra en la figura 1-13.

En este momento deben mencionarse otro tipo de pérdidas, causadas también por la variación del flujo en el núcleo: las pérdidas por *corrientes parásitas*, las cuales se explicarán posteriormente, una vez que se haya presentado la ley de Faraday. Las pérdidas por histéresis y por corrientes parásitas ocasionan calentamiento en los núcleos y se deben tener en cuenta en el diseño de cualquier máquina o transformador. Puesto que estas pérdidas ocurren dentro del metal del núcleo, se agrupan bajo el nombre de *pérdidas en el núcleo*.

1.5 LEY DE FARADAY: VOLTAJE INDUCIDO POR UN CAMPO MAGNÉTICO VARIABLE

Hasta aquí la atención se ha enfocado en la producción de un campo magnético y sus propiedades. Ahora se examinará cómo un campo magnético puede afectar sus alrededores.

El primer gran efecto que debe considerarse es la *ley de Faraday*, base del funcionamiento del transformador. La ley de Faraday establece que si un flujo atraviesa una espira de alambre conductor, se inducirá en ésta un voltaje directamente proporcional a la *tasa de cambio* del flujo con respecto al tiempo. Esto se expresa mediante la ecuación

$$e_{\text{ind}} = -\frac{d\phi}{dt} \tag{1-35}$$

donde e_{ind} es el voltaje inducido en la espira y ϕ es el flujo que atraviesa la espira. Si una bobina tiene N vueltas y el mismo flujo pasa a través de todas ellas, el voltaje inducido en toda la bobina está dado por

$$e_{\text{ind}} = -N\frac{d\phi}{dt} \tag{1-36}$$

donde

e_{ind} = voltaje inducido en la bobina
N = número de vueltas de alambre en la bobina
ϕ = flujo que circula en la bobina

El signo menos en la ecuación es una expresión de la *ley de Lenz*, la cual establece que la dirección del voltaje inducido en la bobina es tal que si los extremos de ésta estuvieran en cortocircuito, se produciría en ella una corriente que generaría un *flujo opuesto* al flujo inicial. Puesto que el voltaje inducido se opone al cambio que lo produce u origina, se incluye un signo menos en la ecuación (1-36). Para comprender con claridad este concepto, observe la figura 1-14. Si el flujo que se muestra en la figura se *incrementa*, el voltaje que se forma en la bobina tenderá a crear un flujo que se opone a este incremento. Una corriente que fluya como se muestra en la figura 1-14*b*) producirá ese flujo opuesto al incremento, y por ello el voltaje formado en la bobina debe tener la polaridad ade-

cuada para dirigir esta corriente hacia el circuito externo. Entonces, el voltaje deberá formarse con la polaridad indicada en la figura. Puesto que la polaridad del voltaje puede deducirse del análisis físico, el signo menos de las ecuaciones (1-35) y (1-36) se omite frecuentemente, y así se hará en el resto del libro.

FIGURA 1-14 Significado de la ley de Lenz: *a*) Una bobina encierra un flujo magnético creciente. *b*) Determinación de la polaridad del voltaje resultante.

Utilizar la ecuación (1-36) en la práctica presenta una gran dificultad, puesto que establece que hay exactamente la misma cantidad de flujo en cada espira de la bobina. Desafortunadamente, esto no es verdad debido al flujo que se dispersa en los alrededores de la bobina. Si las espiras están estrechamente ligadas, de modo que la mayor parte del flujo que circula en una espira también circula en las demás, la ecuación (1-36) dará respuestas válidas. Pero si la dispersión es significativa o si se requiere la máxima exactitud, se necesitará una expresión diferente que no suponga tal hecho. La magnitud del voltaje en la *i*-ésima espira de la bobina está dada siempre por

$$e_i = \frac{d(\phi_i)}{dt} \tag{1-37}$$

Si hay N espiras en la bobina, el voltaje total en ésta es

$$e_{ind} = \sum_{i=1}^{N} e_i \tag{1-38}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \frac{d(\phi_i)}{dt} \tag{1-39}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} \phi_i\right) \tag{1-40}$$

El término entre paréntesis en la ecuación (1-40) se denomina *flujo concatenado* (o flujo ligado) λ de la bobina. En términos de este flujo, la ley de Faraday puede reescribirse como

$$e_{ind} = \frac{d\lambda}{dt} \tag{1-41}$$

donde

$$\lambda = \sum_{i=1}^{N} \phi_i \qquad \textbf{(1-42)}$$

El flujo concatenado se mide en webers-vuelta.

La ley de Faraday es la propiedad fundamental de los campos magnéticos que intervienen en la operación de los transformadores. El efecto de la ley de Lenz se emplea para predecir la polaridad de los voltajes inducidos en los devanados del transformador.

La ley de Faraday también explica las pérdidas debidas a las corrientes parásitas ya mencionadas. Un flujo variable en el tiempo induce voltaje *dentro* de un núcleo ferromagnético de la misma forma que lo haría en un alambre conductor enrollado alrededor del mismo núcleo. Estos voltajes causan flujos de corrientes que circulan en el núcleo, similares a los remolinos que se observan desde la orilla de un río; por esta razón reciben también el nombre de *corrientes de remolino*. Estas corrientes parásitas disipan energía, puesto que fluyen en un medio resistivo (el hierro del núcleo). La energía disipada se convierte en calor en el núcleo.

La cantidad de energía que se pierde debido a corrientes parásitas depende del tamaño de los remolinos de corriente y de la resistividad del material en el que fluye la corriente. Cuanto mayor sea el tamaño del remolino, mayor será el voltaje inducido resultante (debido al mayor flujo magnético dentro del remolino). Cuanto mayor sea el voltaje inducido, mayor será el flujo de corriente que resulta y, por lo tanto, mayores serán las pérdidas de I^2R. Por otro lado, cuanto mayor sea la resistividad del material que contiene las corrientes, más bajo será el flujo de corriente de un voltaje inducido dado en el remolino.

Estos hechos nos dan dos procedimientos posibles para reducir las pérdidas por corrientes parásitas en un transformador o en una máquina eléctrica. Si un núcleo ferromagnético que puede estar sujeto a flujos magnéticos alternos se divide en muchas pequeñas fajas o *laminaciones*, entonces el tamaño máximo de un remolino de corriente se reducirá, lo cual da como resultado un voltaje inducido reducido, una corriente más baja y menores pérdidas. Esta reducción es aproximadamente proporcional a la anchura de estas laminaciones, de modo que las laminaciones más pequeñas son mejores. El núcleo se construye con muchas de estas laminaciones en paralelo. Se usa una resina aislante entre las fajas, de modo que las trayectorias de corriente de las corrientes parásitas se limitan a áreas muy pequeñas porque las capas aislantes son extremadamente delgadas. Esto reduce las pérdidas por corrientes parásitas con muy poco efecto sobre las propiedades magnéticas del núcleo.

El segundo procedimiento para reducir las pérdidas por corrientes parásitas consiste en aumentar la resistividad del material del núcleo. Esto se consigue a menudo agregando algo de silicio al acero del núcleo. Si la resistencia del núcleo es mayor, las corrientes parásitas serán menores para un flujo magnético dado, así como las pérdidas de I^2R resultantes.

Se pueden usar ya sea laminaciones o materiales de alta resistividad para controlar las corrientes parásitas. En muchos casos, se combinan ambos métodos. Esta combinación puede reducir las pérdidas por corrientes parásitas hasta un punto en que son mucho más pequeñas que las pérdidas por histéresis en el núcleo.

EJEMPLO 1-6

La figura 1-15 muestra una bobina enrollada alrededor de un núcleo de hierro. Si el flujo en el núcleo está dado por la ecuación

$$\phi = 0.05 \text{ sen } 377t \qquad \text{Wb}$$

Si hay 100 espiras en el núcleo, ¿cuánto voltaje se producirá en los terminales de la bobina? ¿Cuál será la polaridad del voltaje durante el tiempo en el que el flujo se *incremente* en la dirección que se muestra en la figura? Suponga que todo el flujo magnético permanece dentro del núcleo (esto es, el flujo disperso es cero).

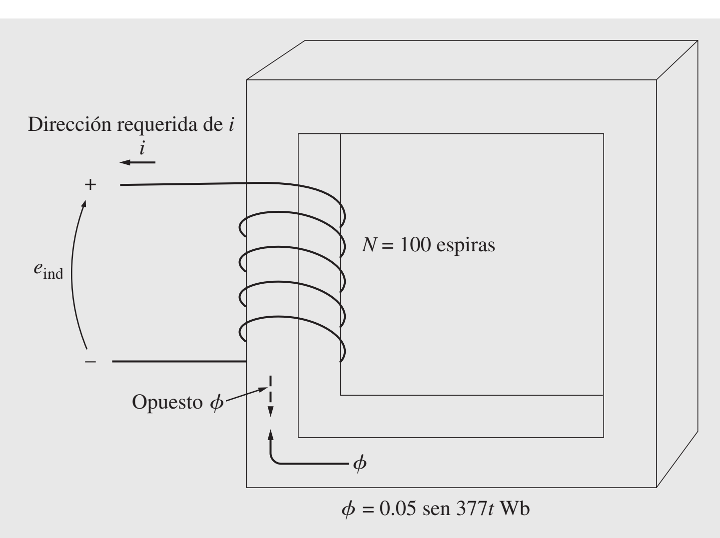


FIGURA 1-15 Núcleo del ejemplo 1-6. Determinación de la polaridad del voltaje en los terminales.

Solución

Siguiendo el mismo razonamiento de las páginas anteriores, conforme se incrementa el flujo en la dirección de referencia, la dirección del voltaje debe ir de positivo a negativo, como se muestra en la figura 1-15. La magnitud del voltaje está dada por

$$e_{ind} = N\frac{d\phi}{dt}$$

$$= (100 \text{ espiras})\frac{d}{dt}(0.05 \text{ sen } 377t)$$

$$= 1\,885 \cos 377t$$

o alternativamente por

$$e_{ind} = 1\,885 \text{ sen}(377t + 90°) \text{ V}$$

1.6 PRODUCCIÓN DE FUERZA INDUCIDA EN UN ALAMBRE

Un segundo efecto importante que produce a su alrededor un campo magnético es que induce una fuerza sobre un alambre conductor que porta corriente y se encuentra dentro del campo. El concepto básico involucrado se ilustra en la figura 1-16, que muestra un conductor dentro de un campo magnético uniforme de densidad de flujo **B** (el cual puede verse que apunta hacia dentro de la página). El conductor mide l metros y porta una corriente de i amperes. La fuerza inducida sobre el conductor está dada por

$$\mathbf{F} = i(\mathbf{l} \times \mathbf{B}) \qquad \textbf{(1-43)}$$

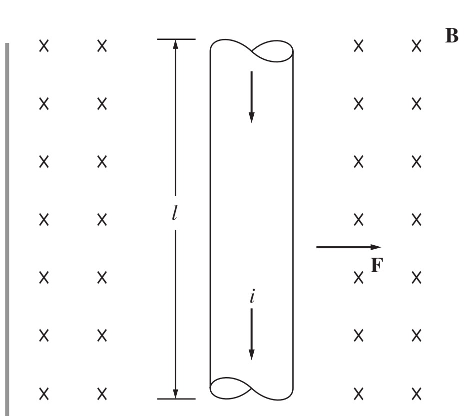


FIGURA 1-16 Alambre que porta corriente en presencia de un campo magnético.

donde

i = magnitud de la corriente en el alambre
l = longitud del alambre, con la dirección de **l** definida como la dirección del flujo de corriente
B = vector de densidad de flujo magnético

La dirección de la fuerza está dada por la regla de la mano derecha: si el dedo índice de la mano derecha apunta en la dirección del vector **l** y el dedo medio apunta

en la dirección del vector de densidad de campo **B**, entonces el dedo pulgar apuntará en dirección de la fuerza resultante sobre el alambre. La magnitud de esta fuerza está dada por la ecuación

$$F = ilB \text{ sen } \theta \tag{1-44}$$

donde θ es el ángulo comprendido entre el alambre y el vector de densidad de flujo.

EJEMPLO 1-7

La figura 1-16 muestra un alambre que porta corriente en presencia de un campo magnético. La densidad de flujo del campo es de 0.25 T, dirigida hacia dentro de la página. Si el alambre tiene 1.0 m de longitud y porta una corriente de 0.5 A en dirección de arriba hacia abajo de la página, ¿cuál es la magnitud y dirección de la fuerza inducida sobre el alambre?

Solución

La dirección de la fuerza está dada por la regla de la mano derecha, es decir, la dirección de la fuerza apunta hacia la derecha. La magnitud está dada por

$$\begin{aligned} F &= ilB \text{ sen } \theta \qquad \text{(1-44)} \\ &= (0.5 \text{ A})(1.0 \text{ m})(0.25 \text{ T}) \text{ sen } 90° = 0.125 \text{ N} \end{aligned}$$

Entonces

$$\mathbf{F} = 0.125 \text{ N, dirigida a la derecha}$$

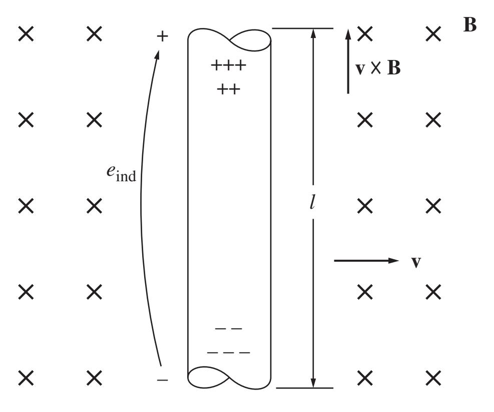


FIGURA 1-17 Conductor que se mueve en presencia de un campo magnético.

La inducción de una fuerza en un alambre conductor que porta corriente en presencia de un campo magnético es la base de la *acción motor*. Casi todo tipo de motor se basa en este principio básico de las fuerzas y pares que lo mueven.

1.7 VOLTAJE INDUCIDO EN UN CONDUCTOR QUE SE MUEVE EN UN CAMPO MAGNÉTICO

Hay una tercera forma importante de interacción entre un campo magnético y su alrededor. Si un alambre conductor orientado de manera adecuada se desplaza a través de un campo magnético, se induce un voltaje en él. Esta idea se ilustra en la figura 1-17. El voltaje inducido en el alambre está dado por

$$e_{\text{ind}} = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{l} \tag{1-45}$$

donde

$\mathbf{v}$ = velocidad del alambre
$\mathbf{B}$ = vector de densidad de flujo magnético
$\mathbf{l}$ = longitud del conductor en el campo magnético

El vector **l** apunta hacia el extremo del alambre que forma el ángulo más pequeño con respecto al vector $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. El voltaje en el alambre se inducirá de modo que su extremo positivo esté en la dirección del vector $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Los siguientes ejemplos ilustran este concepto.

EJEMPLO 1-8

La figura 1-17 muestra un conductor que se mueve en presencia de un campo magnético a una velocidad de 5.0 m/s hacia la derecha. La densidad de flujo es de 0.5 T dirigida hacia la página, y el alambre tiene 1.0 m de longitud, el cual se orienta según se observa en la figura 1-17. ¿Cuáles son la magnitud y la polaridad del voltaje inducido resultante?

Solución

La dirección de la cantidad **v** × **B** en este ejemplo es ascendente. Entonces, el voltaje del conductor será positivo en la parte superior del alambre. La dirección del vector **l** es ascendente, de modo que forma el menor ángulo con el vector **v** × **B**.

Puesto que **v** es perpendicular a **B** y como **v** × **B** es paralelo a **l**, la magnitud del voltaje inducido se reduce a

$$\begin{aligned} e_{ind} &= (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \bullet \mathbf{l} \qquad \textbf{(1-45)} \\ &= (vB \text{ sen } 90°)\, l \cos 0° \\ &= vBl \\ &= (5.0 \text{ m/s})(0.5 \text{ T})(1.0 \text{ m}) \\ &= 2.5 \text{ V} \end{aligned}$$

Por lo tanto, el voltaje inducido es de 2.5 V, y positivo en la parte superior del alambre.

EJEMPLO 1-9

La figura 1-18 muestra un conductor que se mueve en presencia de un campo magnético a una velocidad de 10 m/s hacia la derecha. La densidad de flujo magnético es de 0.5 T hacia afuera de la página y el alambre tiene 1.0 m de longitud, el cual está orientado según se observa en la figura 1-18. ¿Cuáles son la magnitud y la polaridad del voltaje inducido resultante?

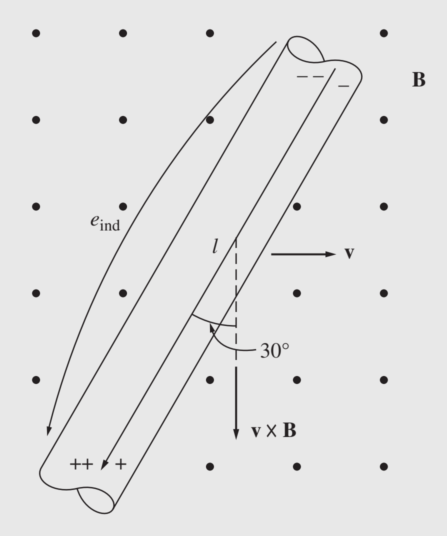


FIGURA 1-18 Conductor del ejemplo 1-9.

Solución

La dirección de la cantidad **v** × **B** es descendente. El alambre no está orientado en una línea vertical; en consecuencia, escoja la dirección de **l** como se muestra en la figura, de modo que forme el ángulo mínimo posible con la dirección de **v** × **B**. El voltaje es positivo en la parte inferior del alambre. La magnitud del voltaje es

$$\begin{aligned} e_{ind} &= (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \bullet \mathbf{l} \qquad \textbf{(1-45)} \\ &= (vB \text{ sen } 90°)\, l \cos 30° \\ &= (10.0 \text{ m/s})(0.5 \text{ T})(1.0 \text{ m}) \cos 30° \\ &= 4.33 \text{ V} \end{aligned}$$

La inducción de voltaje en un alambre conductor que se mueve dentro de un campo magnético es el fundamento de la operación de todo tipo de generadores. Por esta razón, se le llama *acción generador*.

1.8 EJEMPLO SENCILLO DE UNA MÁQUINA LINEAL DE CORRIENTE DIRECTA

La *máquina lineal de corriente directa* es la versión más sencilla y fácil de entender de una máquina de cd, ya que opera con los mismos principios y presenta la misma conducta que los generadores y los motores reales. Por ello sirve como un buen punto de partida en el estudio de las máquinas.

La figura 1-19 muestra una máquina lineal de cd, que consta de una batería y una resistencia conectadas a través de un interruptor a un par de rieles lisos, sin rozamiento. En el lecho de esta "vía férrea" hay un campo magnético constante de densidad uniforme, dirigido hacia dentro de la página. Sobre esta pista se dispone una barra de metal.

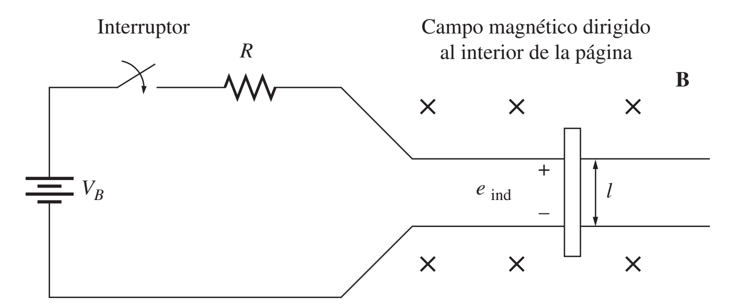


FIGURA 1-19 Máquina lineal de cd. El campo magnético apunta hacia la página.

¿Cómo se comporta este dispositivo tan extraño? Se puede explicar su comportamiento si se le aplican a la máquina cuatro ecuaciones básicas. Éstas son:

1. La ecuación para la fuerza aplicada al alambre conductor en presencia de un campo magnético:

$$\mathbf{F} = i(\mathbf{l} \times \mathbf{B}) \tag{1-43}$$

donde

$\mathbf{F}$ = fuerza aplicada al alambre
i = magnitud de la corriente en el alambre
$\mathbf{l}$ = longitud del alambre; la dirección de **l** está definida por el flujo de corriente
$\mathbf{B}$ = vector de densidad de flujo magnético

2. La ecuación del voltaje inducido en un alambre conductor que se mueve en un campo magnético:

$$e_{\text{ind}} = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{l} \tag{1-45}$$

donde

e_{ind} = voltaje inducido en el conductor
$\mathbf{v}$ = velocidad en el alambre
$\mathbf{B}$ = vector de densidad de flujo magnético
$\mathbf{l}$ = longitud del conductor en el campo magnético

3. La ley de voltaje de Kirchhoff de esta máquina. En la figura 1-19 puede apreciarse la aplicación de esta ley, la cual establece que:

$$V_B - iR - e_{\text{ind}} = 0$$

$$V_B = e_{\text{ind}} + iR = 0 \tag{1-46}$$

4. La ley de Newton de la barra que se mueve sobre la vía:

$$F_{\text{neta}} = ma \tag{1-7}$$

Ahora se explorará la conducta fundamental de esta máquina de cd sencilla, para lo cual se utilizarán como herramientas estas cuatro ecuaciones.

Arranque de la máquina lineal de corriente directa

La figura 1-20 muestra la máquina lineal de cd en condiciones de arranque. Para ponerla en marcha, simplemente se cierra el interruptor y fluirá la corriente en la barra, la cual está dada por la ley de voltaje de Kirchhoff:

$$i = \frac{V_B - e_{\text{ind}}}{R} \tag{1-47}$$

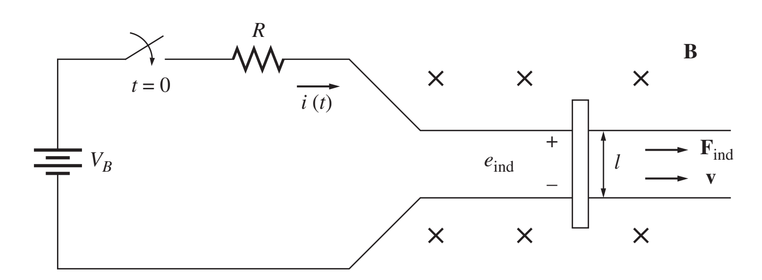


FIGURA 1-20 Arranque de una máquina lineal de cd.

Puesto que la barra se encuentra inicialmente en reposo, $e_{\text{ind}} = 0$, entonces $i = V_B/R$. La corriente fluye hacia abajo a través de la barra y los rieles. Pero según la ecuación (1-43), una corriente que fluye en un conductor que se encuentra dentro de un campo magnético induce una fuerza en el conductor. Debido a la geometría de la máquina, esta fuerza es

$$F_{\text{ind}} = ilB \qquad \text{hacia la derecha} \tag{1-48}$$

Entonces, la barra se acelerará hacia la derecha (por la ley de Newton). Sin embargo, al incrementar la velocidad de la barra se induce un voltaje en ella. El voltaje está dado por la ecuación (1-45), que de acuerdo con la geometría se reduce a

$$e_{\text{ind}} = vBl \qquad \text{positivo hacia arriba} \tag{1-49}$$

El voltaje reduce la corriente que fluye en la barra, puesto que, de acuerdo con la ley de voltaje de Kirchhoff

$$i\downarrow = \frac{V_B - e_{\text{ind}}\uparrow}{R} \tag{1-47}$$

En tanto se incremente e_{ind}, la corriente i decrece.

El resultado de esta acción es que la barra alcanzará una velocidad constante de estado estacionario, donde la fuerza neta sobre la barra es cero. Esto ocurrirá cuando e_{ind} alcance un valor tal que iguale al voltaje V_B. En ese momento, la barra se moverá a una velocidad dada por

$$V_B = e_{\text{ind}} = v_{\text{ee}}Bl$$
$$v_{\text{ee}} = \frac{V_B}{Bl} \tag{1-50}$$

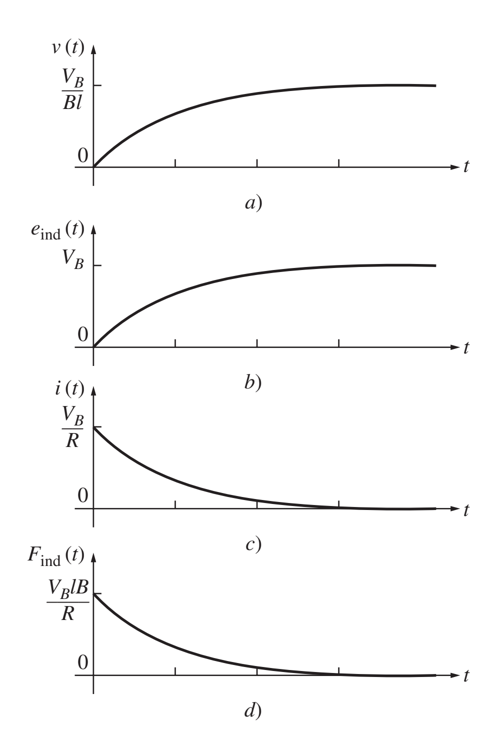


FIGURA 1-21 Máquina lineal de cd en el arranque. *a*) Velocidad $v(t)$ como función del tiempo. *b*) Voltaje inducido $e_{ind}(t)$. *c*) Corriente $i(t)$. *d*) Fuerza inducida $F_{ind}(t)$.

La barra continuará deslizándose a esta velocidad de vacío (sin carga) a menos que alguna fuerza exterior la altere. En la figura 1-21 se muestra la velocidad v, el voltaje inducido e_{ind}, la corriente i y la fuerza inducida F_{ind} cuando el motor está en marcha.

En resumen, el comportamiento durante el arranque de la máquina lineal de cd es el siguiente:

1. El cierre del interruptor produce un flujo de corriente $i = V_B/R$.
2. El flujo de corriente produce una fuerza en la barra, dada por $F = ilB$.
3. La barra se acelera hacia la derecha induciéndose en ella un voltaje e_{ind} a medida que se incrementa la velocidad.
4. El voltaje inducido reduce la corriente que fluye por la barra $i = (V_B - e_{ind}\uparrow)/R$.
5. La fuerza inducida entonces decrece ($F = i\downarrow lB$) hasta hacerse $F = 0$. En este momento, $e_{ind} = V_B$, $i = 0$, y la barra se mueve a velocidad de vacío constante $v_{ee} = V_B/Bl$.

Éste es el comportamiento observado en los motores reales durante el arranque.

La máquina lineal de corriente directa como motor

Suponga que la máquina lineal opera inicialmente en estado estacionario en vacío como el descrito con anterioridad. ¿Qué le ocurrirá a esta máquina si se le aplica una carga externa? Para responder examine la figura 1-22. Aquí se aplica a la barra una fuerza $\mathbf{F}_{carga}$ en dirección opuesta al movimiento. Puesto que la barra en un principio se encontraba en estado estacionario, la aplicación de esta fuerza $\mathbf{F}_{carga}$ originará una fuerza neta sobre la barra en dirección *opuesta* a la del movimiento ($\mathbf{F}_{neta} = \mathbf{F}_{carga} - \mathbf{F}_{ind}$). El efecto de esta fuerza disminuirá la velocidad del movimiento de la barra, pero tan pronto como la barra comienza a disminuir su velocidad, el voltaje inducido en ella cae ($e_{ind} = v\downarrow Bl$). Como el voltaje inducido decrece, el flujo de corriente en la barra se incrementa:

$$i\uparrow = \frac{V_B - e_{ind}\downarrow}{R} \qquad \textbf{(1-47)}$$

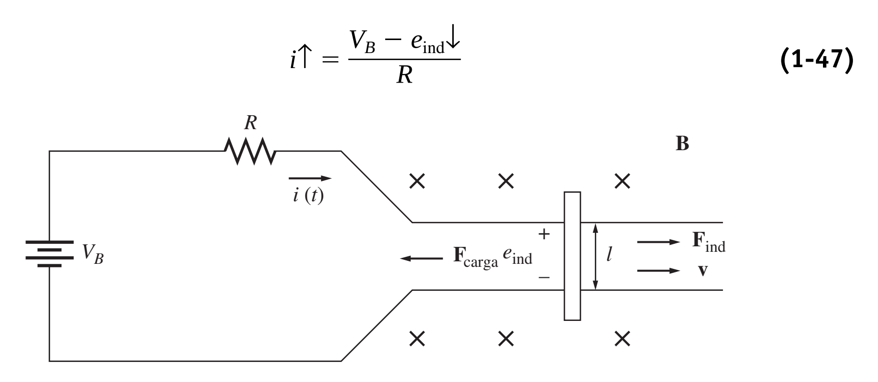


FIGURA 1-22 Máquina lineal de cd como motor.

Entonces, la fuerza inducida también se incrementa ($F_{ind} = i\uparrow lB$). El resultado total de esta cadena de acontecimientos es que la fuerza inducida crece hasta que se hace igual y opuesta a la fuerza de la carga, y la barra de nuevo viajará en estado estacionario, pero a una velocidad inferior. En la figura 1-23 se muestran la velocidad v, el voltaje inducido e_{ind}, la corriente i y la fuerza inducida F_{ind} cuando se coloca carga a la barra.

Ahora hay una fuerza inducida en la dirección del movimiento de la barra, y *la potencia eléctrica se convierte en potencia mecánica* para mantener a la barra en movimiento. La potencia convertida es

$$P_{conv} = e_{ind}i = F_{ind}v \qquad \textbf{(1-51)}$$

La barra consume una cantidad de potencia eléctrica igual a $e_{\text{ind}}i$, reemplazada por potencia mecánica igual a $F_{\text{ind}}v$. Puesto que la potencia se convierte de eléctrica a mecánica, esta barra funciona como un *motor*.

El resumen de este comportamiento es:

1. Al aplicar una fuerza $\mathbf{F}_{\text{carga}}$ en dirección opuesta al movimiento resulta una fuerza neta $\mathbf{F}_{\text{neta}}$ opuesta a la dirección del movimiento.
2. La aceleración resultante $a = F_{\text{neta}}/m$ es negativa, de modo que la barra disminuye la velocidad ($v\downarrow$).
3. El voltaje $e_{\text{ind}} = v\downarrow Bl$ cae, entonces $i = (V_B - e_{\text{ind}}\downarrow)/R$ se incrementa.
4. La fuerza inducida $F_{\text{ind}} = i\uparrow lB$ se incrementa a una velocidad menor v hasta que $|\mathbf{F}_{\text{ind}}| = |\mathbf{F}_{\text{carga}}|$.
5. Una cantidad de potencia eléctrica igual a $e_{\text{ind}}i$ se convierte en potencia mecánica igual a $F_{\text{ind}}v$, y la máquina opera como un motor.

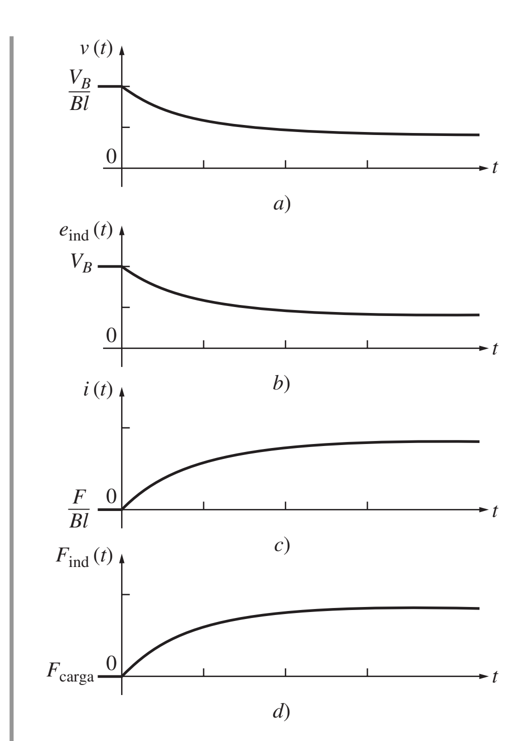


FIGURA 1-23 Máquina lineal de cd operando en condiciones de vacío y luego cargada como un motor. *a*) Velocidad $v(t)$ como función del tiempo. *b*) Voltaje inducido $e_{\text{ind}}(t)$. *c*) Corriente $i(t)$. *d*) Fuerza inducida $F_{\text{ind}}(t)$.

Un motor de cd real se comporta de manera análoga cuando se carga: cuando se coloca una carga en su eje, el motor comienza a disminuir la velocidad, con lo cual se reduce su voltaje interno y se incrementa el flujo de corriente. Este incremento del flujo de corriente aumenta el par inducido, el cual igualará al par de carga del motor a una nueva velocidad más baja.

Note que la potencia eléctrica convertida en potencia mecánica por este motor lineal está dada por la ecuación $P_{\text{conv}} = F_{\text{ind}}v$. La potencia eléctrica convertida en potencia mecánica en un motor giratorio real está dada por la ecuación

$$P_{\text{conv}} = \tau_{\text{ind}}\omega \tag{1-52}$$

donde el par inducido τ_{ind} es el análogo rotacional de la fuerza inducida F_{ind}, y la velocidad angular ω es el análogo rotacional de la velocidad lineal v.

La máquina lineal de corriente directa como generador

Suponga que la máquina lineal opera de nuevo en condiciones de vacío en estado estacionario. Observe qué ocurre al aplicar una fuerza *en la dirección del movimiento*.

La figura 1-24 muestra la máquina lineal con una fuerza aplicada $\mathbf{F}_{\text{ap}}$ en la dirección del movimiento. Ahora, la fuerza aplicada hará que la barra se acelere en la dirección del movimiento, y la velocidad v de la barra se incrementará. Cuando la velocidad se incrementa, $e_{\text{ind}} = v\uparrow Bl$ aumenta y será mayor que el voltaje de la batería V_B. Cuando $e_{\text{ind}} > V_B$, la corriente se invierte y está dada por la ecuación

$$i = \frac{e_{\text{ind}} - V_B}{R} \tag{1-53}$$

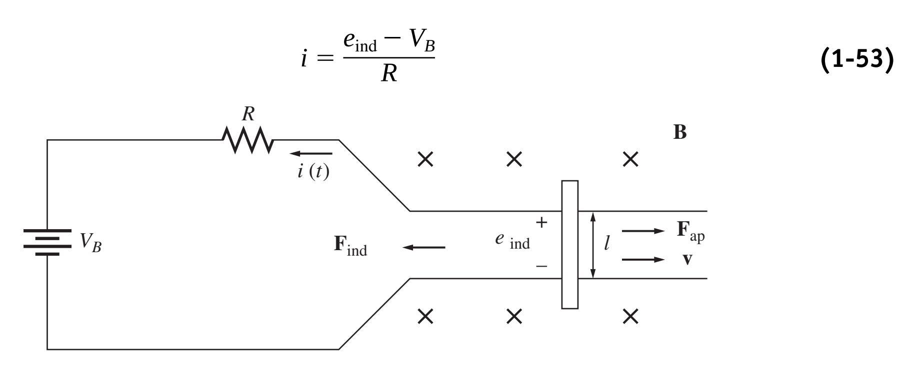


FIGURA 1-24 Máquina lineal de cd como generador.

Puesto que esta corriente fluye ahora hacia *arriba* de la barra, en ésta se induce una fuerza dada por

$$F_{\text{ind}} = ilB \quad \text{hacia la izquierda} \tag{1-54}$$

La dirección de la fuerza inducida está dada por la regla de la mano derecha. Esta fuerza inducida se opone a la fuerza aplicada sobre la barra.

Finalmente, la fuerza inducida será igual y opuesta a la fuerza aplicada, y la barra se moverá a una velocidad *mayor* que antes. Note que ahora *se está cargando la batería*. La máquina lineal actúa ahora como generador, convirtiendo la potencia mecánica $F_{ind}v$ en potencia eléctrica $e_{ind}i$.

El resumen de este comportamiento es:

1. Si se aplica una fuerza $\mathbf{F}_{ap}$ en la dirección del movimiento, $\mathbf{F}_{neta}$ actúa en la dirección del movimiento.
2. Si la aceleración $a = F_{neta}/m$ es positiva, la velocidad de la barra aumenta ($v\uparrow$).
3. El voltaje $e_{ind} = v\uparrow Bl$ se incrementa, y también se incrementa $i = (e_{ind}\uparrow - V_B)/R$.
4. La fuerza inducida $F_{ind} = i\uparrow lB$ se incrementa a una velocidad mayor v hasta que $|\mathbf{F}_{ind}| = |\mathbf{F}_{carga}|$.
5. Al convertir una cantidad de potencia mecánica igual a $F_{ind}v$ en potencia eléctrica $e_{ind}i$, la máquina opera como generador.

Un generador real se comporta de esta forma: al aplicar un par al eje *en la dirección del movimiento*, la velocidad del eje se incrementa, el voltaje interno aumenta y fluye corriente desde el generador hacia la carga. La cantidad de potencia mecánica convertida en potencia eléctrica en el generador rotatorio real está dada por la ecuación (1-52):

$$P_{conv} = \tau_{ind}\omega \tag{1-52}$$

Es interesante observar el hecho de que la misma máquina opere *como motor y como generador*. La única diferencia entre las dos opciones es que, en uno de los casos, la fuerza externa que se aplica tiene la misma dirección del movimiento (generador), y en el otro caso tiene dirección contraria al movimiento (motor). En electricidad, cuando $e_{ind} > V_B$, la máquina actúa como generador, y cuando $e_{ind} < V_B$, la máquina actúa como motor. Así la máquina opere como motor o como generador, tanto la fuerza inducida (acción motriz) como el voltaje inducido (acción generatriz) se encuentran presentes todo el tiempo. En general, esto es cierto para todas las máquinas: ambas acciones están presentes, pero sólo las direcciones relativas de las fuerzas externas, aplicadas con respecto a la dirección del movimiento, determinan si la máquina opera como motor o como generador.

Debe examinarse otro hecho muy interesante: cuando esta máquina actuó como generador se movió más rápidamente; cuando actuó como motor se movió de manera más lenta. No obstante, fuera como motor o como generador, siempre se movió en la misma dirección. Muchos estudiantes principiantes esperan que la misma máquina gire en un sentido como generador y en otro como motor. Esto *no ocurre* porque simplemente se presenta un pequeño cambio en la velocidad de operación, así como una inversión en el flujo de la corriente.

Problemas con el arranque en la máquina de corriente directa lineal

En la figura 1-25 se muestra una máquina lineal que está alimentada por una fuente de 250 V y su resistencia interna R es de aproximadamente 0.10 Ω (la resistencia R sirve como representación de la resistencia interna de una máquina de cd real y está razonablemente aproximada a la resistencia interna de un motor de cd de tamaño mediano).

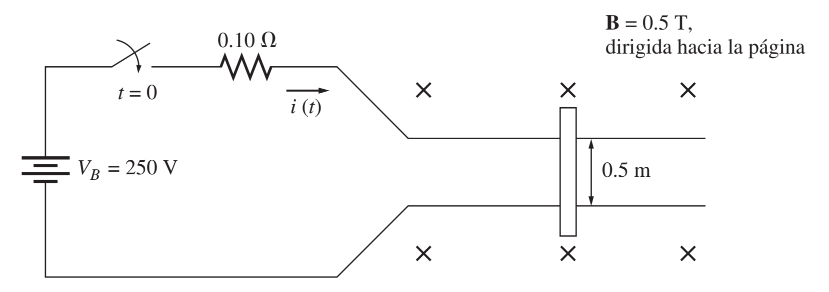


FIGURA 1-25 Máquina lineal de cd con los valores de los componentes para ilustrar el problema de la corriente de arranque excesiva.

Si consideráramos reales los números de esta figura, surgiría un gran problema con las máquinas (y con su modelo lineal simple). En condiciones de arranque, la velocidad de la barra es cero y por lo tanto $e_{\text{ind}} = 0$. La corriente que fluye en el arranque es

$$i_{\text{arranque}} = \frac{V_B}{R} = \frac{250\ V}{0.1\ \Omega} = 2\ 500\ \text{A}$$

Esta corriente es muy alta y sobrepasa, con frecuencia, 10 veces la corriente nominal de la máquina. Tal corriente puede causar daños severos a un motor. Tanto las máquinas de cd como las máquinas de ca reales presentan problemas debidos a las altas corrientes de arranque.

¿Cómo pueden prevenirse tales daños? El método más sencillo para proteger esta máquina lineal es insertar una resistencia extra que limite la corriente durante el arranque hasta que e_{ind} aumente lo suficiente para limitarla. La figura 1-26 muestra una resistencia de arranque insertada en el circuito de la máquina.

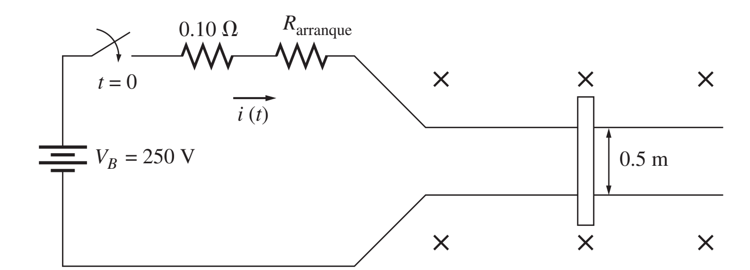


FIGURA 1-26 Máquina lineal de cd con una resistencia adicional en serie para controlar la corriente de arranque.

El mismo problema se presenta en las máquinas de cd reales y se maneja de la misma forma: se inserta una resistencia en el circuito de la armadura del motor durante el arranque. En las máquinas reales de corriente alterna, las altas corrientes de arranque se controlan en forma diferente, cuyo método se describirá en el capítulo 6.

EJEMPLO 1-10

La máquina lineal de cd que se muestra en la figura 1-27*a*) tiene una batería cuyo voltaje es de 120 V, una resistencia interna de 0.3 Ω y un campo magnético de densidad 0.1 T.

a) ¿Cuál es la corriente máxima de arranque de esta máquina? ¿Cuál es su velocidad de vacío en estado estacionario?
b) Si sobre la barra se aplica una fuerza de 30 N dirigida hacia la derecha, ¿cuál será la velocidad en estado estacionario? ¿Cuánta potencia producirá o consumirá la barra? ¿Cuánta potencia producirá o consumirá la batería? Explique la diferencia entre estos dos casos. ¿La máquina actúa como motor o como generador?
c) Ahora suponga que se aplica a la barra una fuerza de 30 N dirigida hacia la izquierda. ¿Cuál será la nueva velocidad en estado estacionario? ¿Es esta máquina un motor o un generador?
d) Si se aplica a la barra una fuerza dirigida hacia la izquierda, calcule la velocidad de la barra como una función de la fuerza para valores entre 0 N y 50 N en múltiplos de 10 N. Dibuje una gráfica de la velocidad de la barra frente a la fuerza aplicada.
e) Si la barra se encuentra en vacío y se introduce de repente en una región en que el campo magnético decrece hasta 0.08 T, ¿a qué velocidad se desplazará la barra?

Solución

a) En condiciones de arranque, la velocidad de la barra es 0, por lo cual $e_{\text{ind}} = 0$. Entonces,

$$i = \frac{V_B - e_{\text{ind}}}{R} = \frac{120\ \text{V} - 0\ \text{V}}{0.3\ \Omega} = 400\ \text{A}$$

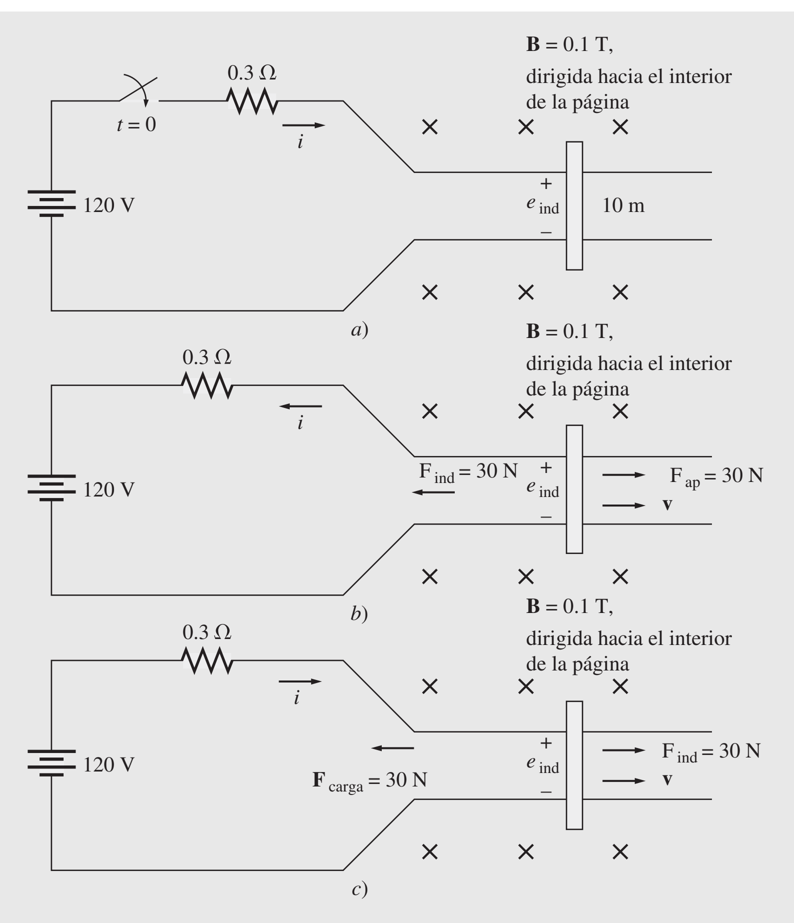


FIGURA 1-27 Máquina lineal de cd del ejemplo 1-10. *a*) Condiciones de arranque. *b*) Operando como generador. *c*) Operando como motor.

Cuando la máquina alcanza su estado estacionario, $\mathbf{F}_{\text{ind}} = 0$ e $i = 0$. Entonces,

$$VB = e_{\text{ind}} = v_{\text{ee}}Bl$$
$$v_{\text{ee}} = \frac{V_B}{Bl}$$
$$= \frac{120 \text{ V}}{(0.1 \text{ T})(10 \text{ m})} = 120 \text{ m/s}$$

b) Con referencia a la figura 1-27*b*), si se aplica a la barra una fuerza de 30 N dirigida hacia la derecha, el estado estacionario final ocurrirá cuando la fuerza inducida $\mathbf{F}_{\text{ind}}$ sea igual y opuesta a la fuerza aplicada $\mathbf{F}_{\text{ap}}$, de modo que la fuerza neta aplicada a la barra es cero:

$$F_{\text{ap}} = F_{\text{ind}} = ilB$$

Entonces,

$$i = \frac{F_{\text{ind}}}{lB} = \frac{30 \text{ N}}{(10 \text{ m})(0.1 \text{ T})}$$
$$= 30 \text{ A} \quad \text{fluye hacia arriba de la barra}$$

El voltaje inducido e_{ind} sobre la barra debe ser

$$e_{\text{ind}} = V_B + iR$$
$$= 120 \text{ V} + (30\text{A})(0.3\ \Omega) = 129 \text{ V}$$

y la velocidad en estado estacionario final será

$$v_{ee} = \frac{e_{ind}}{Bl}$$
$$= \frac{129 \text{ V}}{(0.1 \text{ T})(10 \text{ m})} = 129 \text{ m/s}$$

La barra *produce* $P = (129 \text{ V})(30 \text{ A}) = 3\,870$ W de potencia, y la batería *consume* $P = (120 \text{ V})(30 \text{ A}) = 3\,600$ W. La diferencia entre estas dos cantidades, 270 W, corresponde a las pérdidas por la resistencia. Esta máquina actúa como *generador*.

c) Con referencia a la figura 1-25*c*), la fuerza aplicada está dirigida hacia la izquierda y la fuerza inducida hacia la derecha. En estado estacionario,

$$F_{ap} = F_{ind} = ilB$$
$$i = \frac{F_{ind}}{lB} = \frac{30 \text{ N}}{(10 \text{ m})(0.1 \text{ T})}$$
$$= 30 \text{ A} \quad \text{fluye hacia abajo de la barra}$$

El voltaje inducido e_{ind} sobre la barra será

$$e_{ind} = V_B - iR$$
$$= 120 \text{ V} - (30 \text{ A})(0.3\ \Omega) = 111 \text{ V}$$

y la velocidad final será

$$v_{ee} = \frac{e_{ind}}{Bl}$$
$$= \frac{111 \text{ V}}{(0.1 \text{ T})(10 \text{ m})} = 111 \text{ m/s}$$

Esta máquina ahora actúa como un *motor*, es decir, convierte energía eléctrica de la batería en energía mecánica de movimiento en la barra.

d) Este ejercicio es adecuado para utilizar el cálculo vectorial en el MATLAB y determinar la velocidad de la barra para cada valor de fuerza aplicada. El código MATLAB para realizar estos cálculos es una versión de los pasos efectuados manualmente en el inciso *c*). Como se muestra a continuación, el programa calcula la corriente, el voltaje inducido y la velocidad, en ese orden, y hace una gráfica de la velocidad frente a la fuerza aplicada en la barra.

```
% Archivo - M ex1_10.m
% Archivo M para calcular y hacer una gráfica de la velocidad de
% un motor lineal como una función de la carga
VB = 120;                        % Voltaje de la batería (V)
r = 0.3;                         % Resistencia (ohms)
l = 1;                           % Longitud de la barra (m)
B = 0.6;                         % Densidad de flujo (T)

% Seleccionar las fuerzas que se aplicarán a la barra
F = 0:10:50;                     % Fuerza (N)

% Calcular la corriente que fluye en el motor
i = F ./ (1 * B);                % Corriente (A)

% Calcular los voltajes inducidos en la barra
eind = VB - i . * r;             % Voltaje inducido (V)

% Calcular la velocidad de la barra
v_bar = eind ./ (l * B);         % Velocidad (m/s)
```

```
% Gráfica de la velocidad de la barra contra la fuerza
plot (F, V_bar);
title ('Gráfico de velocidad contra fuerza aplicada');
xlabel ('Fuerza (N)') ;
ylabel ('Velocidad (m/s)') ;
axis ([0 50 0 200]);
```

La gráfica resultante se muestra en la figura 1-28. Note que la barra disminuye la velocidad a medida que se incrementa la carga.

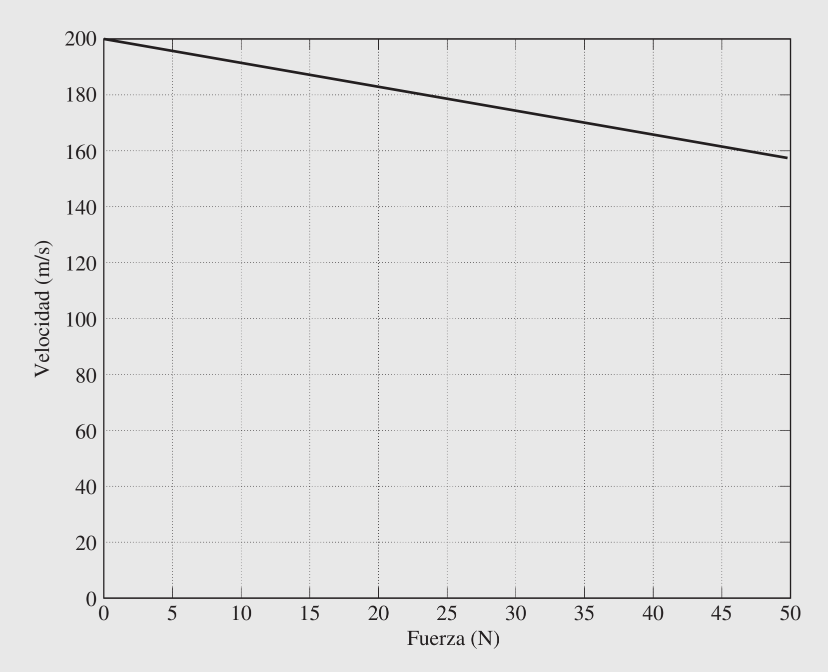


FIGURA 1-28 Gráfica de la velocidad frente a la fuerza de una máquina lineal de cd.

e) Si la barra se encuentra inicialmente en vacío, entonces $e_{\text{ind}} = V_B$. Si la barra irrumpe de manera repentina en una región donde el campo magnético esté decreciendo, ocurrirá un estado transitorio. Una vez que pase este estado, e_{ind} será nuevamente igual a V_B.

Este hecho puede utilizarse para determinar la velocidad final de la barra. La *velocidad inicial* era de 120 m/s. La *velocidad final* es

$$VB = e_{\text{ind}} = v_{\text{ee}}Bl$$

$$v_{\text{ee}} = \frac{V_B}{Bl}$$

$$= \frac{120 \text{ V}}{(0.08 \text{ T})(10 \text{ m})} = 150 \text{ m/s}$$

Por lo tanto, cuando el flujo decae en el motor lineal, la barra aumenta su velocidad. En los motores de cd reales se presenta el mismo comportamiento, esto es, cuando el flujo del campo magnético del motor de cd decae, el motor gira más rápido. Aquí, de nuevo, la máquina lineal se comporta de manera muy similar al motor de cd real.

1.9 POTENCIAS REAL, REACTIVA Y APARENTE EN LOS CIRCUITOS DE CORRIENTE ALTERNA

En esta sección se describe la relación entre la potencia real, reactiva y aparente en circuitos de ca monofásicos. En el apéndice A se encuentra un análisis similar de los circuitos trifásicos de ca.

En un circuito de cd, tal como el que se muestra en la figura 1-29*a*), la potencia suministrada a la carga de cd es simplemente el producto del voltaje a través de la carga y el flujo de corriente que pasa por ella.

$$P = VI \tag{1-55}$$

Desafortunadamente, la situación en los circuitos de ca sinusoidales es más compleja, debido a que puede haber una diferencia de fase entre el voltaje y la corriente de ca suministrada a la carga. La potencia *instantánea* que se proporciona a una carga de ca también es el producto del voltaje y de la corriente instantáneos, pero la potencia *promedio* suministrada a la carga se ve afectada por el ángulo de fase entre el voltaje y la corriente. Ahora se explorarán los efectos de esta diferencia de fase en la potencia promedio suministrada a una carga de ca.

La figura 1-29*b*) muestra una fuente de voltaje monofásico que proporciona potencia a una carga monofásica con una impedancia de $\mathbf{Z} = Z \angle \theta\,\Omega$. Si se supone que la carga es inductiva, entonces el ángulo de impedancia θ de la carga será positivo, y la corriente estará θ grados atrasada con respecto al voltaje.

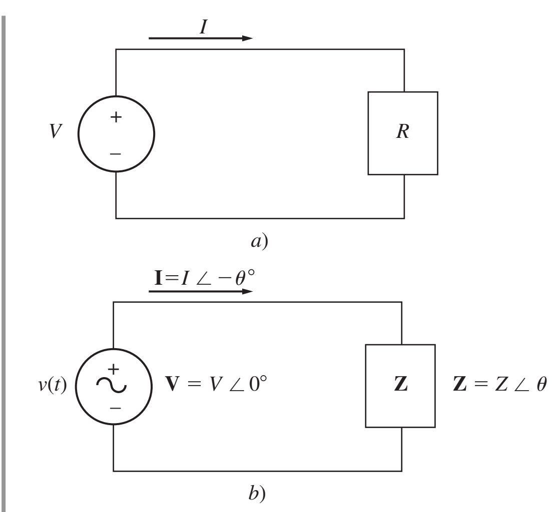


FIGURA 1-29 *a*) Una fuente de voltaje de cd que actúa sobre una carga con resistencia *R*. *b*) Una fuente de voltaje de ca que actúa sobre una carga con impedancia $\mathbf{Z} = Z \angle \theta\,\Omega$.

El voltaje suministrado a esta carga es

$$v(t) = \sqrt{2}V \cos \omega t \tag{1-56}$$

donde V es el valor rms (valor eficaz del voltaje o corriente) del voltaje suministrado a la carga, y el flujo de corriente resultante es

$$i(t) = \sqrt{2}I \cos(\omega t - \theta) \tag{1-57}$$

donde I es el valor rms de la corriente que fluye a través de la carga.

La potencia instantánea que se suministra a esta carga en el tiempo t es

$$p(t) = v(t)i(t) = 2VI \cos \omega t \cos(\omega t - \theta) \tag{1-58}$$

El ángulo θ en esta ecuación es el *ángulo de impedancia* de la carga. Para cargas inductivas, el ángulo de impedancia es positivo, y la corriente en forma de ondas está θ grados retrasada con respecto al voltaje en forma de ondas.

Si se aplican las identidades trigonométricas a la ecuación (1-58) se puede despejar hasta llegar a una expresión con la forma

$$p(t) = VI \cos \theta\,(1 + \cos 2\omega t) + VI \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} 2\omega t \tag{1-59}$$

El primer término de esta ecuación representa la potencia suministrada a la carga por el componente de la corriente que está *en fase* con el voltaje, mientras que el segundo término representa la potencia suministrada a la carga por el componente de la corriente que está *90° fuera de fase* con el voltaje. La figura 1-30 muestra la gráfica de los componentes de esta ecuación.

Nótese que el *primer* término de la expresión de potencia instantánea siempre es positivo, pero produce pulsos de potencia en lugar de un valor constante. El valor promedio de este término es

$$P = VI \cos \theta \tag{1-60}$$

que es la potencia *promedio* o *real* (P) suministrada a la carga en el término 1 de la ecuación (1-59). Las unidades de la potencia real son watts (W), donde 1 W = 1 V × 1 A.

Nótese que el *segundo* término de la expresión de potencia instantánea es positivo la mitad del tiempo y negativo la otra mitad, así que *la potencia promedio suministrada por este término es cero*. Este término representa la potencia que se transfiere primero de la fuente a la carga, y luego regresa de la carga a la fuente. La potencia que se intercambia de manera continua entre la fuente y la carga

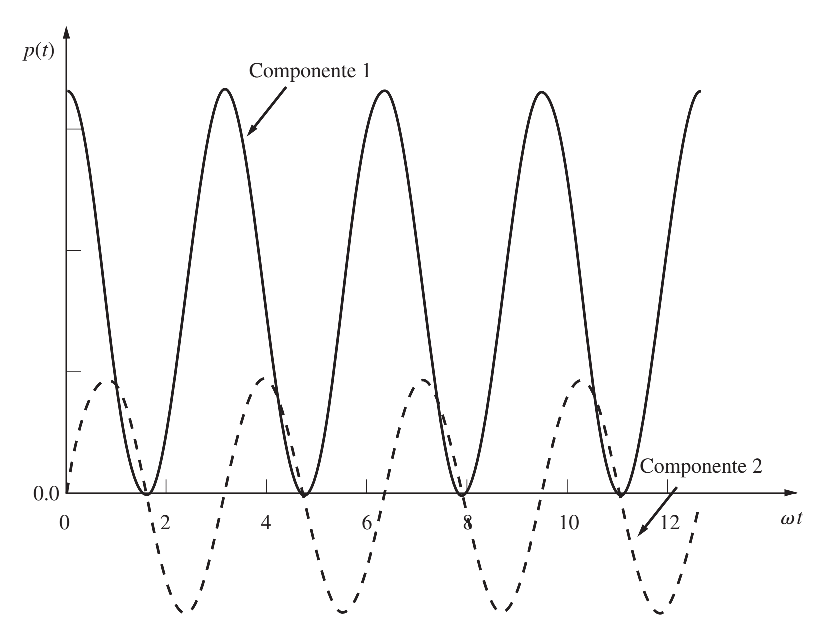


FIGURA 1-30 Los componentes de potencia aplicada a una carga monofásica contra el tiempo. El primer componente representa la potencia aplicada por el componente de corriente *en fase* con el voltaje, mientras que el segundo término representa la potencia aplicada por el componente de corriente que está *90° fuera de fase* con el voltaje.

se conoce como *potencia reactiva* (Q). La potencia reactiva representa la energía que primero se almacena y luego se libera en el campo magnético de un inductor, o en el campo eléctrico de un capacitor.

La potencia reactiva de una carga está dada por

$$Q = VI \text{ sen } \theta \tag{1-61}$$

donde θ es el ángulo de impedancia de la carga. Por convención, Q es positiva en el caso de cargas inductivas y negativa en el de cargas capacitivas, debido a que el ángulo de impedancia θ es positivo para cargas inductivas y negativo para cargas capacitivas. Las unidades de la potencia reactiva son volt-amperes reactivos (var), donde 1 var $=$ 1 V $\times$ 1 A. Aun cuando las unidades son iguales a los watts, es tradicional que se les dé un nombre distintivo a las unidades de la potencia reactiva para no confundirla con la potencia que realmente se suministra a una carga.

La potencia aparente (S) suministrada a una carga se define como el producto del voltaje a través de la carga y la corriente en la carga. Ésta es la potencia que "parece" ser suministrada a la carga si se ignoran las diferencias de ángulo de fase entre el voltaje y la corriente. Por lo tanto, la potencia aparente de una carga está dada por

$$S = VI \tag{1-62}$$

Las unidades de potencia aparente son volt-amperes (VA), donde 1 VA $=$ 1 V $\times$ 1 A. Al igual que con la potencia reactiva, se les da un nombre distintivo a las unidades para evitar confundirla con las potencias real y reactiva.

Formas alternativas de las ecuaciones de potencia

Si una carga tiene una impedancia constante, se puede utilizar la ley de Ohm para derivar las expresiones alternativas de las potencias real, reactiva y aparente suministradas a la carga. Debido a que la magnitud del voltaje a través de la carga está dada por

$$V = IZ \tag{1-63}$$

al sustituir la ecuación (1-63) en las ecuaciones (1-60) a (1-62) se llega a las ecuaciones de las potencias real, reactiva y aparente expresadas en términos de corriente e impedancia:

$$P = I^2 Z \cos\theta \tag{1-64}$$

$$Q = I^2 Z \operatorname{sen}\theta \tag{1-65}$$

$$S = I^2 Z \tag{1-66}$$

donde $|Z|$ es la magnitud de la impedancia de carga Z.

Ya que la impedancia de carga Z se puede expresar como

$$Z = R + jX = |Z| \cos\theta + j|Z| \operatorname{sen}\theta$$

se puede ver en esta ecuación que $R = |Z| \cos\theta$ y $X = |Z| \operatorname{sen}\theta$; de tal manera que las potencias real y reactiva de una carga también se pueden expresar como

$$P = I^2 R \tag{1-67}$$

$$Q = I^2 X \tag{1-68}$$

donde R es la resistencia y X es la reactancia de la carga Z.

Potencia compleja

Por sencillez en los cálculos computacionales, las potencias real y reactiva a veces se representan juntas como *potencia compleja* **S**, donde

$$\mathbf{S} = P + jQ \tag{1-69}$$

La potencia compleja **S** suministrada a una carga se puede calcular con la ecuación

$$\mathbf{S} = \mathbf{VI}^* \tag{1-70}$$

donde el asterisco representa el operador conjugado complejo.

Para poder entender esta ecuación, se presupone que el voltaje suministrado a una carga es $\mathbf{V} = V \angle \alpha$ y la corriente a través de la carga es $\mathbf{I} = I \angle \beta$. Entonces, la potencia compleja suministrada a la carga es

$$\begin{aligned}\mathbf{S} &= \mathbf{VI}^* = (V\angle\alpha)(I\angle-\beta) = VI\angle(\alpha-\beta) \\ &= VI\cos(\alpha-\beta) + jVI\operatorname{sen}(\alpha-\beta)\end{aligned}$$

El ángulo de impedancia θ es la diferencia entre el ángulo del voltaje y el ángulo de la corriente ($\theta = \alpha - \beta$), por lo que esta ecuación se reduce a

$$\begin{aligned}\mathbf{S} &= VI\cos\theta + jVI\operatorname{sen}\theta \\ &= P + jQ\end{aligned}$$

Relaciones entre el ángulo de impedancia, el ángulo de la corriente y la potencia

Como se sabe, por la teoría básica de circuitos, una carga inductiva (figura 1-31) tiene un ángulo de impedancia positivo θ, porque la reactancia del inductor es positiva. Si el ángulo de impedancia θ de una carga es positivo,

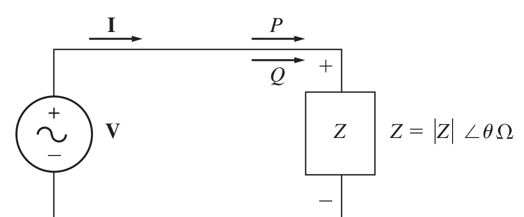


FIGURA 1-31 Carga inductiva con un ángulo de impedancia *θ positivo*. La carga produce una corriente en *retraso*, y consume tanto potencia real *P* como potencia reactiva *Q* de la fuente.

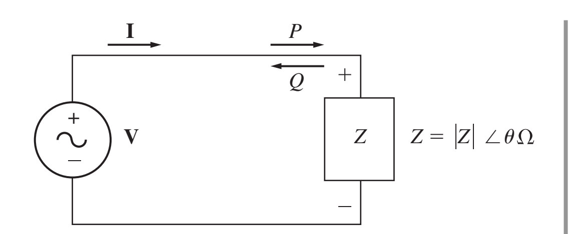


FIGURA 1-32 Carga capacitiva con un ángulo de impedancia θ *negativo*. La carga produce una corriente *adelantada*, y consume potencia real P de la fuente mientras suministra potencia reactiva Q a la fuente.

el ángulo de fase de la corriente que fluye a través de una carga estará θ grados *por detrás* del ángulo de fase del voltaje aplicado a través de la carga.

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{Z} = \frac{V\angle 0°}{|Z|\angle\theta} = \frac{V}{|Z|}\angle -\theta$$

Además, si el ángulo de impedancia θ de una carga es positivo, la potencia reactiva Q que consume la carga será positiva (ecuación (1-65)), y se dice que la carga consume tanto potencia real como reactiva de la fuente.

En contraste, una carga capacitiva (figura 1-32) tiene un ángulo de impedancia θ negativo, puesto que la reactancia de un capacitor es negativa. Si el ángulo de impedancia θ de una carga es negativo, el ángulo de fase de la corriente que fluye a través de la carga se *adelantará* al ángulo de fase del voltaje a través de la carga por θ. Del mismo modo, si el ángulo de impedancia θ de una carga es negativo, la potencia reactiva Q consumida por la carga será *negativa* (ecuación (1-65)). En este caso se dice que la carga consume potencia real de la fuente y *suministra* potencia reactiva a la fuente.

Triángulo de potencia

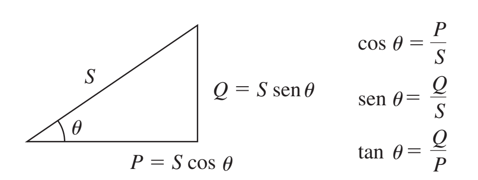


FIGURA 1-33 Triángulo de potencia.

Las potencias real, reactiva y aparente suministradas a una carga se relacionan por medio del *triángulo de potencia*. En la figura 1-33 se muestra un triángulo de potencia. El ángulo de la esquina inferior izquierda es el ángulo de impedancia θ. El lado adyacente a este triángulo es la potencia real P suministrada a la carga, el lado opuesto del triángulo es la potencia reactiva Q suministrada a la carga, y la hipotenusa del triángulo es la potencia aparente S de la carga.

Normalmente la cantidad $\cos\theta$ se conoce como el *factor de potencia* de una carga. Éste se define como la fracción de la potencia aparente S que en realidad suministra potencia real a la carga. Entonces,

$$\text{FP} = \cos\theta \qquad \textbf{(1-71)}$$

donde θ es el ángulo de impedancia de la carga.

Observe que $\cos\theta = \cos(-\theta)$, así como el factor de potencia producido por un ángulo de impedancia de $+30°$ es exactamente el mismo que el factor de potencia producido por un ángulo de impedancia de $-30°$. Debido a que no se puede saber si una carga es inductiva o capacitiva tan sólo por el factor de potencia, por lo general se define si la corriente va delante o con retraso con respecto al voltaje cuando se cita un factor de potencia.

El triángulo de potencia clarifica las relaciones entre la potencia real, la potencia reactiva, la potencia aparente y el factor de potencia, y si se conocen algunas de ellas nos brinda una manera conveniente de calcular varias cantidades relacionadas con la potencia.

EJEMPLO 1-11

La figura 1-34 muestra una fuente de voltaje de ca que suministra potencia a una carga con impedancia $Z = 20\angle -30°\ \Omega$. Calcule la corriente **I** suministrada a la carga, el factor de potencia de la carga y las potencias real, reactiva, aparente y compleja suministradas a la carga.

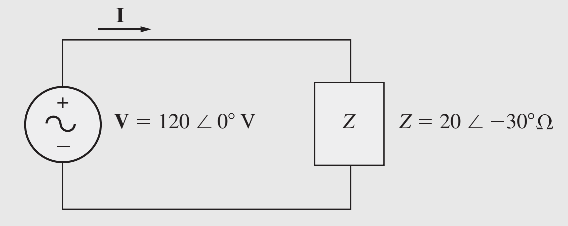


FIGURA 1-34 El circuito del ejemplo 1-11.

Solución

La corriente suministrada a la carga es

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{Z} = \frac{120\angle 0°\ \text{V}}{20\angle -30°\ \Omega} = 6\angle 30°\ \text{A}$$

El factor de potencia de la carga es

$$\text{FP} = \cos\theta = \cos(-30°) = 0.866 \text{ adelante} \qquad \textbf{(1-71)}$$

(Nótese que ésta es una carga capacitiva, por lo que el ángulo de impedancia θ es negativo, y la corriente está *adelante* del voltaje.)

La potencia real suministrada a la carga es

$$P = VI\cos\theta \qquad \textbf{(1-60)}$$

$$P = (120\text{ V})(6\text{ A})\cos(-30°) = 623.5\text{ W}$$

La potencia reactiva suministrada a la carga es

$$Q = VI\,\text{sen}\,\theta \qquad \textbf{(1-61)}$$

$$Q = (120\text{ V})(6\text{ A})\,\text{sen}\,(-30°) = -360\text{ var}$$

La potencia aparente suministrada a la carga es

$$S = VI \qquad \textbf{(1-62)}$$

$$Q = (120\text{ V})(6\text{ A}) = 720\text{ VA}$$

La potencia compleja suministrada a la carga es

$$\mathbf{S} = \mathbf{VI}^* \qquad \textbf{(1-70)}$$

$$= (120\angle 0°\text{ V})(6\angle -30°\text{ A})^*$$

$$= (120\angle 0°\text{ V})(6\angle 30°\text{ A}) = 720\angle -30°\text{ VA}$$

$$= 623.5 - j360\text{ VA}$$

1.10 RESUMEN

Este capítulo repasa brevemente el comportamiento mecánico de los sistemas que rotan alrededor de un eje, y presenta las fuentes y efectos de los campos magnéticos que son importantes para la comprensión del funcionamiento de los transformadores, motores y generadores.

Históricamente, el sistema inglés de unidades se ha utilizado en los países de habla inglesa para medir las cantidades mecánicas asociadas a las máquinas. En los últimos años el sistema internacional de unidades ha reemplazado al inglés en casi todos los países del mundo, excepto en Estados Unidos, aunque incluso allí se avanza con rapidez hacia la implantación de este sistema. Puesto que el SI es cada vez más común, en este libro se utiliza para las medidas mecánicas en casi todos los ejemplos. Las cantidades eléctricas se miden siempre en unidades del SI.

En la sección de mecánica, los conceptos de posición angular, velocidad angular, aceleración angular, par, ley de Newton, trabajo y potencia, se explican para el caso especial de rotación alrededor de un solo eje. Algunas relaciones fundamentales (como las ecuaciones de potencia y velocidad) se describen en unidades del SI y del sistema inglés.

Se explicó la producción de un campo magnético por una corriente, y se exploraron en detalle las propiedades especiales de los materiales ferromagnéticos. También la forma de la curva de magnetización y el concepto de histéresis en términos de la teoría del dominio de los materiales ferromagnéticos, así como las pérdidas por corrientes parásitas.

La ley de Faraday establece que en una bobina de alambre conductor se generará un voltaje proporcional a la tasa de cambio del flujo que la atraviesa con respecto al tiempo. La ley de Faraday es la base del funcionamiento del transformador y se explorará con detalle en el capítulo 3.

Un alambre conductor que porta corriente en presencia de un campo magnético experimentará una fuerza sobre él si se encuentra adecuadamente orientado. Este comportamiento es la base del funcionamiento del motor en todas las máquinas reales.

Un alambre conductor que se mueve con la orientación apropiada a través de un campo magnético experimentará un voltaje inducido en él. Este comportamiento es la base del funcionamiento del generador en todas las máquinas reales.

Una máquina de cd lineal sencilla que consta de una barra conductora que se mueve en un campo magnético ilustra muchas de las acciones de los motores y generadores reales. Cuando se le aplica una carga, disminuye su velocidad y opera como motor, convirtiendo energía eléctrica en mecánica. Cuando una fuerza empuja la barra a una velocidad mayor que su velocidad de vacío en estado estacionario, la máquina actúa como generador, convirtiendo energía mecánica en energía eléctrica.

En circuitos de ca, la potencia real P es la potencia promedio que aplica una fuente a una carga. La potencia reactiva Q es el componente de la potencia que se intercambia constantemente entre la fuente y la carga. Por lo general, las cargas inductivas ($+\theta$) consumen potencia reactiva positiva y las cargas capacitivas ($-\theta$) consumen potencia reactiva negativa (o suministran potencia reactiva positiva). La potencia aparente S es la que "parece" que se aplica a la carga si sólo se consideran las magnitudes de los voltajes y de las corrientes.

PREGUNTAS

1-1. ¿Qué es par? ¿Qué función cumple el par en el movimiento rotacional de las máquinas?

1-2. ¿Qué establece la ley de Ampere?

1-3. ¿Qué es intensidad de campo magnético? ¿Qué es densidad de flujo magnético? ¿Cómo se relacionan estos dos términos?

1-4. ¿Cómo ayudan los conceptos de circuito magnético equivalente al diseño de los núcleos de los transformadores y las máquinas?

1-5. ¿Qué es reluctancia?

1-6. ¿Qué es un material ferromagnético? ¿Por qué es tan alta la permeabilidad de un material ferromagnético?

1-7. ¿Cómo varía la permeabilidad relativa de un material ferromagnético con la fuerza magnetomotriz?

1-8. ¿Qué es histéresis? Explique la histéresis en términos de la teoría de los dominios magnéticos.

1-9. ¿Qué son las pérdidas por corrientes parásitas? ¿Qué se puede hacer para minimizar las pérdidas por corrientes parásitas en el núcleo?

1-10. ¿Por qué todos los núcleos expuestos a las variaciones del flujo de ca son laminados?

1-11. ¿Qué establece la ley de Faraday?

1-12. ¿Qué condiciones se requieren para que un campo magnético produzca una fuerza sobre un alambre conductor?

1-13. ¿Qué condiciones se requieren para que un campo magnético produzca un voltaje en un alambre conductor?

1-14. ¿Por qué la máquina lineal es un buen ejemplo del comportamiento observado en las máquinas de cd reales?

1-15. La máquina lineal de la figura 1-19 se mueve en condiciones de estado estacionario. ¿Qué le ocurrirá a la barra si se incrementa el voltaje de la batería? Explique con detalle.

1-16. ¿Cómo produce un incremento de velocidad un decremento de la producción de flujo en una máquina lineal?

1-17. Diga si la corriente está delante o detrás del voltaje en una carga inductiva. ¿La potencia reactiva de la carga será positiva o negativa?

1-18. ¿Qué son las potencias real, reactiva y aparente? ¿En qué unidades se miden? ¿Cómo se relacionan?

1-19. ¿Qué es el factor de potencia?

PROBLEMAS

1-1. El eje de un motor gira a una velocidad de 1 800 r/min. ¿Cuál es la velocidad del eje en radianes por segundo?

1-2. Un volante cuyo momento de inercia es de 4 kg • m^2 está inicialmente en reposo. Si se le aplica de manera repentina un par de 6 N • m (en sentido contrario al de las manecillas del reloj), ¿cuál será la velocidad del volante después de 5 segundos? Exprese esta velocidad en radianes por segundo y en revoluciones por minuto.

1-3. Una fuerza de 10 N se aplica a un cilindro de radio $r = 0.15$ m, como se muestra en la figura P1-1. El momento de inercia de este cilindro es $J = 4$ kg • m^2. ¿Cuál es la magnitud y cuál es la dirección del par producido en el cilindro? ¿Cuál es la aceleración angular α del cilindro?

1-4. Un motor suministra a su carga un par de 50 N • m. Si el eje del motor gira a 1 500 r/min, ¿cuál es la potencia mecánica suministrada a la carga en watts? ¿Y en caballos de fuerza?

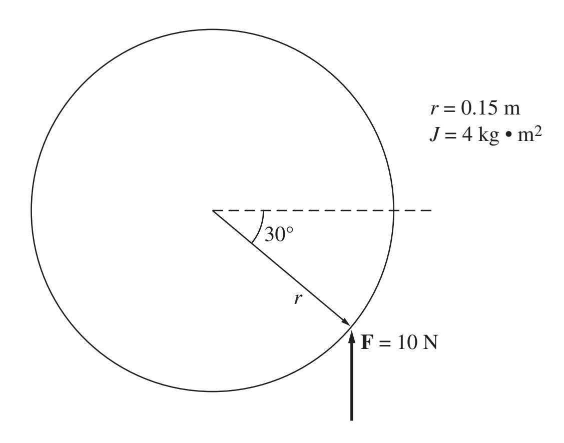


FIGURA P1-1 El cilindro del problema 1-3.

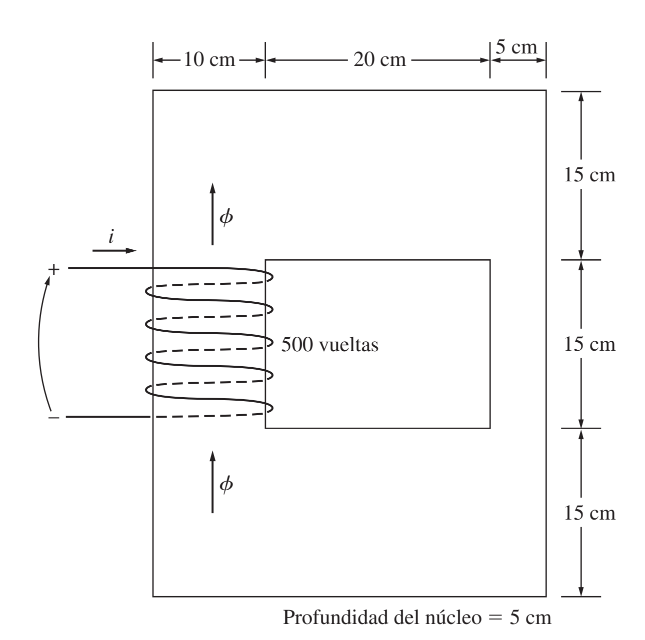


FIGURA P1-2 El núcleo de los problemas 1-5 y 1-16.

1-5. En la figura P1-2 se muestra un núcleo ferromagnético. La profundidad del núcleo es de 5 cm. Las demás dimensiones del núcleo se pueden ver en la figura. Encuentre el valor de la corriente producida por un flujo de 0.005 Wb. Con esta corriente, ¿cuál es la densidad de flujo en la parte superior del núcleo? ¿Cuál es la densidad de flujo en la parte derecha del núcleo? Suponga que la permeabilidad relativa del núcleo es de 800.

1-6. La figura P1-3 muestra un núcleo ferromagnético cuya permeabilidad relativa es de 1 500. Las demás dimensiones se pueden ver en el diagrama. La profundidad del núcleo es de 5 cm. Los entrehierros de las partes izquierda y derecha del núcleo tienen 0.050 y 0.070 cm, respectivamente. Debido a los efectos marginales, el área efectiva de los entrehierros se incrementa 5% respecto del área física. Si hay una bobina de 300 vueltas enrollada en la columna central del núcleo y por ella pasa una corriente de 1.0 A, ¿cuál es el flujo en las columnas izquierda, central y derecha del núcleo? ¿Cuál es la densidad de flujo en cada entrehierro?

1-7. En la figura P1-4 se muestra un núcleo de dos columnas. La bobina dispuesta en la parte izquierda (N_1) tiene 600 vueltas y la bobina de la parte derecha (N_2) tiene 200 vueltas. Las bobinas están enrolladas en las direcciones que se muestran en la figura. Si tomamos en cuenta las dimensiones que se aprecian en la figura, ¿qué flujo producirán las corrientes $i_1 = 0.5$ A e $i_2 = 1.00$ A? Suponga que $\mu_r = 1\ 200$ y es constante.

1-8. La figura P1-5 muestra un núcleo con tres columnas. Su profundidad es de 5 cm, y hay una bobina de 100 vueltas en la columna del extremo izquierdo. Suponga que la permeabilidad relativa del núcleo es 2 000 y es constante. ¿Cuánto flujo existirá en cada una de las tres columnas del núcleo? ¿Cuál es la densidad del flujo en cada una de ellas? Considere un incremento de 5% por efecto marginal en el área efectiva de cada entrehierro.

1-9. La figura P1-6 muestra un alambre conductor que porta una corriente de 2.0 A en presencia de un campo magnético. Calcule la magnitud y dirección de la fuerza inducida sobre el alambre.

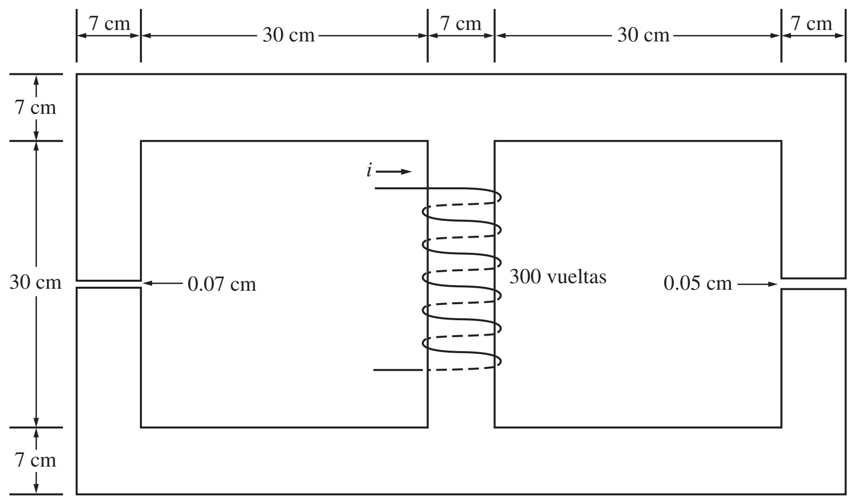


FIGURA P1-3 Núcleo del problema 1-6.

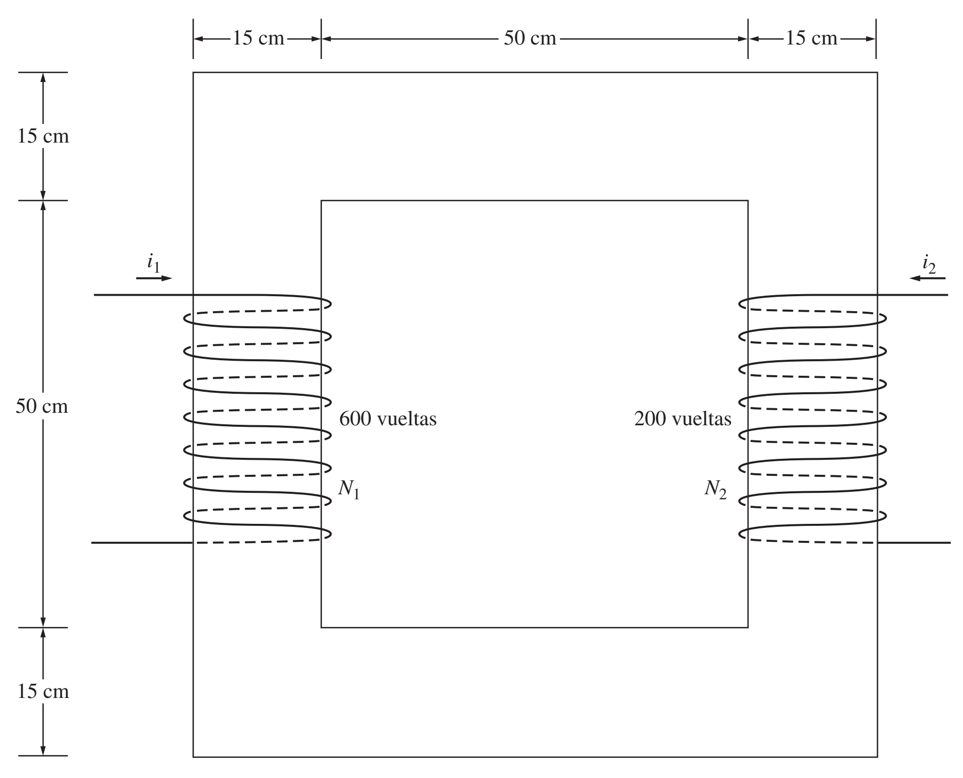


FIGURA P1-4 Núcleo de los problemas 1-7 y 1-12.

1-10. El alambre que se muestra en la figura P1-7 se mueve en presencia de un campo magnético. Con la información dada en la figura determine la magnitud y dirección del voltaje inducido en el alambre.

1-11. Repita el problema 1-10 para el alambre de la figura P1-8.

1-12. El núcleo que se muestra en la figura P1-4 es de acero, con una curva de magnetización que se muestra en la figura P1-9. Repita el problema 1-7, pero esta vez *no* suponga que el valor de μ_r es constante. ¿Cuánto flujo producen en el núcleo las corrientes especificadas? ¿Cuál es la permeabilidad relativa de este núcleo en estas condiciones? La permeabilidad relativa de 1 200 supuesta en el problema 1-7, ¿es una buena suposición para estas condiciones? ¿Es una buena suposición en general?

1-13. En la figura P1-10 se muestra un núcleo con tres columnas. Su profundidad es de 5 cm y tiene 400 vueltas en la columna central. Las demás dimensiones se aprecian en la figura. El núcleo es de acero con una curva de magnetización como la que se ve en la figura 1-10*c*). Responda las siguientes preguntas:

a) ¿Qué corriente se requiere para producir una densidad de flujo de 0.5 T en la columna central del núcleo?

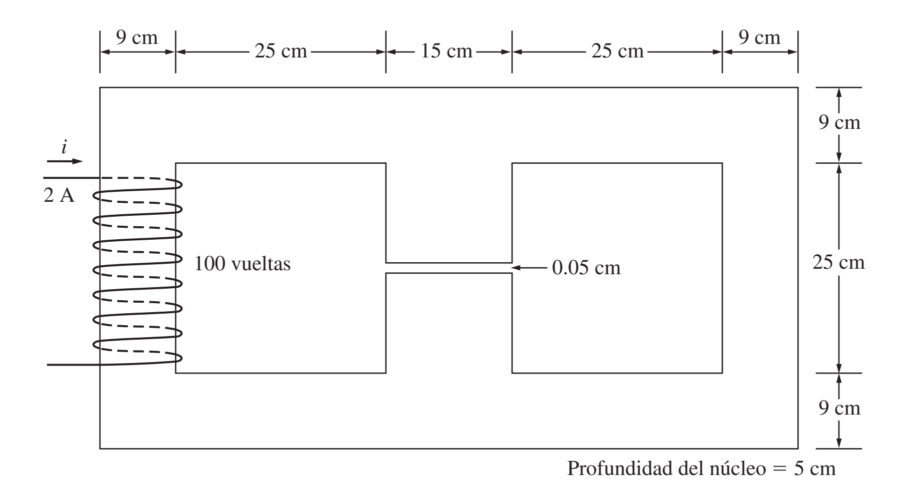


FIGURA P1-5 Núcleo del problema 1-8.

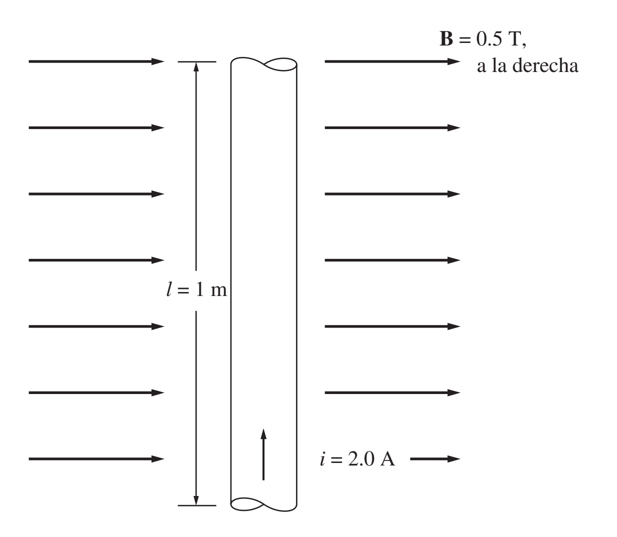


FIGURA P1-6 Alambre cargado con corriente en un campo magnético (problema 1-9).

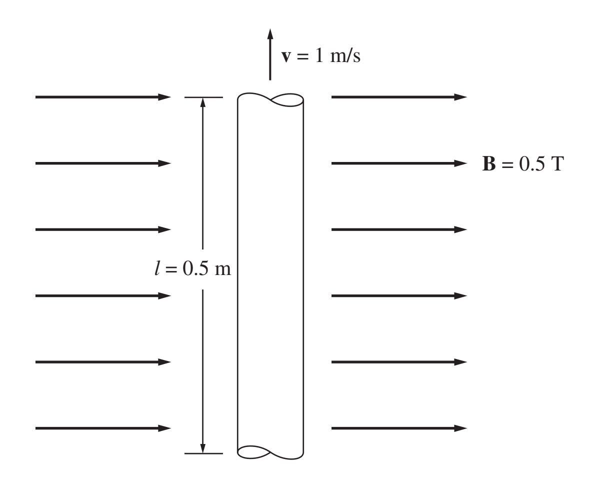


FIGURA P1-8 Alambre moviéndose en un campo magnético (problema 1-11).

b) ¿Qué corriente se requiere para producir una densidad de flujo de 1.0 T en la columna central del núcleo? ¿Es el doble de la corriente requerida en el inciso *a*)?

c) ¿Cuáles son las reluctancias de las columnas central y derecha del núcleo en las condiciones del inciso *a*)?

d) ¿Cuáles son las reluctancias de las columnas central y derecha del núcleo en las condiciones del inciso *b*)?

e) ¿Qué conclusión puede obtenerse acerca de las reluctancias en los núcleos reales magnéticos?

1-14. En la figura P1-11 se muestra un núcleo magnético de dos columnas con entrehierro. La profundidad del núcleo es de 5 cm, la longitud del entrehierro es de 0.05 cm y la bobina tiene 1 000 vueltas. La curva de magnetización del material del núcleo se puede ver en la figura P1-9. Suponga un incremento de 5% del área efectiva en el entrehierro debido al efecto marginal. ¿Cuánta corriente se requiere para producir en el entrehierro una densidad de flujo de 0.5 T? ¿Cuáles son las densidades de flujo en los cuatro lados del núcleo para esa corriente en la bobina? ¿Cuál es el flujo total presente en el entrehierro?

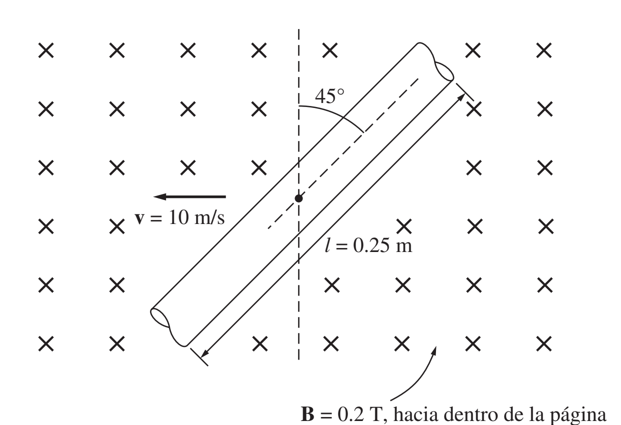


FIGURA P1-7 Alambre moviéndose en un campo magnético (problema 1-10).

1-15. El núcleo de un transformador, cuya trayectoria media efectiva es de 6 pulgadas, tiene una bobina de 200 vueltas enrollada alrededor de una de sus columnas. El área de su sección transversal es de 0.25 pulg^2, y su curva de magnetización se muestra en la figura 1-10*c*). Si en la bobina fluye una corriente de 0.3 A, ¿cuál será el flujo total en el núcleo? ¿Cuál es la densidad de flujo?

1-16. El núcleo que se muestra en la figura P1-2 tiene el flujo ϕ que se puede apreciar en la figura P1-12. Dibuje el voltaje de los terminales de la bobina.

1-17. La figura P1-13 muestra el núcleo de un motor de cd sencillo. La curva de magnetización del metal de este núcleo está dada por las figuras 1-10*c*) y *d*). Suponga que el área de la sección transversal de cada entrehierro es de 18 cm^2 y que el ancho

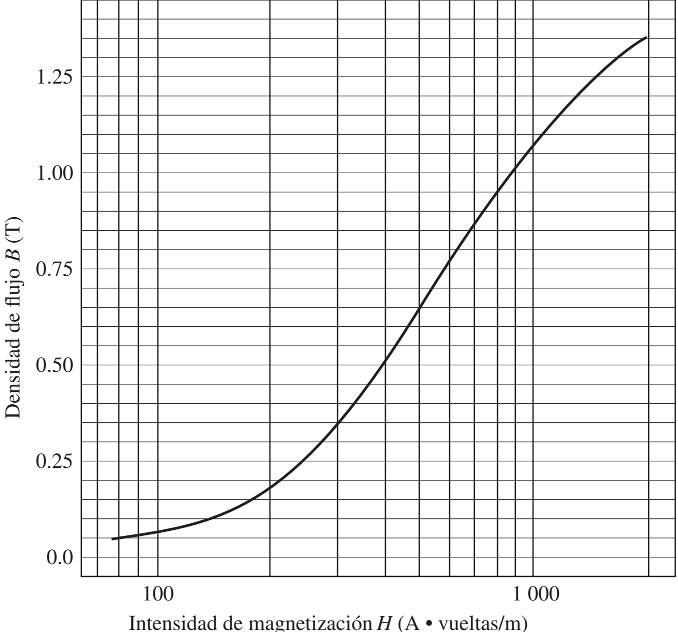


FIGURA P1-9 Curva de magnetización del material del núcleo de los problemas 1-12 y 1-14.

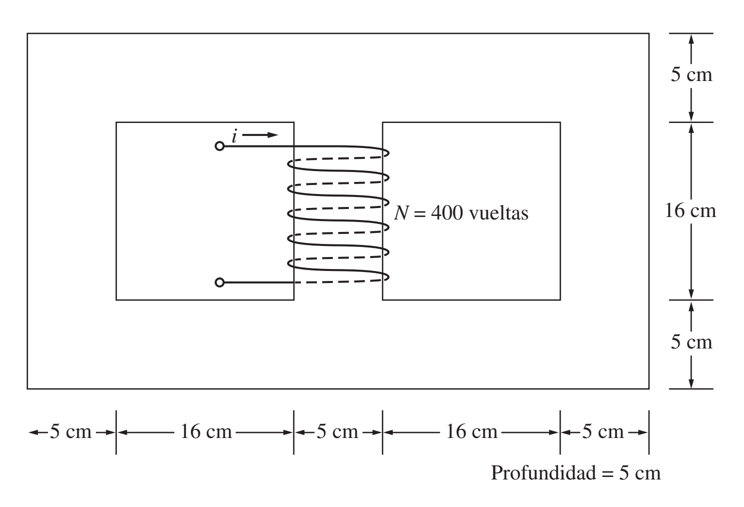


FIGURA P1-10 Núcleo del problema 1-13.

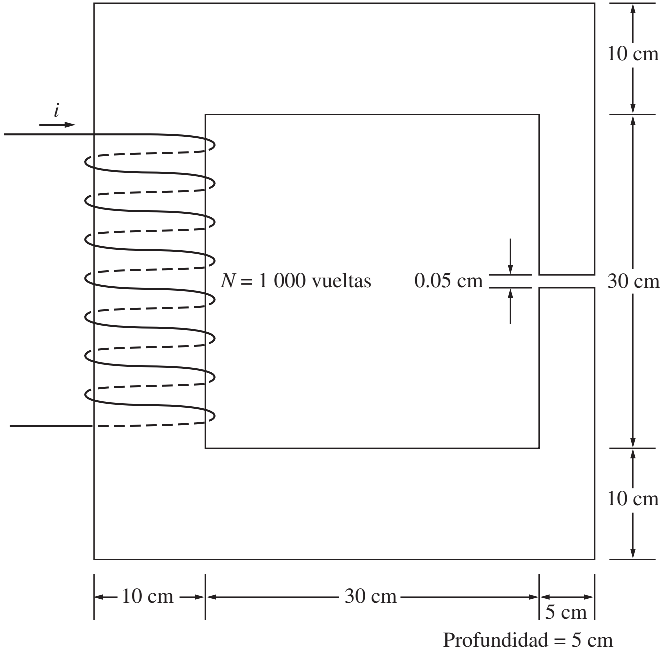


FIGURA P1-11 Núcleo del problema 1-14.

de cada entrehierro es de 0.05 cm. El diámetro efectivo del núcleo del rotor es de 5 cm.

a) Se desea construir una máquina con la mayor densidad de flujo posible, pero evitando la excesiva saturación en el núcleo. ¿Cuál sería un máximo razonable de densidad de flujo para este núcleo?
b) ¿Cuál sería el flujo total en el núcleo para la densidad de flujo del inciso *a*)?
c) La máxima corriente de campo posible de esta máquina es de 1 A. Seleccione un número razonable de vueltas de alambre para proveer la densidad de flujo requerida sin exceder la máxima corriente disponible.

1-18. Suponga que el voltaje aplicado a una carga es de $V = 208\angle -30°$ V y que la corriente que fluye a través de la carga es de $I = 2\angle 20°$ A.

a) Calcule la potencia compleja **S** que consume esta carga.
b) ¿Esta carga es inductiva o capacitiva?
c) Calcule el factor de potencia de la carga.

1-19. La figura P1-14 muestra un sistema de potencia de ca monofásico con tres cargas. La fuente de voltaje es $V = 240 \angle 0°$ V y las impedancias de estas tres cargas son

$$Z_1 = 10\angle 30°\ \Omega \quad Z_2 = 10\angle 45°\ \Omega \quad Z_3 = 10\angle -90°\ \Omega$$

Responda las siguientes preguntas sobre este sistema de potencia.

a) Suponga que el interruptor que se muestra en la figura está abierto y calcule la corriente **I**, el factor de potencia y las potencias real, reactiva y aparente suministradas por la fuente.
b) ¿Cuánta potencia real, reactiva y aparente se está consumiendo por cada carga con el interruptor abierto?
c) Suponga que el interruptor que se muestra en la figura está cerrado y calcule la corriente **I**, el factor de potencia, las potencias real, reactiva y aparente suministradas por la fuente.
d) ¿Cuánta potencia real, reactiva y aparente se consume por cada carga con el interruptor cerrado?
e) ¿Qué le pasa a la corriente que emana de la fuente cuando se cierra el interruptor? ¿Por qué?

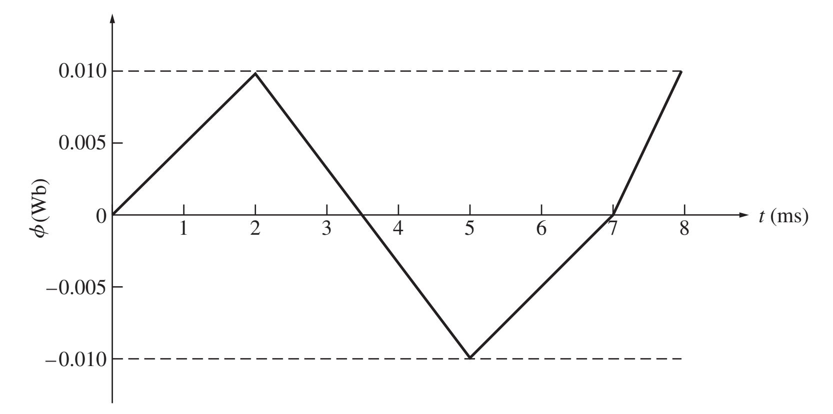


FIGURA P1-12 Gráfica del flujo ϕ en función del tiempo del problema 1-16.

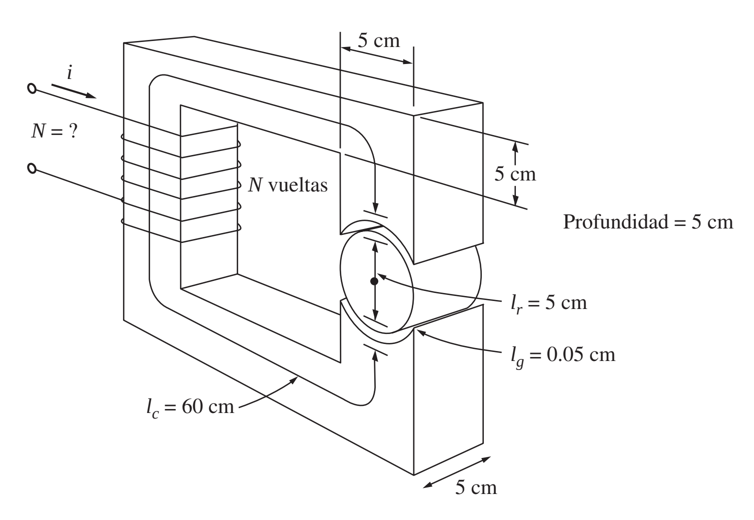


FIGURA P1-13 Núcleo del problema 1-17.

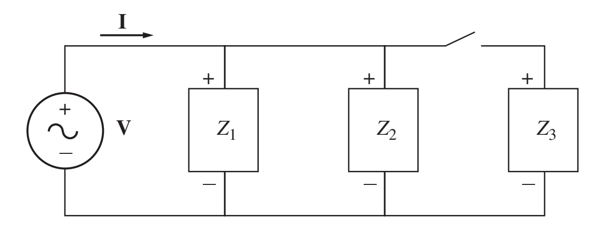


FIGURA P1-14 Circuito del problema 1-19.

1-20. Demuestre que la ecuación (1-59) se puede obtener a partir de la ecuación (1-58) utilizando las identidades trigonométricas simples:

$$p(t) = v(t)i(t) = 2VI \cos \omega t \cos(\omega t - \theta) \quad \textbf{(1-58)}$$

$$p(t) = VI \cos \theta (1 + \cos 2\omega t) + VI \text{ sen } \theta \text{ sen } 2\omega t \quad \textbf{(1-59)}$$

Sugerencia: Las siguientes identidades serán útiles:

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\cos (\alpha - \beta) + \cos (\alpha + \beta)]$$
$$\cos (\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \text{sen } \alpha \text{ sen } \beta$$

1-21. La máquina lineal que se muestra en la figura P1-15 tiene una densidad de flujo de 0.5 T dirigida hacia dentro de la página, una resistencia de 0.25 Ω, una barra con una longitud de l = 1.0 m y una batería con una voltaje de 100 V.

a) ¿Cuál es la fuerza inicial que se aplica a la barra durante el arranque? ¿Cuál es el flujo de corriente inicial?
b) ¿Cuál es la velocidad de la barra en vacío en estado estacionario?
c) Si la barra se carga con una fuerza de 25 N en sentido opuesto a la dirección del movimiento, ¿cuál es la nueva velocidad en estado estacionario? ¿Cuál es la eficiencia de la máquina en estas circunstancias?

1-22. Una máquina lineal tiene las siguientes características:

$\mathbf{B}$ = 0.5 T hacia dentro de la página R = 0.25 Ω
l = 0.5 m V_B = 120 V

a) Si a la barra se le coloca una carga de 20 N en sentido opuesto a la dirección del movimiento, ¿cuál es la velocidad de la barra en estado estacionario?
b) Si la barra se desplaza hacia una región donde la densidad de flujo baja a 0.45 T, ¿qué le ocurre a la barra? ¿Cuál es su velocidad final en estado estacionario?
c) Suponga que V_B disminuye a 100 V y las demás condiciones del inciso *b*) se mantienen constantes. ¿Cuál es la nueva velocidad de la barra en estado estacionario?
d) De acuerdo con los resultados de los incisos *b*) y *c*), identifique cuáles son los dos métodos para controlar la velocidad de una máquina lineal (o de un motor real de cd).

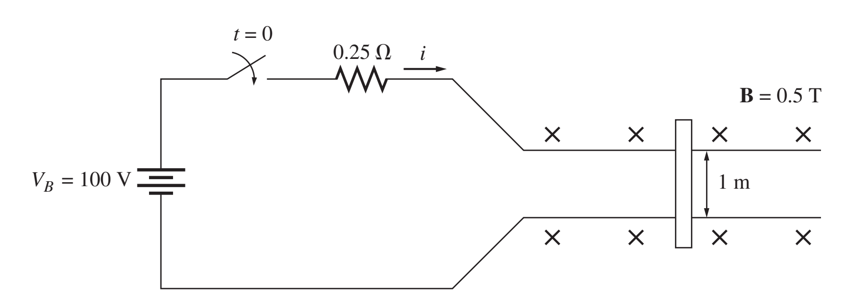


FIGURA P1-15 Máquina lineal del problema 1-21.

1-23. En el caso de la máquina lineal del problema 1-22:

a) Cuando esta máquina opera como motor, calcule la velocidad de la barra para cargas de 0 N a 30 N en pasos de 5 N. Grafique la rapidez de la barra como función de la carga.

b) Suponga que el motor opera con una carga de 30 N, y calcule y grafique la rapidez de la barra para densidades de flujo magnético de 0.3 T a 0.5 T en pasos de 0.05 T.

c) Suponga que el motor trabaja en condiciones de carga nula, con una densidad de flujo magnético de 0.5 T. ¿Cuál es la velocidad de la barra? Ahora aplique una carga de 30 N a la barra. ¿Cuál es la nueva velocidad de la barra? *¿Qué densidad de flujo magnético sería necesaria* para restaurar la barra cargada a la misma velocidad que tenía en condiciones de carga nula?

BIBLIOGRAFÍA

1. Alexander, Charles K. y Matthew N.O. Sadiiku, *Fundamentals of Electric Circuits*, 4a. ed., McGraw-Hill, Nueva York, 2008.
2. Ber, F. y E. Johnston, Jr., *Vector Mechanics for Engineers: Dynamics*, 7a. ed., McGraw-Hill, Nueva York, 2004.
3. Hayt, William H., *Engineering Electromagnetics*, 5a. ed., McGraw-Hill, Nueva York, 1989.
4. Mulligan, J.F., *Introductory College Physics*, 2a. ed., McGraw-Hill, Nueva York, 1991.
5. Sears, Francis W., Mark W. Zemansky y Hugh D. Young, *University Physics*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1982.

CAPÍTULO 2

Transformadores

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

- Entender el propósito de un transformador en un sistema de potencia.
- Conocer las relaciones entre voltaje, corriente e impedancia a través de los devanados de un transformador ideal.
- Entender cómo los transformadores reales se aproximan a la operación de un transformador ideal.
- Poder explicar cómo se modelan las pérdidas en cobre, el flujo magnético de fuga, la histéresis y las corrientes parásitas en circuitos equivalentes de transformadores.
- Usar un circuito equivalente de transformador para determinar las transformaciones de voltaje y corriente a través de un transformador.
- Poder calcular las pérdidas y la eficiencia de un transformador.
- Poder deducir el circuito equivalente de un transformador a partir de mediciones.
- Entender el sistema de mediciones por unidad.
- Poder calcular la regulación de voltaje de un transformador.
- Entender el autotransformador.
- Comprender los transformadores trifásicos, incluyendo casos especiales en los que sólo se usan dos transformadores.
- Entender las capacidades nominales de los transformadores.
- Entender transformadores instrumentales: transformadores de potencial y transformadores de corriente.

Un *transformador* es un dispositivo que cambia la potencia eléctrica alterna con un nivel de voltaje a potencia eléctrica alterna con otro nivel de voltaje mediante la acción de un campo magnético. Consta de dos o más bobinas de alambre conductor enrolladas alrededor de un núcleo ferromagnético común. Estas bobinas (normalmente) no están conectadas en forma directa. La única conexión entre las bobinas es el flujo magnético común que se encuentra dentro del núcleo.

Uno de los devanados del transformador se conecta a una fuente de energía eléctrica alterna y el segundo (y quizá el tercero) suministra energía eléctrica a las cargas. El devanado del transformador que se conecta a la fuente de potencia se llama *devanado primario* o *devanado de entrada*, y el devanado que se conecta a la carga se llama *devanado secundario* o *devanado de salida*. Si hay un tercer devanado en el transformador, se llama *devanado terciario*.

2.1 POR QUÉ SON IMPORTANTES LOS TRANSFORMADORES EN LA VIDA MODERNA

El primer sistema de distribución de potencia que se usó en Estados Unidos fue uno de corriente directa de 120 V inventado por Thomas Alva Edison para suministrar potencia a las bombillas incandescentes. La primera central de potencia de Edison entró en operación en la ciudad de Nueva York en septiembre de 1882. Desafortunadamente, este sistema de potencia generaba y transmitía potencia a tan bajos voltajes que se requerían corrientes muy altas para suministrar cantidades significativas de potencia. Estas corrientes altas ocasionaban enormes caídas de voltaje y pérdidas de potencia en las líneas de transmisión y restringían mucho el

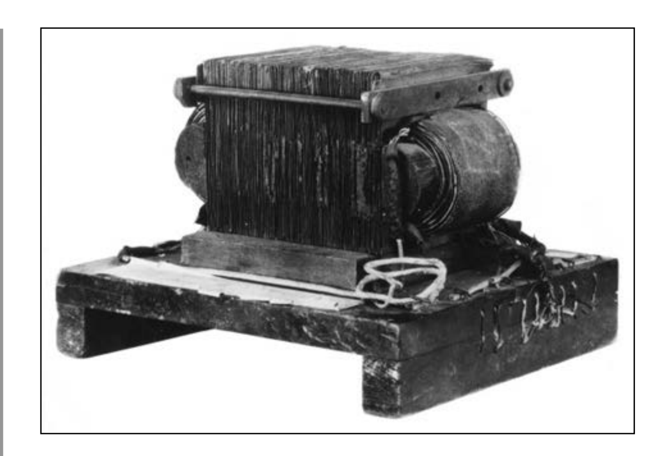


FIGURA 2-1 El primer transformador moderno práctico, construido por William Stanley en 1885. Nótese que el núcleo está elaborado con hojas individuales de metal (láminas). (*Cortesía de General Electric Company*.)

área de servicio de las estaciones de generación. En la década de 1880 las centrales generadoras se localizaban a muy pocas calles entre sí para evitar este problema. El hecho de no poder transmitir potencias a sitios lejanos con los sistemas de potencia de cd de bajo voltaje significó que las estaciones generadoras fueran de poca capacidad, locales y, por lo tanto, relativamente ineficientes.

La invención del transformador y el desarrollo simultáneo de las fuentes de potencia alterna eliminaron para siempre las restricciones referentes al alcance y al nivel de los sistemas de potencia. Un transformador cambia, idealmente, un nivel de voltaje alterno a otro nivel de voltaje sin afectar la potencia que se suministra. Si un transformador eleva el nivel de voltaje en un circuito, debe disminuir la corriente para mantener la potencia que entra en el dispositivo igual a la potencia que sale de él. De esta manera, a la potencia eléctrica alterna que se genera en un sitio determinado, se le eleva el voltaje para transmitirla a largas distancias con pocas pérdidas y luego se reduce para dejarla nuevamente en el nivel de utilización final. Puesto que las pérdidas de transmisión en las líneas de un sistema de potencia son proporcionales al cuadrado de la corriente, al elevar con transformadores 10 veces el voltaje de transmisión se reduce la corriente en el mismo número de veces y las pérdidas de transmisión se reducen 100 veces. Sin el transformador, simplemente no sería posible utilizar la potencia eléctrica en muchas de las formas en que se utiliza hoy en día.

En un sistema moderno de potencia se genera potencia eléctrica a voltajes de 12 a 25 kV. Los transformadores elevan el voltaje hasta niveles comprendidos entre 110 kV y cerca de 1 000 kV para ser transmitido a grandes distancias con pocas pérdidas. Posteriormente, los transformadores bajan el voltaje a un nivel de entre 12 kV y 34.5 kV para su distribución local y para permitir que la potencia eléctrica se pueda utilizar con seguridad en los hogares, oficinas y fábricas a voltajes tan bajos como 120 V.

2.2 TIPOS Y CONSTRUCCIÓN DE TRANSFORMADORES

El propósito principal de un transformador es convertir la potencia alterna de un nivel de voltaje en potencia alterna de la misma frecuencia pero con otro nivel de voltaje. Los transformadores también se utilizan para otros propósitos (por ejemplo, para muestreo de voltaje, muestreo de corriente y acoplamiento de impedancia), pero este capítulo está dedicado principalmente al transformador de potencia.

Los transformadores de potencia se construyen de dos maneras. Un tipo de transformador consta de una pieza de acero rectangular, laminada, con los devanados enrollados sobre dos de los lados del rectángulo. Esta clase de construcción, conocido como transformador *tipo núcleo*, se ilustra en la figura 2-2. El otro consta de un núcleo laminado de tres columnas, cuyas bobinas están enrolladas en la columna central. Esta clase de construcción se conoce como transformador *tipo acorazado* y se ilustra en la figura 2-3. En cualquier caso, el núcleo se construye con delgadas láminas aisladas eléctricamente unas de otras para minimizar las corrientes parásitas.

FIGURA 2-2 Construcción de un transformador tipo núcleo.

En un transformador físico los devanados primario y secundario están envueltos uno sobre el otro con un devanado de bajo voltaje en la parte interna (más cerca del núcleo). Esta disposición cumple dos objetivos:

1. Simplifica el problema de aislar el devanado de alta tensión desde el núcleo.
2. Produce un menor flujo disperso que el que se presentaría en caso de colocar los dos devanados separados del núcleo.

A los transformadores de potencia se les llama de diferentes maneras, dependiendo de su uso en los sistemas de potencia. A un transformador conectado a la salida de un generador y que se usa para aumentar su voltaje a niveles de transmisión (más de 110 kV) a veces se le llama *transformador de unidad*. Al transformador que se encuentra al final de la línea de transmisión, que baja el voltaje de niveles de transmisión a niveles de distribución (de 2.3 a 34.5 kV) se le llama *transformador de subestación*. Por último, al transformador que toma el voltaje de distribución y lo disminuye hasta

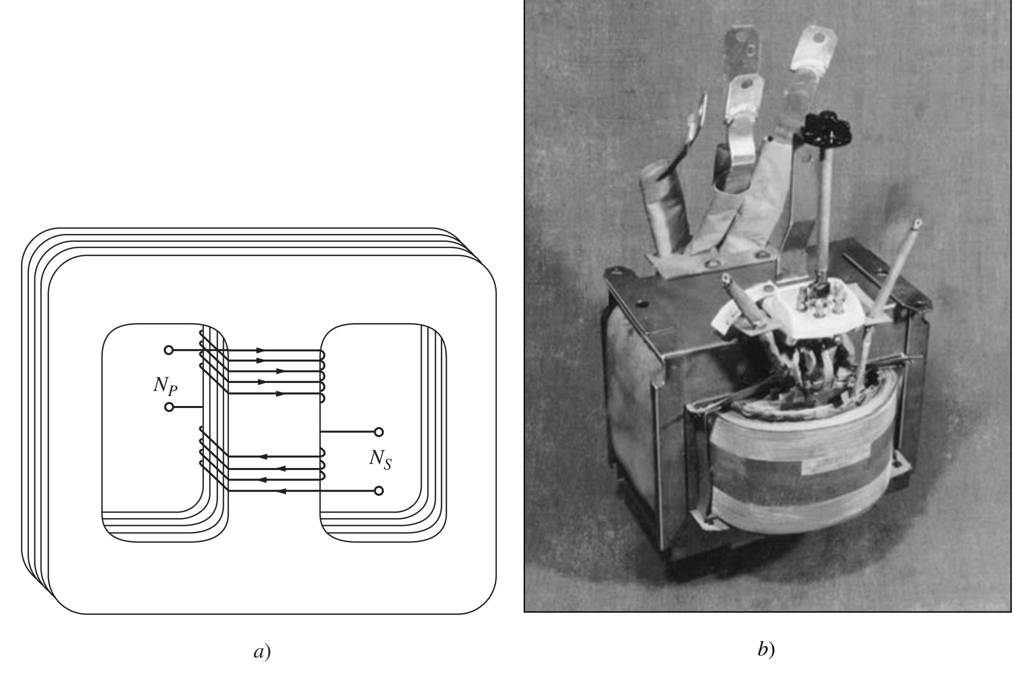


FIGURA 2-3 *a*) Construcción de un transformador tipo acorazado. *b*) Típico transformador tipo acorazado. (*Cortesía de General Electric Company*.)

el voltaje final al que se utiliza la potencia (110, 208, 220 V, etc.) se le llama *transformador de distribución*. Todos estos dispositivos son esencialmente iguales; la única diferencia entre ellos es el uso que se les da.

Además de los diferentes transformadores de potencia, hay dos transformadores para propósitos especiales que se utilizan con maquinaria eléctrica y sistemas de potencia. El primero de ellos es un dispositivo diseñado de manera específica para hacer muestreos de alto voltaje y producir un bajo voltaje secundario directamente proporcional al primero. Este tipo de transformador se llama *transformador de potencial*. Un transformador de potencia también produce un voltaje secundario directamente proporcional a su voltaje primario; la diferencia entre un transformador de potencial y un transformador de potencia es que el transformador de potencial está diseñado para manejar sólo corrientes muy pequeñas. El segundo tipo de transformadores especiales es un dispositivo diseñado para proveer una corriente secundaria mucho más pequeña pero directamente proporcional a su corriente primaria. Este dispositivo se llama *transformador de corriente*. Los dos transformadores de uso especial se analizan más adelante en este capítulo.

2.3 EL TRANSFORMADOR IDEAL

Un *transformador ideal* es un dispositivo sin pérdidas que tiene un devanado de entrada y un devanado de salida. Las relaciones entre el voltaje de entrada y el de salida, y entre la corriente de entrada y la de salida, se describen en dos sencillas ecuaciones. La figura 2-4 muestra un transformador ideal.

La figura 2-4 muestra un transformador con N_P vueltas de alambre en su lado primario y N_S vueltas de alambre en su lado secundario. La relación entre el voltaje $v_P(t)$ aplicado al lado primario del transformador y el voltaje $v_S(t)$ producido en el lado secundario es

$$\frac{v_P(t)}{v_S(t)} = \frac{N_P}{N_S} = a \tag{2-1}$$

donde a se define como la *relación de transformación* del transformador:

$$a = \frac{N_P}{N_S} \tag{2-2}$$

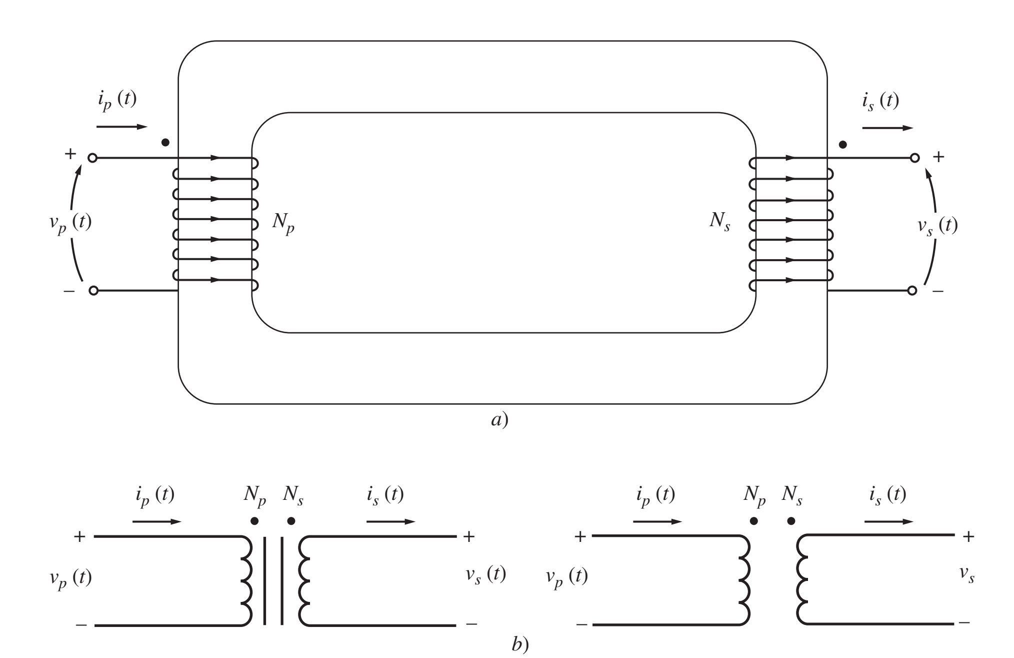


FIGURA 2-4 *a*) Dibujo de un transformador ideal. *b*) Símbolos esquemáticos de un transformador. A veces el núcleo de hierro se muestra en el símbolo y a veces no.

La relación entre la corriente $i_P(t)$ que fluye del lado primario del transformador y la corriente $i_S(t)$ que sale del lado secundario del transformador es

$$N_P i_P(t) = N_S i_S(t) \tag{2-3a}$$

o

$$\frac{i_P(t)}{i_S(t)} = \frac{1}{a} \tag{2-3b}$$

En términos de cantidades fasoriales, estas ecuaciones son

$$\frac{\mathbf{V}_P}{\mathbf{V}_S} = a \tag{2-4}$$

e

$$\frac{\mathbf{I}_P}{\mathbf{I}_S} = \frac{1}{a} \tag{2-5}$$

Nótese que el ángulo de fase de $\mathbf{V}_P$ es el mismo que el ángulo de $\mathbf{V}_S$ y el ángulo fasorial de $\mathbf{I}_P$ es el mismo que el ángulo fasorial de $\mathbf{I}_S$. La relación de vueltas del transformador ideal afecta las *magnitudes* de los voltajes y corrientes, pero no sus *ángulos*.

Las ecuaciones (2-l) a (2-5) describen las relaciones entre las magnitudes y ángulos de los voltajes y corrientes en los lados primarios y secundarios del transformador, pero dejan una pregunta sin respuesta: puesto que el voltaje del circuito primario es positivo en un lado específico de la bobina, ¿cuál será la *polaridad* del voltaje del circuito secundario? En un transformador real sería posible saber la polaridad secundaria sólo si se lo abriera y se examinaran sus devanados. Para evitar esto, los transformadores utilizan la *convención de puntos*. Los puntos que aparecen en un extremo de cada devanado en la figura 2-4 muestran la polaridad del voltaje y de la corriente en el lado secundario del transformador. La relación es la siguiente:

1. Si el *voltaje* primario es positivo en el extremo del devanado marcado con punto con respecto al extremo que no tiene marca, entonces el voltaje secundario también es positivo en el extremo marcado con punto. Las polaridades de voltaje son las mismas con respecto a los puntos en cada lado del núcleo.

2. Si la *corriente* primaria del transformador fluye *hacia dentro* en el extremo marcado con punto del devanado primario, la corriente secundaria fluirá *hacia fuera* en el extremo marcado con punto del devanado secundario.

El significado físico de la convención de puntos y la razón por la que las polaridades funcionan de esta manera se explicará en la sección 2.4, que trata sobre los transformadores reales.

Potencia en el transformador ideal

La potencia P_{entr} que el circuito primario suministra al transformador está dada por la ecuación

$$P_{entr} = V_P I_P \cos \theta_P \tag{2-6}$$

donde θ_P es el ángulo entre el voltaje primario y la corriente primaria. La potencia P_{sal} que el circuito secundario del transformador suministra a la carga está dada por la ecuación

$$P_{sal} = V_S I_S \cos \theta_S \tag{2-7}$$

donde θ_S es el ángulo entre el voltaje secundario y la corriente secundaria. Dado que los ángulos del voltaje y de la corriente no se ven afectados por el transformador ideal, $\theta_P = \theta_S = \theta$. Los devanados primario y secundario de un transformador ideal tienen el *mismo factor de potencia*.

¿Cómo es la potencia que entra en el circuito primario del transformador ideal en comparación con la potencia que sale del otro lado? Es posible averiguarlo con una simple aplicación de las ecuaciones de voltaje y corriente [ecuaciones (2-4) y (2-5)]. La potencia que sale de un transformador es

$$P_{sal} = V_S I_S \cos \theta \tag{2-8}$$

Si se aplican las ecuaciones de relación de vueltas, se tiene que $V_S = V_P/a$ e $I_S = aI_P$; entonces

$$P_{sal} = \frac{V_P}{a}(aI_P) \cos \theta$$

$$P_{sal} = V_P I_P \cos \theta = P_{entr} \tag{2-9}$$

De esta manera, *la potencia de salida de un transformador ideal es igual a la potencia de entrada*.

Se aplica la misma relación a la potencia reactiva Q y a la potencia aparente S:

$$Q_{entr} = V_P I_P \operatorname{sen} \theta = V_S I_S \operatorname{sen} \theta = Q_{sal} \tag{2-10}$$

y

$$S_{entr} = V_P I_P = V_S I_S = S_{sal} \tag{2-11}$$

Transformación de impedancia a través de un transformador

La *impedancia* de un dispositivo o un elemento se define como la relación entre el voltaje fasorial que actúa a través de él y la corriente fasorial que fluye a través de él:

$$Z_L = \frac{\mathbf{V}_L}{\mathbf{I}_L} \tag{2-12}$$

Una de las propiedades interesantes de un transformador es que, debido a que cambia los niveles de voltaje y corriente, cambia la *relación* entre el voltaje y la corriente y, por lo tanto, la impedancia aparente de un elemento. Para entender mejor esta idea observe la figura 2-5. Si la corriente secundaria es $\mathbf{I}_S$ y el voltaje secundario es $\mathbf{V}_S$, entonces la impedancia de la carga está dada por

$$Z_L = \frac{\mathbf{V}_S}{\mathbf{I}_S} \tag{2-13}$$

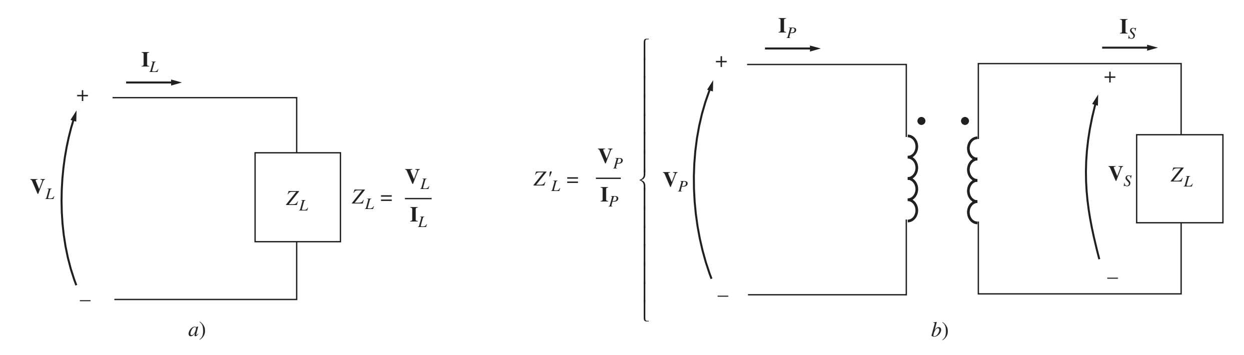


FIGURA 2-5 *a*) Definición de impedancia. *b*) La impedancia a través de un transformador.

La impedancia aparente del circuito primario del transformador es

$$Z'_L = \frac{\mathbf{V}_P}{\mathbf{I}_P} \tag{2-14}$$

Ya que el voltaje primario se puede expresar como

$$\mathbf{V}_P = a\mathbf{V}_S$$

y la corriente primaria se puede expresar como

$$\mathbf{I}_P = \frac{\mathbf{I}_S}{a}$$

la impedancia aparente del primario es

$$Z'_L = \frac{\mathbf{V}_P}{\mathbf{I}_P} = \frac{a\mathbf{V}_S}{\mathbf{I}_S/a} = a^2\frac{\mathbf{V}_S}{\mathbf{I}_S}$$

$$Z'_L = a^2 Z_L \tag{2-15}$$

Con un transformador es posible hacer coincidir la magnitud de la impedancia de la carga con la impedancia de la fuente simplemente con seleccionar la relación de vueltas apropiada.

Análisis de circuitos que contienen transformadores ideales

Si un circuito contiene un transformador ideal, la forma más fácil de analizar los voltajes y las corrientes del circuito es reemplazar la porción del circuito en un lado del transformador por un circuito equivalente con las mismas características terminales. Una vez que se ha sustituido el circuito equivalente en uno de los lados, se pueden encontrar los voltajes y las corrientes del circuito nuevo (sin el transformador). En la porción del circuito que no se reemplazó, las soluciones que se obtengan serán los valores correctos de voltaje y corriente del circuito original. Luego, la relación de las vueltas del transformador se puede utilizar para determinar los voltajes y corrientes del otro lado del transformador. El proceso de reemplazar un lado del transformador por su equivalente al otro lado del nivel de voltaje se conoce como *referir* el primer lado del transformador al segundo.

¿Cómo se conforma el circuito equivalente? Su forma es exactamente la misma que la del circuito original. Los valores de voltajes en el lado que se reemplaza están dados por la ecuación (2-4) y los valores de la impedancia por la ecuación (2-15). La dirección de las polaridades de las fuentes de voltaje en el circuito equivalente se invertirá con respecto al circuito original si se invierten los puntos en un lado de los devanados del transformador con respecto a los puntos en el otro lado de los devanados del transformador.

En el siguiente ejemplo se ilustra la solución para los circuitos que contienen transformadores ideales.

EJEMPLO 2-1

Un sistema de potencia monofásico consta de un generador de 480 V y 60 Hz que suministra potencia a una carga $Z_{carga} = 4 + j3\ \Omega$ a través de una línea de transmisión de impedancia $Z_{línea} = 0.18 + j0.24\ \Omega$. Conteste las siguientes preguntas sobre el sistema.

a) Si el sistema de potencia es exactamente como se describe en la figura 2-6*a*), ¿cuál será el voltaje en la carga? ¿Cuáles serán las pérdidas en la línea de transmisión?

b) Suponga que un transformador elevador 1:10 se coloca en el extremo del generador de la línea de transmisión y que un transformador reductor 10:1 se coloca en el extremo de carga de la línea de transmisión (figura 2-6*b*). ¿Cuál será ahora el voltaje de la carga? ¿Cuáles serán las pérdidas en la línea de transmisión?

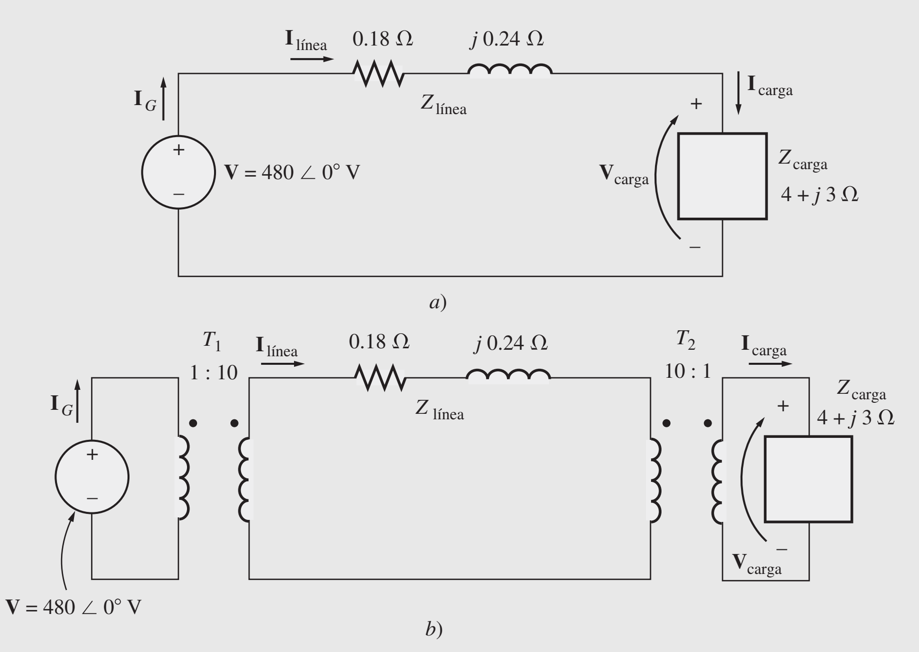


FIGURA 2-6 El sistema de potencia del ejemplo 2-1 *a*) sin transformador y *b*) con un transformador en los extremos de la línea de transmisión.

Solución

a) La figura 2-6*a*) muestra un sistema de potencia sin transformadores. Aquí $\mathbf{I}_G = \mathbf{I}_{línea} = \mathbf{I}_{carga}$. La corriente de la línea en este sistema está dada por

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_{línea} &= \frac{\mathbf{V}}{Z_{línea} + Z_{carga}} \\
&= \frac{480\angle 0^\circ\ \text{V}}{(0.18\ \Omega + j0.24\ \Omega) + (4\ \Omega + j3\ \Omega)} \\
&= \frac{480\angle 0^\circ}{4.18 + j3.24} = \frac{480\angle 0^\circ}{5.29\angle 37.8^\circ} \\
&= 90.8\angle -37.8^\circ\ \text{A}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el voltaje en la carga es

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_{carga} &= \mathbf{I}_{línea} Z_{carga} \\
&= (90.8\angle -37.8^\circ\ \text{A})(4\ \Omega + j3\ \Omega) \\
&= (90.8\angle -37.8^\circ\ \text{A})(5\angle 36.9^\circ\ \Omega) \\
&= 454\angle -0.9^\circ\ \text{V}
\end{aligned}$$

y las pérdidas en la línea son

$$P_{\text{pérdida}} = (I_{\text{línea}})^2 R_{\text{línea}}$$
$$= (90.8\text{ A})^2 (0.18\ \Omega) = 1\,484\text{ W}$$

b) La figura 2-6*b*) muestra un sistema de potencia con los transformadores. Para analizar este sistema se requiere convertirlo a un nivel de voltaje en común. Esto se logra en dos pasos:

1. Eliminar el transformador T_2 refiriendo la carga al nivel de voltaje de la línea de transmisión.
2. Eliminar el transformador T_1 refiriendo los elementos de la línea de transmisión y la carga equivalente al voltaje de la línea de transmisión del lado de la fuente.

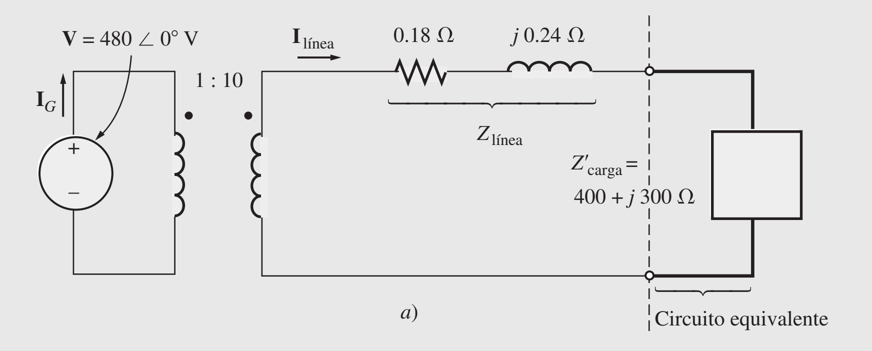
El valor de la impedancia de la carga cuando se refleja en el sistema de transmisión del voltaje es

$$Z'_{\text{carga}} = a^2 Z_{\text{carga}}$$
$$= \left(\frac{10}{1}\right)^2 (4\ \Omega + j3\ \Omega)$$
$$= 400\ \Omega + j300\ \Omega$$

La impedancia total en el nivel de la línea de transmisión ahora es

$$Z_{\text{eq}} = Z_{\text{línea}} + Z'_{\text{carga}}$$
$$= 400.18 \ + j300.24\ \Omega = 500.3\angle 36.88°\ \Omega$$

En la figura 2-7*a*) se muestra el circuito equivalente. La impedancia total en el nivel de la línea de transmisión ($Z_{\text{línea}} + Z'_{\text{carga}}$) ahora se refleja a través de T_1 al nivel del voltaje de la fuente.



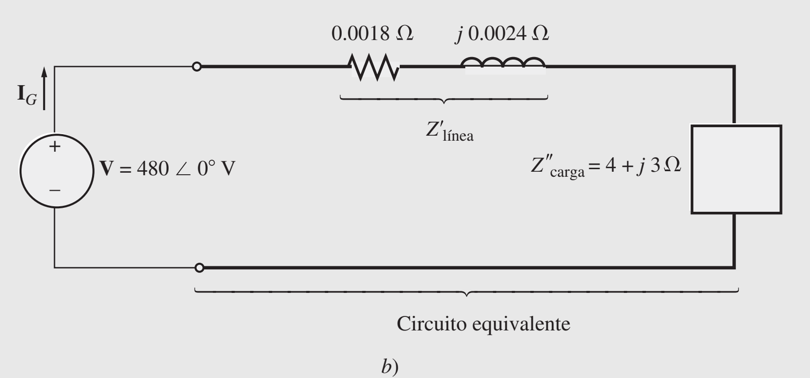


FIGURA 2-7 *a*) Sistema con la carga referida al nivel de voltaje del sistema de transmisión. *b*) Sistema con la carga y la línea de transmisión referidas al nivel de voltaje del generador.

$$
\begin{aligned}
Z'_{\text{eq}} &= a^2 Z_{\text{eq}} \\
&= a^2(Z_{\text{línea}} + Z'_{\text{carga}}) \\
&= \left(\frac{1}{10}\right)^2(0.18\ \Omega + j0.24\ \Omega + 400\ \Omega + j300\ \Omega) \\
&= (0.0018\ \Omega + j0.0024\ \Omega + 4\ \Omega + j3\ \Omega) \\
&= 5.003\ \angle 36.88°\ \Omega
\end{aligned}
$$

Observe que $Z''_{\text{carga}} = 4 + j3\ \Omega$ y $Z'_{\text{línea}} = 0.0018 + j0.0024\ \Omega$. El circuito equivalente resultante se muestra en la figura 2-7*b*). La corriente en el generador es

$$
\mathrm{I}_G = \frac{480\ \angle 0°\ \text{V}}{5.003\ \angle 36.88°\ \Omega} = 95.94\ \angle -36.88°\ \text{A}
$$

Si se conoce la corriente $\mathbf{I}_G$, se puede trabajar hacia atrás y encontrar $\mathbf{I}_{\text{línea}}$ e $\mathbf{I}_{\text{carga}}$. El cálculo a través de T_1 da como resultado

$$
\begin{aligned}
N_{P1}\mathbf{I}_G &= N_{S1}\mathbf{I}_{\text{línea}} \\
\mathbf{I}_{\text{línea}} &= \frac{N_{P1}}{N_{S1}}\mathbf{I}_G \\
&= \frac{1}{10}(95.94\ \angle -36.88°\ \text{A}) = 9.594\ \angle -36.88°\ \text{A}
\end{aligned}
$$

El cálculo a través de T_2 da como resultado

$$
\begin{aligned}
N_{P2}\mathbf{I}_{\text{línea}} &= N_{S2}\mathbf{I}_{\text{carga}} \\
\mathbf{I}_{\text{carga}} &= \frac{N_{P2}}{N_{S2}}\mathbf{I}_{\text{línea}} \\
&= \frac{10}{1}(9.594\ \angle -36.88°\ \text{A}) = 95.94\ \angle -36.88°\ \text{A}
\end{aligned}
$$

Ahora es posible contestar las preguntas originales. El voltaje de la carga está dada por

$$
\begin{aligned}
\mathbf{V}_{\text{carga}} &= \mathbf{I}_{\text{carga}} Z_{\text{carga}} \\
&= (95.94\ \angle -36.88°\ \text{A})(5\ \angle 36.87°\ \Omega) \\
&= 479.7\ \angle -0.01°\ \text{V}
\end{aligned}
$$

y las pérdidas en la línea están dadas por

$$
\begin{aligned}
P_{\text{pérdida}} &= (I_{\text{línea}})^2 R_{\text{línea}} \\
&= (9.594\ \text{A})^2\ (0.18\ \Omega) = 16.7\ \text{W}
\end{aligned}
$$

Nótese que al elevar el voltaje de transmisión del sistema de potencia se reducen las pérdidas de transmisión casi 90 veces. Además, el voltaje de la carga cayó mucho menos en el sistema con transformadores en comparación con el sistema sin transformadores. Este simple ejemplo ilustra la ventaja de utilizar líneas de transmisión con voltajes más altos, así como la extrema importancia de los transformadores en los sistemas de potencia modernos.

Los sistemas de potencia reales generan potencia eléctrica a voltajes dentro del rango de 4 a 30 kV. Luego usan *transformadores elevadores* para subir el voltaje a un nivel mucho más alto (por ejemplo 500 kV) para la transmisión a largas distancias, y *transformadores reductores* para reducir el voltaje a un nivel razonable para la distribución y uso final. Como hemos visto en el ejemplo 2.1, esto puede disminuir notablemente las pérdidas de transmisión en el sistema de potencia.

2.4 TEORÍA DE OPERACIÓN DE LOS TRANSFORMADORES MONOFÁSICOS REALES

Los transformadores ideales que se describen en la sección 2.3 por supuesto que no se pueden fabricar. Los que sí se pueden hacer son transformadores reales: dos o más bobinas de alambre enrollado alrededor de un núcleo ferromagnético. Las características de un transformador real son muy parecidas a las de un transformador ideal, pero sólo hasta cierto punto. Esta sección se refiere a la conducta de los transformadores reales.

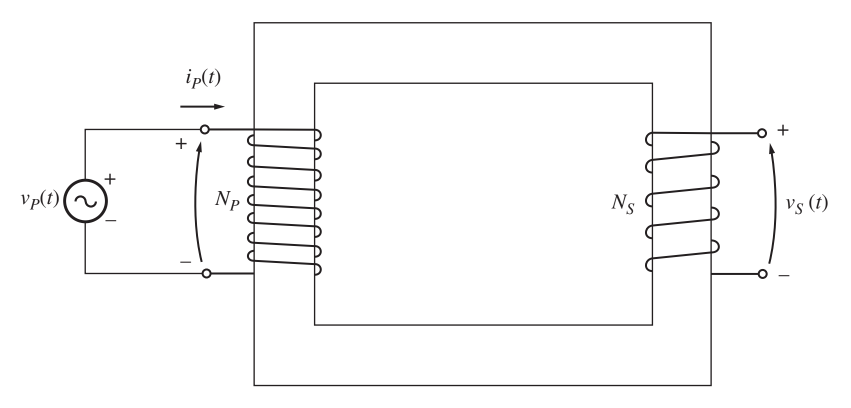


FIGURA 2-8 Dibujo de un transformador real sin carga en el secundario.

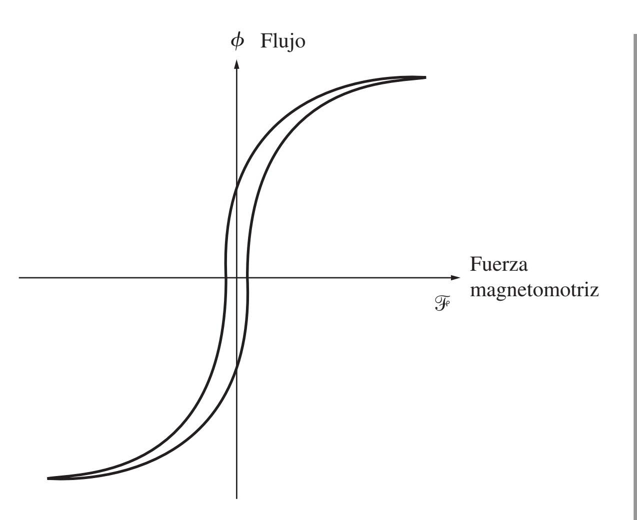


FIGURA 2-9 Curva de histéresis del transformador.

Observe la figura 2-8 para entender la operación de un transformador real. En la figura se puede ver un transformador que consta de dos bobinas de alambre enrollado alrededor del núcleo de un transformador. El transformador primario está conectado a una fuente de potencia de ca y el devanado secundario está abierto. La curva de histéresis del transformador se muestra en la figura 2-9.

La base de la operación de un transformador se puede derivar de la ley de Faraday:

$$e_{\text{ind}} = \frac{d\lambda}{dt} \tag{1-41}$$

donde λ es el flujo concatenado en la bobina a través de la cual se induce el voltaje. El flujo concatenado λ es la suma del flujo que pasa a través de cada vuelta en todas las vueltas de la bobina:

$$\lambda = \sum_{i=1}^{N} \phi_i \tag{1-42}$$

El flujo concatenado total a través de una bobina no es exactamente $N\phi$, donde N es el número de vueltas en la bobina, puesto que el flujo que pasa a través de cada vuelta de la bobina es ligeramente diferente del flujo en las demás vueltas, lo cual depende de la posición de la vuelta dentro de la bobina.

Sin embargo, es posible definir el flujo *promedio* por vuelta en una bobina. Si el flujo ligado total en todas las vueltas de la bobina es λ y si hay N vueltas, entonces el *flujo promedio por vuelta* está dado por

$$\overline{\phi} = \frac{\lambda}{N} \tag{2-16}$$

y la ley de Faraday se puede escribir de la siguiente manera

$$e_{\text{ind}} = N\frac{d\overline{\phi}}{dt} \tag{2-17}$$

Relación de voltaje en el transformador

Si el voltaje de la fuente de la figura 2-8 es $v_P(t)$, entonces ese voltaje se aplica directamente a través de las bobinas del devanado primario del transformador. ¿Cómo reaccionará el transformador a este voltaje aplicado? La ley de Faraday explica lo que pasará. Cuando se resuelve la ecuación (2-17) para el flujo promedio presente en el devanado primario del transformador, y la resistencia del devanado es ignorada, el resultado es

$$\bar{\phi}_P = \frac{1}{N_P}\int v_P(t)\,dt \tag{2-18}$$

Esta ecuación establece que el flujo promedio en el devanado es proporcional a la integral del voltaje aplicado al devanado y la constante de proporcionalidad es la inversa del número de vueltas del devanado primario $1/N_P$.

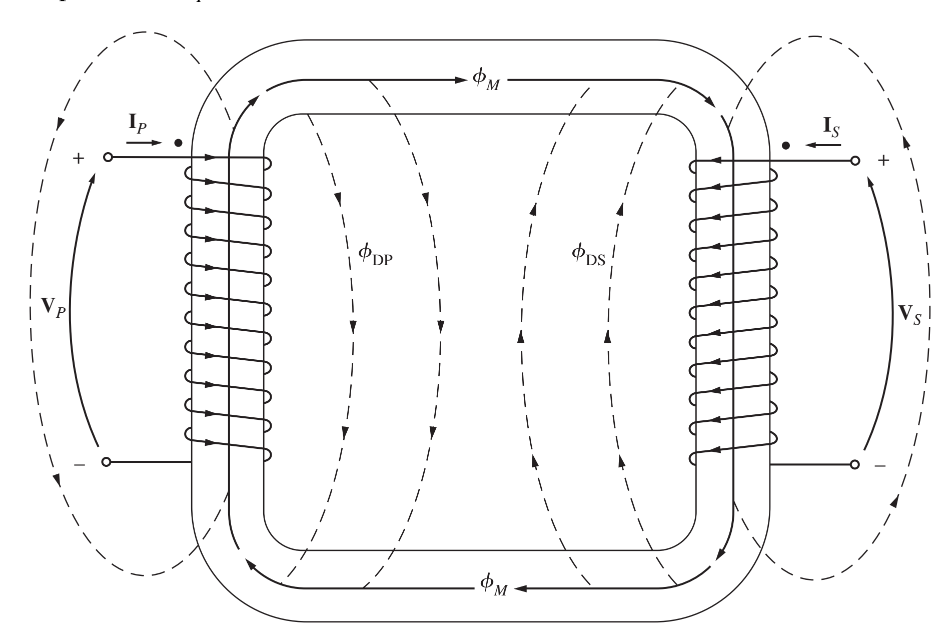


FIGURA 2-10 Flujo mutuo y disperso en el núcleo de un transformador.

Este flujo está presente en la *bobina primaria* del transformador. ¿Qué efecto tiene en la bobina secundaria del transformador? El efecto depende de qué tanto flujo llegue a la bobina secundaria. No todo el flujo que se produce en la bobina primaria pasa a través de la bobina secundaria; algunas de las líneas de flujo abandonan el núcleo de hierro y pasan a través del aire (véase la figura 2-10). La porción del flujo que pasa a través de una de las bobinas del transformador, pero no a través de la otra, se llama *flujo disperso*. El flujo en la bobina primaria del transformador se puede dividir en dos componentes: un *flujo mutuo* que permanece en el núcleo y une ambos devanados, y un *flujo disperso* mínimo que pasa a través del devanado primario pero regresa a través del aire, sin cruzar por el devanado secundario:

$$\bar{\phi}_P = \phi_M + \phi_{DP} \tag{2-19}$$

donde

$\bar{\phi}_P$ = flujo promedio primario total
ϕ_M = componente del flujo que une las bobinas primarias y secundarias
ϕ_{DP} = flujo disperso en el devanado primario

Hay una división similar del flujo en el devanado secundario entre flujo mutuo y flujo disperso que pasa a través del devanado secundario pero regresa a través del aire sin tocar el devanado primario:

$$\bar{\phi}_S = \phi_M + \phi_{DS} \tag{2-20}$$

donde

$\bar{\phi}_S$ = flujo promedio secundario total
ϕ_M = componente del flujo que une las bobinas primarias y secundarias
ϕ_{DS} = flujo disperso del devanado secundario

Con la división del flujo primario promedio en los componentes mutuo y disperso, la ley de Faraday para el circuito primario se puede expresar como

$$\begin{aligned} v_P(t) &= N_P \frac{d\bar{\phi}_P}{dt} \\ &= N_P \frac{d\phi_M}{dt} + N_P \frac{d\phi_{DP}}{dt} \end{aligned} \quad \textbf{(2-21)}$$

El primer término de esta expresión se puede llamar $e_P(t)$ y el segundo término se puede llamar $e_{DP}(t)$. De este modo, la ecuación (2-21) puede escribirse así

$$v_P(t) = e_P(t) + e_{DP}(t) \quad \textbf{(2-22)}$$

El voltaje en la bobina secundaria del transformador también se puede expresar en términos de la ley de Faraday como

$$\begin{aligned} v_S(t) &= N_S \frac{d\bar{\phi}_S}{dt} \\ &= N_S \frac{d\phi_M}{dt} + N_S \frac{d\phi_{DS}}{dt} \quad \textbf{(2-23)} \\ &= e_S(t) + e_{DS}(t) \quad \textbf{(2-24)} \end{aligned}$$

El voltaje primario *debido al flujo mutuo* está dado por

$$e_P(t) = N_P \frac{d\phi_M}{dt} \quad \textbf{(2-25)}$$

y el voltaje secundario *debido al flujo mutuo* está dado por

$$e_S(t) = N_S \frac{d\phi_M}{dt} \quad \textbf{(2-26)}$$

Nótese de estas dos ecuaciones que

$$\frac{e_P(t)}{N_P} = \frac{d\phi_M}{dt} = \frac{e_S(t)}{N_S}$$

Por lo tanto,

$$\frac{e_P(t)}{e_S(t)} = \frac{N_P}{N_S} = a \quad \textbf{(2-27)}$$

Esta ecuación significa que *la razón entre el voltaje primario causado por el flujo mutuo y el voltaje secundario causado por el flujo mutuo es igual a la relación de vueltas del transformador*. Puesto que en un transformador bien diseñado $\phi_M \gg \phi_{DP}$ y $\phi_M \gg \phi_{DS}$ la relación del voltaje total en el primario de un transformador con el voltaje en el secundario de un transformador es aproximadamente

$$\frac{v_P(t)}{v_S(t)} = \frac{N_P}{N_S} = a \quad \textbf{(2-28)}$$

Mientras más pequeños sean los flujos dispersos del transformador, más exacta será la aproximación a la relación de voltajes del transformador ideal que se analizó en la sección 2.3.

Corriente de magnetización en un transformador real

Cuando se conecta una fuente de potencia de ca a un transformador, como se muestra en la figura 2-8, la corriente fluye en su circuito primario, *incluso si el circuito secundario está abierto*. Esta corriente es la que se requiere para producir flujo en un núcleo ferromagnético real, como se explica en el capítulo l. Consta de dos componentes:

1. La *corriente de magnetización* i_M, que es la que se requiere para producir el flujo en el núcleo del transformador.
2. La *corriente de pérdidas en el núcleo* i_{h+e}, que es la que se requiere para compensar la histéresis y las pérdidas de corrientes parásitas.

La figura 2-11 muestra la curva de magnetización del núcleo de un transformador típico. Si se conoce el flujo en el núcleo del transformador, entonces la magnitud de la corriente de magnetización se puede establecer directamente con base en la figura 2-11.

Si se ignoran por el momento los efectos del flujo disperso, se puede ver que el flujo promedio en el núcleo está dado por

$$\bar{\phi}_P = \frac{1}{N_P}\int v_P(t)dt \tag{2-18}$$

Si el voltaje primario está dado por la expresión $v_P(t) = V_M \cos \omega t$ V, entonces el flujo resultante debe ser

$$\begin{aligned}\bar{\phi}_P &= \frac{1}{N_P}\int V_M \cos \omega t \, dt \\ &= \frac{V_M}{\omega N_P} \operatorname{sen} \omega t \quad \text{Wb}\end{aligned} \tag{2-29}$$

Si los valores de la corriente que se requiere para producir un flujo dado (figura 2-11*a*) se comparan con el flujo en el núcleo en otros momentos, es posible hacer una gráfica de la corriente de magnetización del devanado en el núcleo. Esta gráfica se muestra en la figura 2-11*b*). Nótense los siguientes puntos sobre la corriente de magnetización:

1. La corriente de magnetización en el transformador no es sinusoidal. Los componentes de las frecuencias más altas en la corriente de magnetización se deben a la saturación magnética en el núcleo del transformador.
2. Una vez que el flujo pico alcanza el punto de saturación en el núcleo, un pequeño incremento en el flujo pico requiere un gran aumento en la corriente de magnetización pico.
3. El componente fundamental de la corriente de magnetización atrasa 90° el voltaje aplicado al núcleo.
4. Los componentes de las frecuencias más altas en la corriente de magnetización pueden ser bastante grandes en comparación con el componente fundamental. En general, cuanto más fuerte sea el proceso de saturación en el núcleo, mayores serán los componentes armónicos.

El otro componente de la corriente de vacío en el transformador es la corriente que se requiere para compensar la histéresis y las corrientes parásitas en el núcleo. Es decir, la corriente de pérdidas en el núcleo. Suponga que el flujo en el núcleo es sinusoidal; puesto que las corrientes parásitas en el núcleo son proporcionales a $d\phi/dt$, las corrientes parásitas son mayores cuando el flujo en el núcleo pasa por 0 Wb. Por lo tanto, la corriente de pérdidas en el núcleo es máxima cuando el flujo pasa por cero. La corriente total que se requiere para compensar las pérdidas en el núcleo se muestra en la figura 2-12.

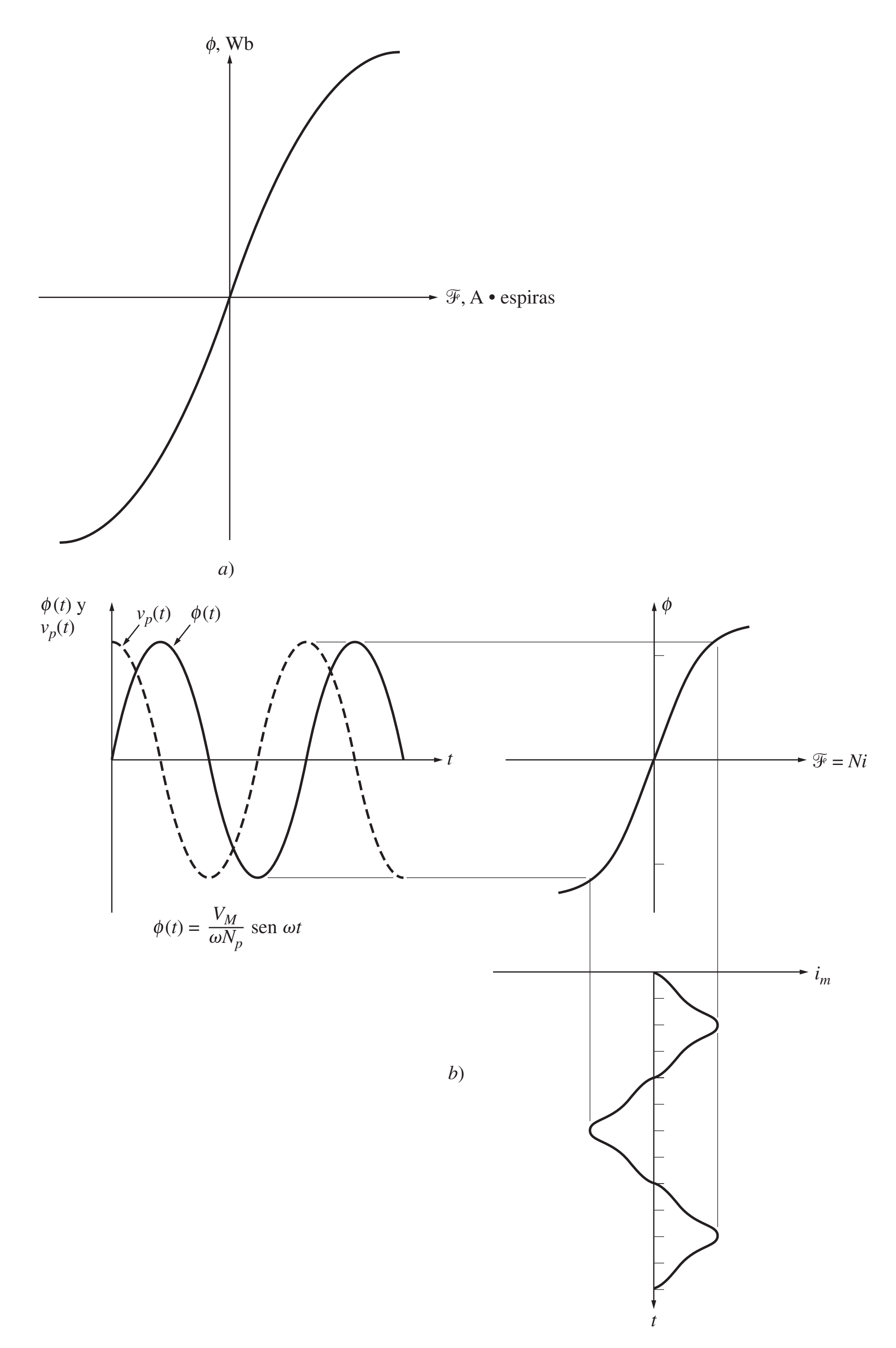


FIGURA 2-11 *a*) Curva de magnetización del núcleo de un transformador. *b*) Corriente de magnetización causada por el flujo en el núcleo del transformador.

Hay que tomar en cuenta los siguientes aspectos de la corriente de pérdidas en el núcleo.

1. La corriente de pérdidas en el núcleo es no lineal debido a los efectos no lineales de la histéresis.
2. El componente fundamental de la corriente de pérdidas en el núcleo está en fase con el voltaje aplicado al núcleo.

La corriente de vacío total en el núcleo se llama *corriente de excitación* del transformador. Es simplemente la suma de la corriente de magnetización y de la corriente de pérdidas en el núcleo:

$$i_{ex} = i_m + i_{h+e} \tag{2-30}$$

La corriente de excitación total en el núcleo típico de un transformador se muestra en la figura 2-13. En un transformador de potencia bien diseñado, la corriente de excitación es mucho más pequeña que la corriente de carga total del transformador.

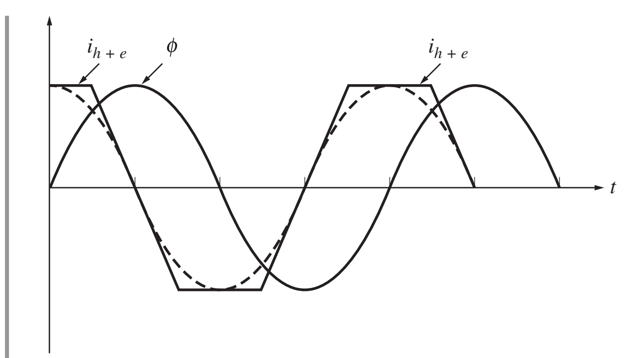


FIGURA 2-12 Corriente de pérdidas en el núcleo de un transformador.

Relación de corriente en un transformador y la convención de puntos

Supóngase ahora que se conecta una carga al secundario del transformador. El circuito resultante se muestra en la figura 2-14. Nótense los puntos en los devanados del transformador. Al igual que en el transformador ideal antes descrito, los puntos ayudan a determinar la polaridad de los voltajes y las corrientes en el núcleo sin tener que examinar físicamente los devanados. El significado físico de la convención de puntos es que *una corriente que fluye hacia el extremo de un devanado marcado con un punto produce una fuerza magnetomotriz positiva* $\mathcal{F}$, mientras que una corriente que fluye hacia el extremo de un devanado no marcado con un punto produce una fuerza magnetomotriz negativa. Por lo tanto, dos corrientes que fluyen hacia los extremos marcados con un punto de sus respectivos devanados producen fuerzas magnetomotrices que se suman. Si una corriente fluye hacia el extremo de un devanado marcado con un punto y otra fluye hacia afuera de un extremo marcado con un punto, entonces las fuerzas magnetomotrices se cancelan entre sí.

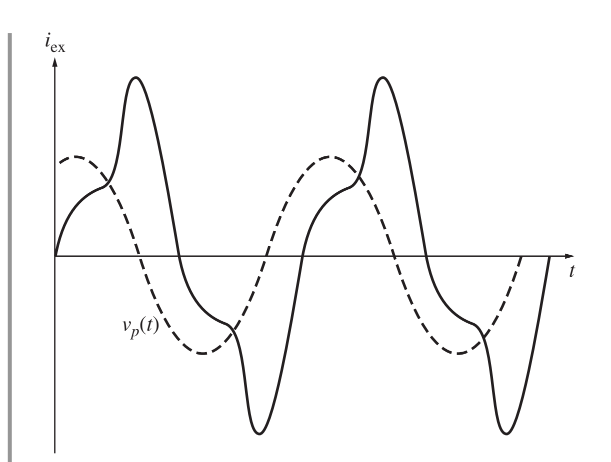


FIGURA 2-13 Corriente de excitación total en un transformador.

En la situación que se muestra en la figura 2-14, la corriente primaria produce una fuerza magnetomotriz positiva $\mathcal{F}_P = N_P i_P$, y la corriente secundaria produce una fuerza magnetomotriz negativa $\mathcal{F}_S = -N_S i_S$. Por lo tanto, la fuerza magnetomotriz neta en el núcleo debe ser

$$\mathcal{F}_{neta} = N_P i_P - N_S i_S \tag{2-31}$$

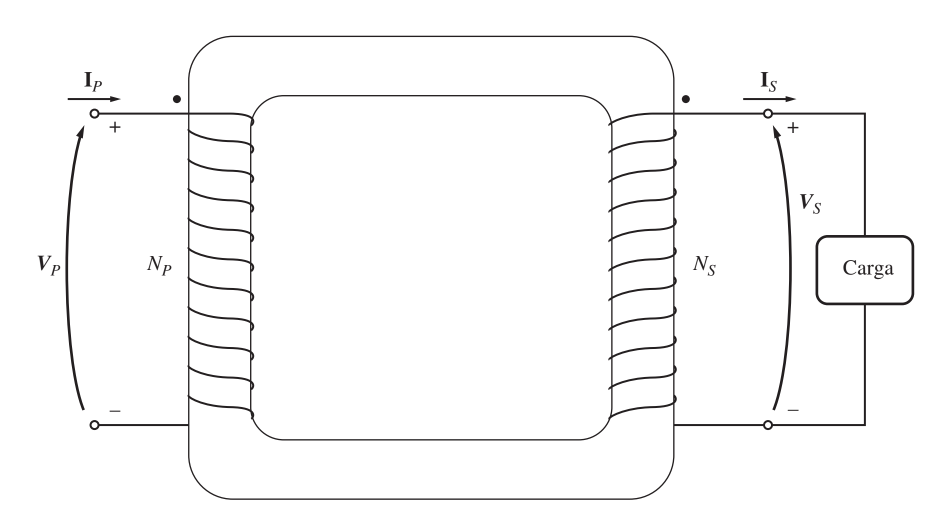


FIGURA 2-14 Un transformador real con una carga conectada a su secundario.

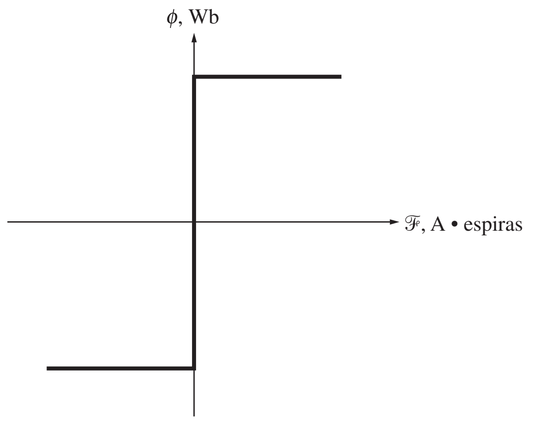


FIGURA 2-15 Curva de magnetización de un transformador ideal.

Esta fuerza magnetomotriz neta debe producir el flujo neto en el núcleo, por lo que la fuerza magnetomotriz neta debe ser igual a

$$\mathscr{F}_{\text{neta}} = N_P i_P - N_S i_S = \phi \mathscr{R} \tag{2-32}$$

donde $\mathscr{R}$ es la reluctancia del núcleo del transformador. Debido a que la reluctancia del núcleo de un transformador bien diseñado es muy pequeña (casi cero) hasta que se satura el núcleo, la relación entre la corriente primaria y la secundaria es aproximadamente

$$\mathscr{F}_{\text{neta}} = N_P i_P - N_S i_S \approx 0 \tag{2-33}$$

siempre y cuando el núcleo no esté saturado. Por lo tanto,

$$N_P i_P \approx N_S i_S \tag{2-34}$$

o

$$\frac{i_P}{i_S} \approx \frac{N_S}{N_P} = \frac{1}{a} \tag{2-35}$$

El hecho de que la fuerza magnetomotriz en el núcleo es casi cero da significado a la convención de puntos que expusimos en la sección 2.3. Para que la fuerza magnetomotriz sea casi cero, la corriente debe fluir *hacia adentro en un extremo marcado con punto* y *hacia afuera del otro extremo marcado con punto*. Los voltajes deben generarse de la misma manera con respecto a los puntos en cada devanado para impulsar las corrientes en la dirección que se requiere. (La polaridad de los voltajes también se puede determinar con la ley de Lenz si la conformación de las bobinas del transformador es visible.)

¿Qué suposiciones se deben hacer para convertir un transformador real en el transformador ideal descrito previamente? Las siguientes:

1. El núcleo no debe contener histéresis ni corrientes parásitas.
2. La curva de magnetización debe tener la forma que se muestra en la figura 2-15. Nótese que en el caso de un núcleo no saturado la fuerza magnetomotriz neta es $\mathscr{F}_{\text{neta}} = 0$, lo cual implica que $N_P i_P = N_S i_S$.
3. El flujo disperso en el núcleo debe ser cero, lo cual implica que todo el flujo en el núcleo une a ambos devanados.
4. La resistencia de los devanados del transformador debe ser cero.

Aunque estas condiciones nunca se cumplen del todo, los transformadores de potencia bien diseñados están cerca de lograrlo.

2.5 EL CIRCUITO EQUIVALENTE DE UN TRANSFORMADOR

Las pérdidas que ocurren en los transformadores reales deben tenerse en cuenta para obtener un modelo exacto del comportamiento de un transformador. Los principales aspectos que se deben considerar en la construcción de un modelo como éste son:

1. *Pérdidas en el cobre* (I^2R). Las pérdidas en el cobre son causadas por el calentamiento resistivo *en los devanados del primario y secundario*. Son proporcionales al cuadrado de la corriente en los devanados.
2. *Pérdidas por corrientes parásitas*. Las pérdidas por corrientes parásitas son provocadas por el calentamiento resistivo *en el núcleo* del transformador. Son proporcionales al cuadrado del voltaje aplicado al transformador.
3. *Pérdidas por histéresis*. Las pérdidas por histéresis están asociadas con la reubicación de los dominios magnéticos en el núcleo durante cada semiciclo, como se explica en el capítulo l. Son una función compleja y no lineal del voltaje aplicado al transformador.

4. *Flujo disperso*. Los flujos ϕ_{DP} y ϕ_{DS} que escapan del núcleo y pasan a través de sólo uno de los devanados del transformador son flujos dispersos. Estos flujos que escapan producen una *autoinductancia* en las bobinas primarias y secundarias; se deben tomar en cuenta los efectos de esta inductancia.

Circuito equivalente exacto de un transformador real

Es posible construir un circuito equivalente que tome en cuenta las principales imperfecciones de los transformadores reales. Se considera cada una de estas imperfecciones y se incluye su efecto en el modelo de transformador.

El efecto más sencillo de evaluar son las pérdidas en el cobre. Éstas son pérdidas resistivas en los devanados primario y secundario del núcleo del transformador; equivalen a la colocación de un resistor R_P en el circuito primario del transformador y un resistor R_S en el circuito secundario.

Como se explicó en la sección 2.4, el flujo disperso en los devanados primarios ϕ_{DP} produce un voltaje ϕ_{DP} dado por

$$e_{DP}(t) = N_P \frac{d\phi_{DP}}{dt} \tag{2-36a}$$

y el flujo disperso en los devanados secundarios ϕ_{DS} produce un voltaje e_{DS} dado por

$$e_{DS}(t) = N_S \frac{d\phi_{DS}}{dt} \tag{2-36b}$$

Debido a que buena parte del recorrido del flujo disperso es a través del aire, y a que el aire tiene una reluctancia constante mucho mayor que la del núcleo, el flujo ϕ_{DP} es directamente proporcional a la corriente en el circuito primario i_P, mientras que el flujo ϕ_{DS} es directamente proporcional a la corriente secundaria i_S:

$$\phi_{DP} = (\mathcal{P}N_P)\, i_P \tag{2-37a}$$

$$\phi_{DS} = (\mathcal{P}N_S)\, i_S \tag{2-37b}$$

donde

$\mathcal{P}$ = permanencia del camino del flujo
N_P = número de vueltas en la bobina primaria
N_S = número de vueltas en la bobina secundaria

Sustituyendo la ecuación (2-37) en la ecuación (2-36) se tiene

$$e_{DP}(t) = N_P \frac{d}{dt}(\mathcal{P}N_P)i_P = N_P^2 \mathcal{P} \frac{di_P}{dt} \tag{2-38a}$$

$$e_{DS}(t) = N_S \frac{d}{dt}(\mathcal{P}N_S)i_S = N_S^2 \mathcal{P} \frac{di_S}{dt} \tag{2-38b}$$

Las constantes en estas ecuaciones se pueden agrupar; entonces

$$e_{DP}(t) = L_P \frac{di_P}{dt} \tag{2-39a}$$

$$e_{DS}(t) = L_S \frac{di_S}{dt} \tag{2-39b}$$

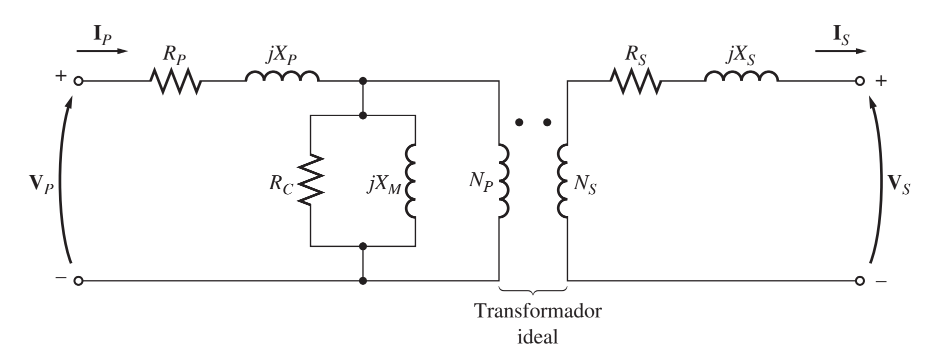


FIGURA 2-16 Modelo de un transformador real.

donde $L_P = N_P^2 \mathscr{P}$ es la autoinductancia de la bobina primaria y $L_S = N_S^2 \mathscr{P}$ es la autoinductancia de la bobina secundaria. Por lo tanto, el flujo disperso se considera como si fueran inductores primarios y secundarios.

¿Cómo se puede hacer un modelo de los efectos de la excitación en el núcleo? La corriente de magnetización i_m es proporcional (en la región no saturada) al voltaje aplicado al núcleo y tiene 90° *de retraso con respecto al voltaje aplicado*, por lo que se puede modelar por una reactancia X_M conectada a través de la fuente de voltaje primaria. La corriente de pérdidas en el núcleo i_{h+e} es una corriente proporcional al voltaje aplicado al núcleo que está *en fase con el voltaje aplicado*, por lo que se puede considerar como una resistencia R_N conectada a través de la fuente de voltaje primaria. (Se debe recordar que ambas corrientes en realidad no son lineales, por lo que la inductancia X_M y la resistencia R_N son, a lo sumo, aproximaciones de los efectos de excitación reales.)

El circuito equivalente resultante se muestra en la figura 2-16. En este circuito, R_p es la resistencia del devanado primario, X_P ($= \omega L_P$) la reactancia debida a la inductancia de fuga del primario, R_S la resistencia del devanado secundario, y X_S ($= \omega L_s$) la reactancia debida a la inductancia dispersa del secundario. La derivación de excitación se modela por la resistencia R_N (histéresis y pérdidas de núcleo) en paralelo con la reactancia X_M (la corriente de magnetización).

Observe que los elementos que forman la rama de excitación se colocan dentro de la resistencia primaria, R_P y la reactancia X_P. Esto se debe a que el voltaje que efectivamente se aplica al núcleo es realmente el voltaje de entrada menos las caídas internas de voltaje del devanado.

Aunque la figura 2-16 es un modelo exacto de un transformador, no es muy útil. Para analizar circuitos prácticos que contienen transformadores casi siempre es necesario convertir todo el circuito en uno equivalente con un solo nivel de voltaje. (Esta conversión se realizó en el ejemplo 2-1.) Por lo tanto, el circuito equivalente se debe referir a su lado primario o a su lado secundario en la solución de los problemas. La figura 2-17*a*) muestra el circuito equivalente del transformador referido a su lado primario y la figura 2-17*b*) muestra el circuito equivalente referido a su lado secundario.

Circuitos equivalentes aproximados de un transformador

Los modelos de transformadores que se han mostrado hasta ahora son más complejos de lo que se requiere en la práctica de la ingeniería para obtener buenos resultados. Una de las quejas principales sobre ellos es que la rama de excitación del modelo añade otro nodo al circuito que se analiza, lo que hace que la solución de éste sea más compleja de lo necesario. La rama de excitación tiene una corriente muy pequeña comparada con la corriente de carga de los transformadores. De hecho, la corriente de excitación es sólo aproximadamente de 2 a 3% de la corriente de carga total de los típicos transformadores de potencia. Por esta causa, se puede producir un circuito equivalente simplificado que funciona casi tan bien como el modelo original. Simplemente se mueve al frente del transformador la rama de excitación y las impedancias primarias y secundarias se dejan conectadas en serie. Se añaden estas impedancias dando como resultado el circuito equivalente aproximado que se muestra en la figura 2-18*a*) y *b*).

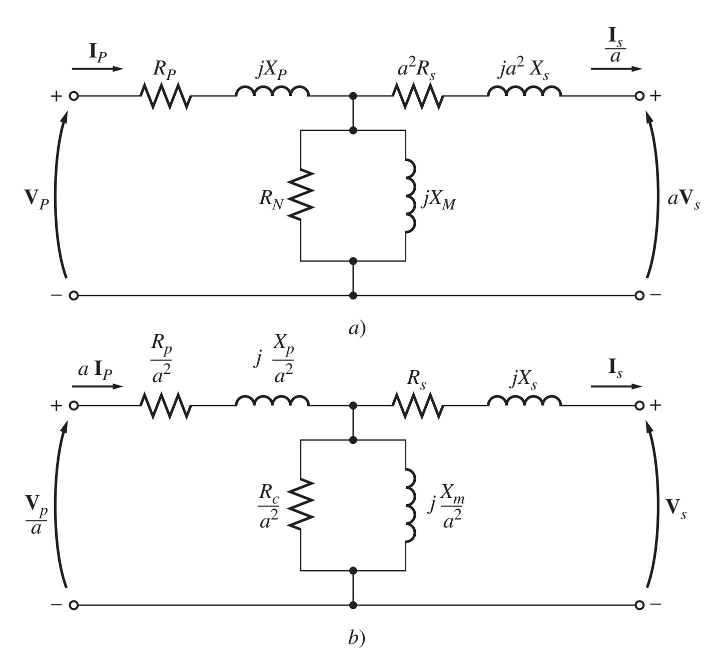


FIGURA 2-17 *a*) Modelo del transformador referido a su nivel de voltaje primario. *b*) El modelo del transformador referido a su nivel de voltaje secundario.

En ciertas aplicaciones se puede omitir por completo la rama de excitación sin causar graves errores. En estos casos, el circuito equivalente del transformador se reduce a los circuitos simples de la figura 2-18*c*) y *d*).

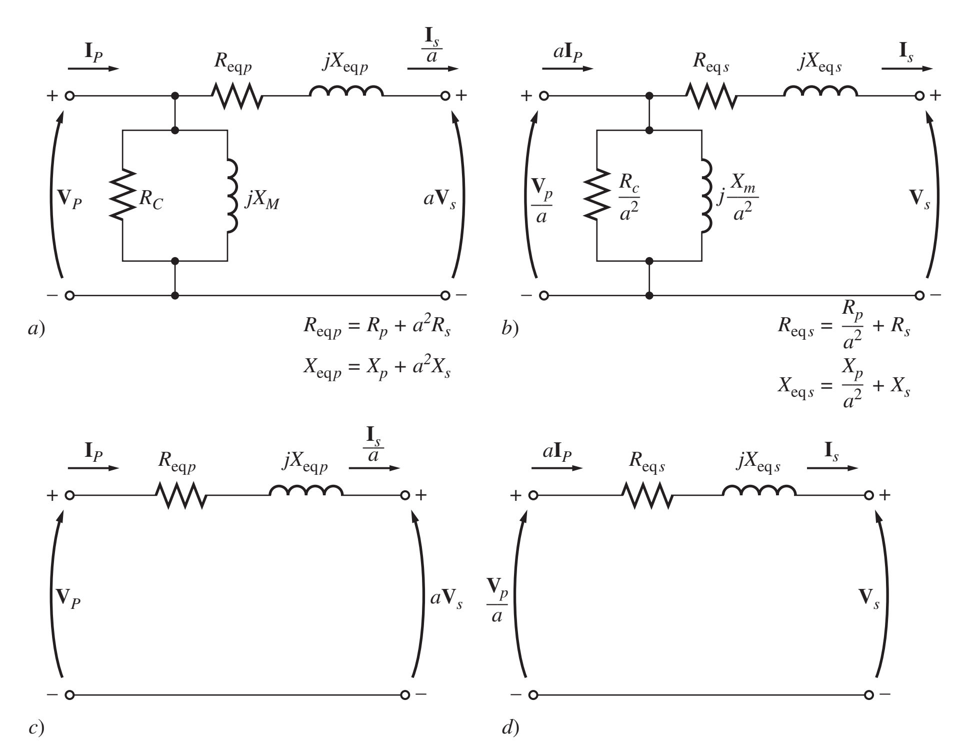


FIGURA 2-18 Modelos aproximados de transformadores. *a*) Referido al lado primario; *b*) referido al lado secundario; *c*) sin rama de excitación, referido al lado primario; *d*) sin rama de excitación, referido al lado secundario.

Determinación de los valores de los componentes en el modelo de transformador

Es posible determinar experimentalmente los valores de las impedancias y resistencias en el modelo del transformador. Se puede obtener una aproximación adecuada de estos valores con únicamente dos pruebas: la prueba de circuito abierto y la prueba de cortocircuito.

En la *prueba de circuito abierto* se deja abierto el circuito del devanado secundario del transformador y su devanado primario se conecta a una línea de voltaje pleno. Obsérvese el circuito equivalente en la figura 2-17. En las condiciones descritas toda la corriente de entrada debe fluir a través de la rama de excitación hacia el transformador. Los elementos en serie R_P y X_P son demasiado pequeños en comparación con R_N y X_M como para causar una caída significativa de voltaje, por lo que esencialmente todo el voltaje de entrada cae a través de la rama de excitación.

Las conexiones de la prueba de circuito abierto se muestran en la figura 2-19. Se aplica una línea de voltaje pleno al primario del transformador y se miden el voltaje de entrada, la corriente de entrada y la potencia de entrada al transformador. (Esta medición se hace normalmente en el lado de *bajo voltaje* del transformador, ya que los voltajes más bajos son más fáciles de trabajar.) Con esta información se puede determinar el factor de potencia de la corriente de entrada y, por lo tanto, la *magnitud* y el *ángulo* de la impedancia de excitación.

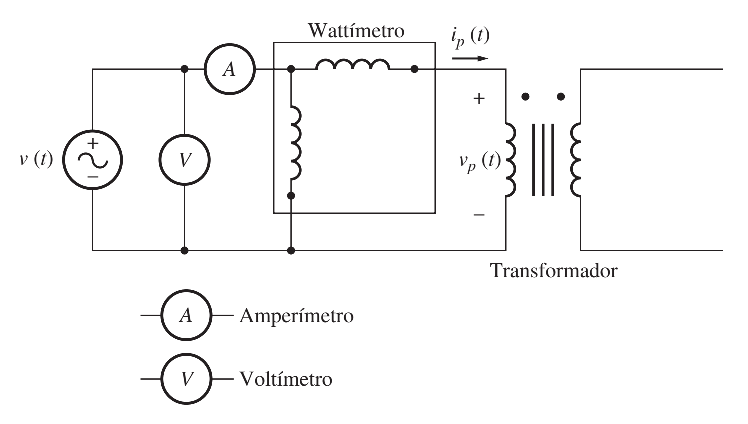


FIGURA 2-19 Conexión para la prueba de circuito abierto del transformador.

La manera más fácil de calcular los valores de R_N y de X_M consiste en estimar primero la *admitancia* de la rama de excitación. La conductancia del resistor de pérdidas en el núcleo está dada por

$$G_N = \frac{1}{R_N} \tag{2-40}$$

mientras que la susceptancia del inductor de magnetización está dada por

$$B_M = \frac{1}{X_M} \tag{2-41}$$

Puesto que los dos elementos están en paralelo, se suman sus admitancias y la admitancia de excitación total es

$$Y_E = G_N - jB_M \tag{2-42}$$

$$Y_E = \frac{1}{R_N} - j\frac{1}{X_M} \tag{2-43}$$

La *magnitud* de la admitancia de excitación (referida al lado del transformador usado para la medición) puede calcularse con base en el voltaje y corriente de la prueba de circuito abierto:

$$|Y_E| = \frac{I_{\text{CAb}}}{V_{\text{CAb}}} \tag{2-44}$$

El *ángulo* de admitancia se puede calcular con base en el factor de potencia del circuito. El factor de potencia (FP) del circuito abierto está dado por

$$\text{FP} = \cos\theta = \frac{P_{\text{CAb}}}{V_{\text{CAb}} I_{\text{CAb}}} \tag{2-45}$$

y el ángulo θ del factor de potencia está dado por

$$\theta = \cos^{-1} \frac{P_{\text{CAb}}}{V_{\text{CAb}} I_{\text{CAb}}} \tag{2-46}$$

El factor de potencia siempre está en retraso en un transformador real, por lo que el ángulo de la corriente siempre está en retraso con respecto al ángulo de voltaje en θ grados. Por lo tanto, la admitancia Y_E es

$$Y_E = \frac{I_{\text{CAb}}}{V_{\text{CAb}}} \angle -\theta$$

$$Y_E = \frac{I_{\text{CAb}}}{V_{\text{CAb}}} \angle -\cos^{-1} \text{FP} \tag{2-47}$$

Comparando las ecuaciones (2-43) y (2-47) es posible determinar los valores de R_N y X_M directamente de los datos de la prueba de circuito abierto.

En la *prueba de cortocircuito* se hace un cortocircuito en las terminales de bajo voltaje de un transformador y las terminales de alto voltaje se conectan a una fuente de voltaje variable, como se muestra en la figura 2-20. (Esta medición se hace normalmente en el lado de *alto voltaje* del transformador, ya que las corrientes serán más bajas en aquel lado y las corrientes más bajas son más fáciles para trabajar.) Se ajusta el voltaje de entrada hasta que la corriente en los devanados en cortocircuito sea igual a su valor nominal. (Es necesario asegurarse de mantener el voltaje primario en un nivel seguro, pues no es una buena idea quemar los devanados del transformador en la prueba.) De nuevo se miden el voltaje, la corriente y la potencia de entrada.

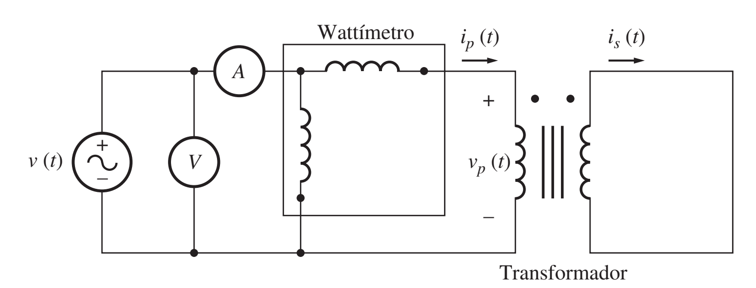


FIGURA 2-20 Conexión para la prueba de cortocircuito del transformador.

Debido a que el voltaje de entrada es tan bajo durante la prueba de cortocircuito, la corriente que fluye por la rama de excitación es despreciable. Si se ignora la corriente de excitación, entonces toda la caída de voltaje en el transformador se puede atribuir a los elementos en serie en el circuito. La magnitud de las impedancias en serie referidas al lado primario del transformador es

$$|Z_{\text{SE}}| = \frac{V_{\text{CC}}}{I_{\text{CC}}} \tag{2-48}$$

El factor de potencia de la corriente está dado por

$$\text{FP} = \cos\theta = \frac{P_{\text{CC}}}{V_{\text{CC}} I_{\text{CC}}} \tag{2-49}$$

y está en retraso. Por lo tanto, el ángulo de corriente es negativo y el ángulo de impedancia total θ es positivo:

$$\theta = \cos^{-1} \frac{P_{CC}}{V_{CC} I_{CC}} \tag{2-50}$$

Por lo tanto,

$$Z_{SE} = \frac{V_{CC} \angle 0°}{I_{CC} \angle -\theta°} = \frac{V_{CC}}{I_{CC}} \angle \theta° \tag{2-51}$$

La impedancia en serie Z_{SE} es igual a

$$Z_{SE} = R_{eq} + jX_{eq}$$

$$Z_{SE} = (R_P + a^2 R_S) + j(X_P + a^2 X_S) \tag{2-52}$$

Se puede determinar la impedancia en serie total referida al lado de alto voltaje por medio de esta técnica, pero no hay una forma fácil de dividir la impedancia en serie en sus componentes primario y secundario. Por fortuna, no se requiere de esta separación para resolver los problemas normales.

Observe que la prueba de circuito abierto normalmente se realiza en el lado de bajo voltaje del transformador, y la prueba de cortocircuito por lo común se realiza en el lado de alto voltaje, de modo que R_N y X_M por lo general se encuentran referidos al lado de bajo voltaje y R_{eq} y X_{eq} por lo común se refieren al lado de alto voltaje. Todos los elementos se deben referir al mismo lado (ya sea alto o bajo) para crear el circuito equivalente final.

EJEMPLO 2-2

Se requiere determinar las impedancias del circuito equivalente de un transformador de 20 kVA, 8 000/240 V, 60 Hz. La prueba de circuito abierto se realizó en la prueba del circuito secundario del transformador (para reducir el voltaje máximo que se tenía que medir), y la prueba de cortocircuito se realizó en el lado primario del transformador (para reducir la máxima corriente que se tenía que medir). Se tomaron los siguientes datos:

Prueba de circuito abierto (en el secundario)	**Prueba de cortocircuito (en el primario)**
V_{CAb} = 240 V	V_{CC} = 489 V
I_{CAb} = 7.133 A	I_{CC} = 2.5 A
V_{CAb} = 400 W	P_{CC} = 240 W

Encuentre las impedancias del circuito equivalente referido al lado primario y dibuje el circuito.

Solución

La razón de vueltas de este transformador es a = 8 000/240 = 33.3333. El factor de potencia durante la prueba de *circuito abierto* es

$$FP = \cos\theta = \frac{P_{CAb}}{V_{CAb} I_{CAb}} \tag{2-45}$$

$$FP = \cos\theta = \frac{400 \text{ W}}{(240 \text{ V})(7.133 \text{ A})}$$

$$FP = 0.234 \text{ en retraso}$$

La admitancia de excitación está dada por

$$Y_E = \frac{I_{\text{CAb}}}{V_{\text{CAb}}} \angle -\cos^{-1} \text{FP} \tag{2-47}$$

$$Y_E = \frac{7.133 \text{ A}}{240 \text{ V}} \angle -\cos^{-1} 0.234$$

$$Y_E = 0.0297 \angle -76.5° \text{ S}$$

$$Y_E = 0.00693 - j\,0.02888 = \frac{1}{R_N} - j\,\frac{1}{X_M}$$

Por lo tanto, los valores de la rama de excitación *referidos al lado de bajo voltaje (secundario)* son

$$R_N = \frac{1}{0.00693} = 144\ \Omega$$

$$X_M = \frac{1}{0.02888} = 34.63\ \Omega$$

El factor de potencia durante la prueba de *cortocircuito* es

$$\text{FP} = \cos\theta = \frac{P_{\text{CC}}}{V_{\text{CC}} I_{\text{CC}}} \tag{2-49}$$

$$\text{FP} = \cos\theta = \frac{240 \text{ W}}{(489 \text{ V})(2.5 \text{ A})} = 0.196 \text{ en retraso}$$

La impedancia en serie está dada por

$$Z_{\text{SE}} = \frac{V_{\text{CC}}}{I_{\text{CC}}} \angle \cos^{-1} \text{FP}$$

$$Z_{\text{SE}} = \frac{489 \text{ V}}{2.5 \text{ A}} \angle 78.7°$$

$$Z_{\text{SE}} = 195.6 \angle 78.7° = 38.4 + j192\ \Omega$$

Por lo tanto, la resistencia y la reactancia equivalentes *referidas al lado de alto voltaje (primaria)* son

$$R_{\text{eq}} = 38.4\ \Omega \qquad X_{\text{eq}} = 192\ \Omega$$

El circuito equivalente simplificado resultante que se refiere al lado de alto voltaje (primario) se puede determinar convirtiendo los valores de la rama de excitación al lado de alto voltaje.

$$R_{N,P} = a^2 R_{N,S} = (33.333)^2\ (144\ \Omega) = 159\ \text{k}\Omega$$

$$X_{M,P} = a^2 X_{M,S} = (33.333)^2\ (34.63\ \Omega) = 38.4\ \text{k}\Omega$$

El circuito equivalente simplificado resultante se muestra en la figura 2-21.

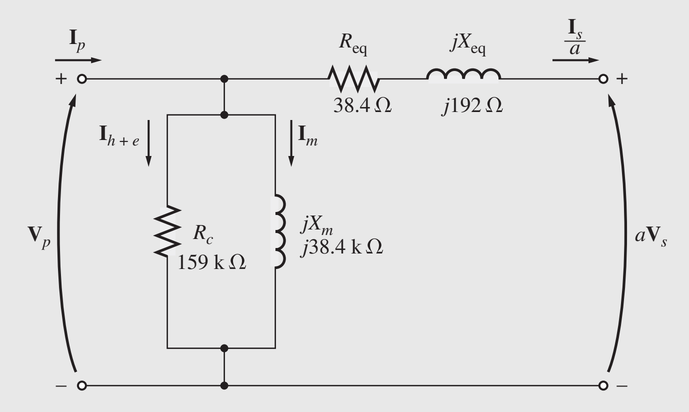


FIGURA 2-21 Circuito equivalente del ejemplo 2-2.

2.6 SISTEMA DE MEDIDAS POR UNIDAD

Como muestra el relativamente sencillo ejemplo 2-1, la resolución de circuitos que contienen transformadores puede ser muy tediosa debido a la necesidad de referir a un nivel común todos los distintos niveles de voltaje en los diferentes extremos de los transformadores del sistema. Únicamente después de ejecutar este paso se puede resolver el sistema en cuanto a sus corrientes y voltajes.

Hay otra manera de resolver circuitos que contienen transformadores, lo cual elimina la necesidad de las conversiones explícitas de los niveles de voltaje en cada transformador del sistema. En cambio, las conversiones necesarias se realizan automáticamente por el método en sí, sin que el usuario se preocupe por las transformaciones de la impedancia. Debido a que es posible evitar estas transformaciones de la impedancia, se pueden resolver fácilmente los circuitos que contienen varios transformadores con un menor margen de error. Este método de cálculo se conoce como *sistema de medidas por unidad* (*pu*).

El sistema por unidad tiene otra ventaja importante en el estudio de las máquinas eléctricas y los transformadores. Conforme varía el tamaño de la máquina o transformador, sus impedancias internas varían en gran medida. Por ejemplo, una reactancia del circuito primario de 0.1 Ω podría ser un número excesivamente grande para un transformador, pero ridículamente pequeño para otro; todo depende del voltaje y de la potencia nominales del aparato. Sin embargo, resulta que en un sistema por unidad relacionado con los valores nominales del aparato, *las impedancias de las máquinas y los transformadores caen regularmente dentro de pequeños intervalos* para cada tipo y construcción de aparato. Este hecho puede ser de utilidad al verificar la solución de los problemas.

En el sistema por unidad no se mide a los voltajes, corrientes, potencias, impedancias y otras cantidades eléctricas en las unidades tradicionales del SI (volts, amperes, watts, ohms, etc.). En cambio, *se mide cada cantidad eléctrica como una fracción decimal* de un nivel base. Cualquier cantidad se puede expresar en una base por unidad con la siguiente ecuación

$$\text{Cantidad por unidad} = \frac{\text{Valor real}}{\text{Valor base de la cantidad}} \tag{2-53}$$

donde “valor real” es el valor en volts, amperes, ohms, etcétera.

Se acostumbra seleccionar dos cantidades base para definir un sistema por unidad. Las que se utilizan normalmente son el voltaje y la potencia (o potencia aparente). Una vez que se han seleccionado las cantidades base, todos los demás valores se relacionan con ellas por medio de las leyes eléctricas normales. En un sistema monofásico, estas relaciones son

$$P_{\text{base}},\ Q_{\text{base}} \text{ o } S_{\text{base}} = V_{\text{base}} I_{\text{base}} \tag{2-54}$$

$$R_{\text{base}},\ X_{\text{base}} \text{ o } Z_{\text{base}} = \frac{V_{\text{base}}}{I_{\text{base}}} \tag{2-55}$$

$$Y_{\text{base}} = \frac{I_{\text{base}}}{V_{\text{base}}} \tag{2-56}$$

y

$$Z_{\text{base}} = \frac{(V_{\text{base}})^2}{S_{\text{base}}} \tag{2-57}$$

Una vez que se han seleccionado los valores de S (o P) y V, todos los demás valores se pueden calcular fácilmente con las ecuaciones (2-54) a (2-57).

En un sistema de potencia se seleccionan la potencia aparente y el voltaje con base *en un punto específico del sistema*. Un transformador no tiene ningún efecto en la potencia aparente base del sistema, ya que la potencia aparente que entra en un transformador es igual a la potencia aparente que sale de él [ecuación (2-11)]. Por otro lado, el voltaje cambia al pasar a través de un transformador, por lo que el valor de V_{base} cambia en cada transformador del sistema de acuerdo con su relación de vueltas. Debido a que las *cantidades base* cambian al pasar a través de un transformador, el proceso de referir las cantidades a un voltaje común se tiene en cuenta automáticamente durante la conversión por unidad.

EJEMPLO 2-3

En la figura 2-22 se muestra un sistema de potencia simple que contiene un generador de 480 V que está conectado a un transformador elevador ideal de 1:10, a una línea de transmisión, a un transformador reductor ideal de 20:1 y a una carga. La impedancia de la línea de transmisión es de $20 + j60\ \Omega$ y la impedancia de la carga es de $10 \angle 30°\ \Omega$. Los valores base de este sistema son 480 V y 10 kVA en el generador.

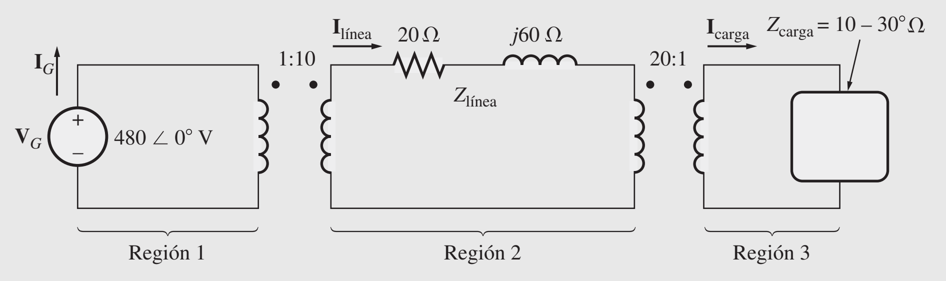


FIGURA 2-22 Sistema de potencia del ejemplo 2-3.

a) Encuentre el voltaje, la corriente, la impedancia y la potencia aparente bases en cada punto del sistema de potencia.
b) Convierta este sistema a su circuito equivalente por unidad.
c) Determine la potencia suministrada a la carga en el sistema.
d) Especifique la potencia perdida en la línea de transmisión.

Solución

a) *En la región del generador,* $V_{\text{base}} = 480$ V y $S_{\text{base}} = 10$ kVA, entonces

$$I_{\text{base 1}} = \frac{S_{\text{base}}}{V_{\text{base 1}}} = \frac{10\,000 \text{ VA}}{480 \text{ V}} = 20.83 \text{ A}$$

$$Z_{\text{base 1}} = \frac{V_{\text{base 1}}}{I_{\text{base 1}}} = \frac{480 \text{ V}}{20.83 \text{ A}} = 23.04\ \Omega$$

La relación de vueltas del transformador T_1 es $a = 1/10 = 0.1$, por lo que el voltaje *en la región de la línea de transmisión* es

$$V_{\text{base 2}} = \frac{V_{\text{base 1}}}{a} = \frac{480 \text{ V}}{0.1} = 4\,800 \text{ V}$$

Las demás cantidades base son

$$S_{\text{base 2}} = 10 \text{ kVA}$$

$$I_{\text{base 2}} = \frac{10\,000 \text{ VA}}{4\,800 \text{ V}} = 2.083 \text{ A}$$

$$Z_{\text{base 2}} = \frac{4\,800 \text{ V}}{2.083 \text{ A}} = 2\,304\ \Omega$$

La relación de vueltas del transformador T_2 es $a = 20/1 = 20$, por lo que el voltaje base *en la región de la carga* es

$$V_{\text{base 3}} = \frac{V_{\text{base 2}}}{a} = \frac{4\,800 \text{ V}}{20} = 240 \text{ V}$$

Las demás cantidades base son

$$S_{\text{base 3}} = 10 \text{ kVA}$$

$$I_{\text{base 3}} = \frac{10\,000 \text{ VA}}{240 \text{ V}} = 41.67 \text{ A}$$

$$Z_{\text{base 3}} = \frac{240 \text{ V}}{41.67 \text{ A}} = 5.76\ \Omega$$

b) Para convertir un sistema de potencia en un sistema por unidad, se debe dividir cada componente entre su valor base según la región del sistema. El voltaje por unidad del *generador* es su valor real dividido entre su valor base:

$$V_{G,\text{pu}} = \frac{480\angle 0°\ \text{V}}{480\ \text{V}} = 1.0\angle 0°\ \text{pu}$$

La impedancia por unidad de la *línea de transmisión* es su valor real dividido entre su valor base:

$$Z_{\text{línea,pu}} = \frac{20 + j60\ \Omega}{2\,304\ \Omega} = 0.0087 + j0.0260\ \text{pu}$$

La impedancia por unidad de la *carga* también es su valor real dividido entre su valor base:

$$Z_{\text{carga,pu}} = \frac{10\angle 30°\ \Omega}{5.76\ \Omega} = 1.736\angle 30°\ \text{pu}$$

El circuito equivalente por unidad del sistema de potencia se muestra en la figura 2-23.

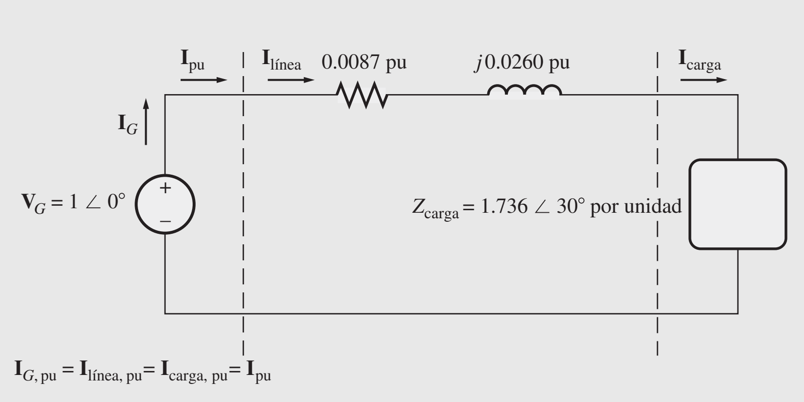


FIGURA 2-23 Circuito equivalente por unidad del ejemplo 2-3.

c) La corriente que fluye en este sistema de potencia por unidad es

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_{\text{pu}} &= \frac{\mathbf{V}_{\text{pu}}}{Z_{\text{tot,pu}}} \\
&= \frac{1\angle 0°}{(0.0087 + j0.0260) + (1.736\angle 30°)} \\
&= \frac{1\angle 0°}{(0.0087 + j0.0260) + (1.503 + j0.868)} \\
&= \frac{1\angle 0°}{1.512 + j0.894} = \frac{1\angle 0°}{1.757\angle 30.6°} \\
&= 0.569\angle -30.6°\ \text{pu}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la potencia por unidad de carga es

$$P_{\text{carga,pu}} = I_{\text{pu}}^2 R_{\text{pu}} = (0.569)^2(1.503) = 0.487$$

y la potencia real suministrada a la carga es

$$\begin{aligned}
P_{\text{carga}} &= P_{\text{carga,pu}} S_{\text{base}} = (0.487)(10\,000\ \text{VA}) \\
&= 4\,870\ \text{W}
\end{aligned}$$

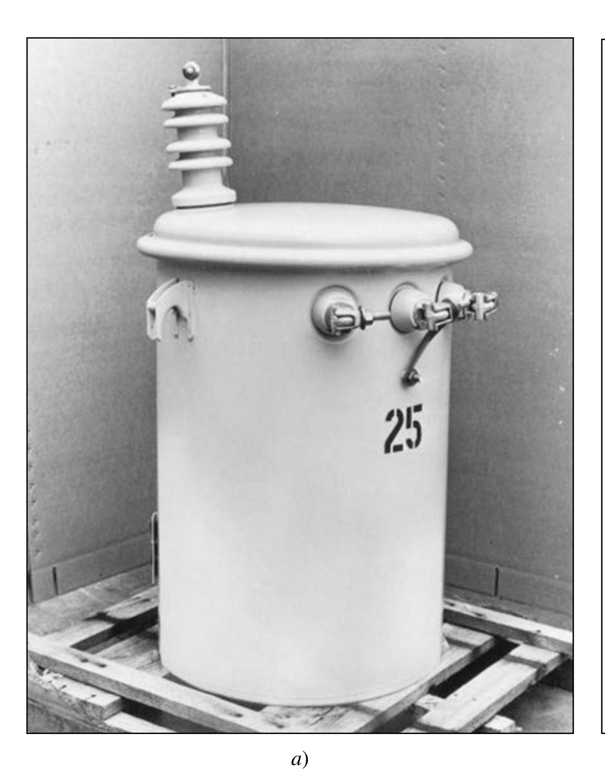
d) La potencia por unidad perdida en la línea de transmisión es

$$P_{\text{línea,pu}} = I^2_{\text{pu}} R_{\text{línea,pu}} = (0.569)^2(0.0087) = 0.00282$$

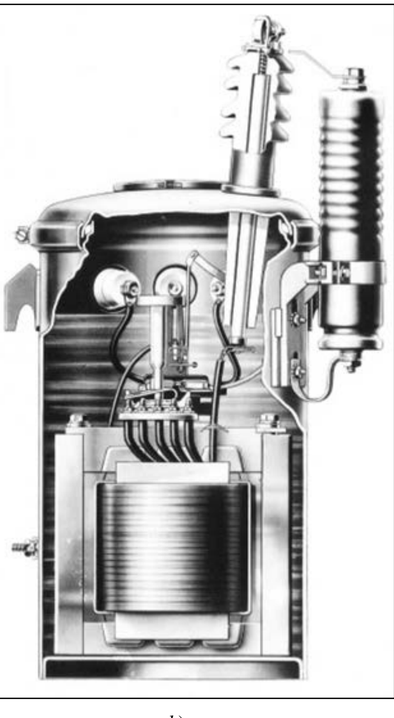
y la potencia real perdida en la línea de transmisión es

$$\begin{aligned} P_{\text{línea}} &= P_{\text{línea,pu}} S_{\text{base}} = (0.00282)(10\,000 \text{ VA}) \\ &= 28.2 \text{ W} \end{aligned}$$

Cuando se analiza un solo aparato (transformador o motor), se usan sus propios valores nominales como la base del sistema por unidad. Si se utiliza un sistema por unidad basado en los valores nominales del transformador, las características del transformador de potencia o de distribución no cambiarán mucho dentro de una amplia gama de valores de voltaje y potencia. Por ejemplo, normalmente la resistencia en serie de un transformador es alrededor de 0.01 por unidad, y por lo común la reactancia en serie está entre 0.02 y 0.10 por unidad. En general, cuanto mayor es el transformador menores son sus impedancias en serie. La reactancia de magnetización normalmente está entre 10 y 40 por unidad, en tanto que la resistencia de pérdidas en el núcleo por lo regular está entre 50 y 200 por unidad. Debido a que los valores por unidad dan una forma conveniente y significativa para comparar las características de los transformadores cuando son de diferentes tamaños, las impedancias del transformador normalmente se dan por unidad o como un porcentaje en la placa característica del transformador (véase la figura 2-45 más adelante en este capítulo).



a)



b)

FIGURA 2-24 *a*) Un transformador de distribución de 13.2 kV a 120/240 V típico. (*Cortesía de General Electric Company*.) *b*) Vista de corte de un transformador de distribución que muestra el transformador tipo acorazado en su interior. (*Cortesía de General Electric Company*.)

La misma idea se aplica también a las máquinas síncronas y de inducción: sus impedancias por unidad caen dentro de intervalos relativamente pequeños en una gran gama de tamaños.

Si se incluyen más de una máquina o un transformador en un solo sistema de potencia, el voltaje y potencia base del sistema pueden ser seleccionados arbitrariamente, pero *todo el sistema debe*

tener la misma base. Un procedimiento común es escoger las cantidades base del sistema de tal manera que sean iguales a la base del componente más grande en el sistema. Los valores por unidad dados en otra base pueden convertirse a la nueva base por medio de su conversión a sus valores reales (volts, amperes, ohms, etc.) como paso intermedio. En forma alterna, se pueden convertir directamente por medio de las ecuaciones

$$(P,\ Q,\ S)_{\text{pu sobre base 2}} = (P,\ Q,\ S)_{\text{pu sobre base 1}} \frac{S_{\text{base 1}}}{S_{\text{base 2}}} \tag{2-58}$$

$$V_{\text{pu sobre base 2}} = V_{\text{pu sobre base 1}} \frac{V_{\text{base 1}}}{V_{\text{base 2}}} \tag{2-59}$$

$$(R,\ X,\ Z)_{\text{pu sobre base 2}} = (R,\ X,\ Z)_{\text{pu sobre base 1}} \frac{(V_{\text{base 1}})^2(S_{\text{base 2}})}{(V_{\text{base 2}})^2(S_{\text{base 1}})} \tag{2-60}$$

EJEMPLO 2-4

Dibuje el circuito equivalente por unidad aproximado del transformador del ejemplo 2-2. Utilice los valores nominales del transformador como base del sistema.

Solución

Los valores del transformador del ejemplo 2-2 son 20 kVA, 8 000/240 V. El circuito equivalente aproximado (figura 2-21) desarrollado en el ejemplo se refirió al lado de alto voltaje del transformador; para convertirlo a por unidad se debe encontrar la impedancia base del circuito primario. En éste,

$$V_{\text{base 1}} = 8\,000 \text{ V}$$

$$S_{\text{base 1}} = 20\,000 \text{ VA}$$

$$Z_{\text{base 1}} = \frac{(V_{\text{base 1}})^2}{S_{\text{base 1}}} = \frac{(8\,000 \text{ V})^2}{20\,000 \text{ VA}} = 3\,200\ \Omega$$

Por lo tanto,

$$Z_{\text{SE,pu}} = \frac{38.4 + j192\ \Omega}{3\,200\ \Omega} = 0.012 + j0.06 \text{ pu}$$

$$R_{N,\text{pu}} = \frac{159 \text{ k}\Omega}{3\,200\ \Omega} = 49.7 \text{ pu}$$

$$Z_{M,\text{pu}} = \frac{38.4 \text{ k}\Omega}{3\,200\ \Omega} = 12 \text{ pu}$$

El circuito equivalente aproximado por unidad, expresado en la propia base del transformador, se muestra en la figura 2-25.

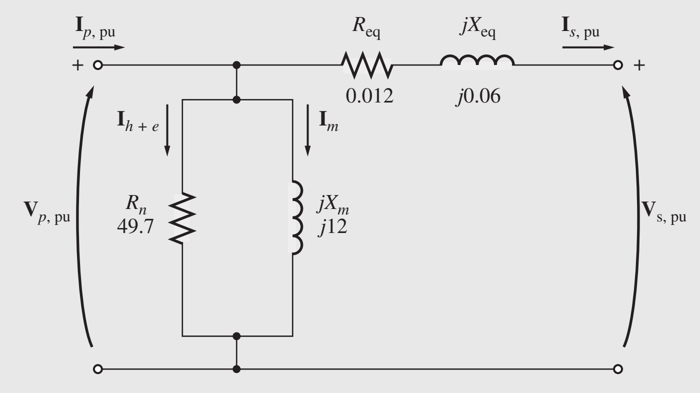


FIGURA 2-25 El circuito equivalente por unidad del ejemplo 2-4.

2.7 REGULACIÓN DE VOLTAJE Y EFICIENCIA DE UN TRANSFORMADOR

Debido a que un transformador real tiene dentro de él impedancias en serie, el voltaje de salida de un transformador varía con la carga incluso cuando el voltaje de entrada permanece constante. Para comparar convenientemente los transformadores en este aspecto, se acostumbra definir una cantidad llamada *regulación de voltaje* (RV). La *regulación de voltaje a plena carga* es una cantidad que compara el voltaje de salida de un transformador sin carga (en vacío) con el voltaje de salida a plena carga. Se define por la ecuación

$$\mathrm{RV} = \frac{V_{S,\mathrm{nl}} - V_{S,\mathrm{fl}}}{V_{S,\mathrm{fl}}} \times 100\% \tag{2-61}$$

Debido a que en vacío $V_S = V_P/a$, la regulación de voltaje también se puede expresar como

$$\mathrm{RV} = \frac{V_P/a - V_{S,\mathrm{fl}}}{V_{S,\mathrm{fl}}} \times 100\% \tag{2-62}$$

Si el circuito equivalente del transformador está en el sistema por unidad, entonces la regulación de voltaje se puede expresar como

$$\mathrm{RV} = \frac{V_{P,\mathrm{pu}} - V_{S,\mathrm{fl,pu}}}{V_{S,\mathrm{fl,pu}}} \times 100\% \tag{2-63}$$

Normalmente es deseable tener una regulación de voltaje tan pequeña como sea posible. En el caso de un transformador ideal, RV = 0%. No siempre es una buena idea tener una baja regulación de voltaje ya que, a veces, los transformadores de alta impedancia y alta regulación de voltaje se utilizan deliberadamente para reducir las fallas de corriente en un circuito.

¿Cómo se puede determinar la regulación de voltaje de un transformador?

Diagrama fasorial del transformador

Para determinar la regulación de voltaje de un transformador es necesario entender las caídas de voltaje en su interior. Considérese el circuito equivalente del transformador simplificado de la figura 2-18*b*). Se pueden ignorar los efectos de la rama de excitación en la regulación de voltaje del transformador, por lo que se deben considerar sólo las impedancias en serie. La regulación de voltaje de un transformador depende tanto de la magnitud de estas impedancias en serie como del ángulo de fase de la corriente que fluye a través del transformador. La manera más fácil de determinar el efecto de las impedancias y los ángulos de fase reales en la regulación de voltaje del transformador es por medio del examen de un *diagrama fasorial*, un dibujo de los voltajes y corrientes fasoriales en el transformador.

En todos los diagramas fasoriales siguientes se supone que el voltaje fasorial $\mathbf{V}_S$ está en un ángulo de 0° y todos los demás voltajes y corrientes se comparan con esta referencia. Si se aplica la ley de voltaje de Kirchhoff al circuito equivalente de la figura 2-18*b*), se encuentra que el voltaje primario es

$$\frac{\mathbf{V}_P}{a} = \mathbf{V}_S + R_{\mathrm{eq}}\mathbf{I}_S + jX_{\mathrm{eq}}\mathbf{I}_S \tag{2-64}$$

El diagrama fasorial de un transformador es simplemente la representación visual de esta ecuación.

La figura 2-26 muestra el diagrama fasorial de un transformador que opera con un factor de potencia en retraso. Es fácil ver que $V_P/a > V_S$ para cargas en retraso, por lo que la regulación de voltaje de un transformador con cargas en retraso deberá ser mayor que cero.

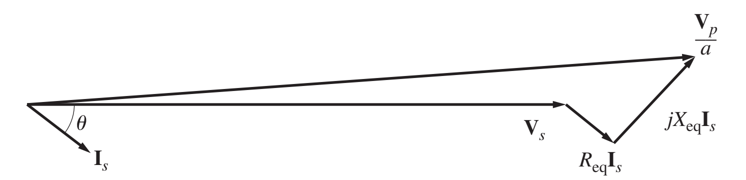


FIGURA 2-26 Diagrama fasorial de un transformador que opera con un factor de potencia en retraso.

En la figura 2-27*a*) se muestra un diagrama fasorial con un factor de potencia igual a 1. Una vez más, el voltaje en el secundario es menor que el voltaje en el primario, por lo que RV > 0. Sin embargo, ahora la regulación de voltaje es menor de lo que era con una corriente en retraso. Si la corriente secundaria está en adelanto, el voltaje secundario puede en realidad ser *mayor* que el referido en el voltaje primario. Si esto sucede, el transformador en realidad tiene una regulación de voltaje negativa (véase la figura 2-27*b*).

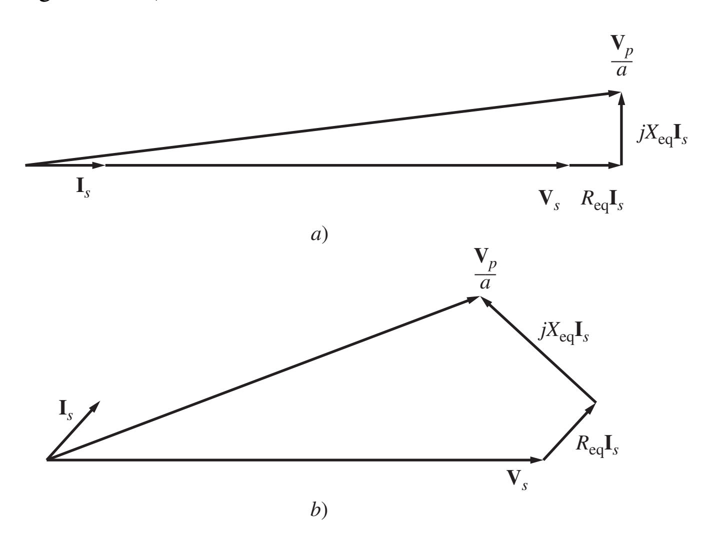


FIGURA 2-27 Diagrama fasorial de un transformador que opera con un factor de potencia *a*) unitario y *b*) en adelanto.

Eficiencia del transformador

A los transformadores también se les juzga y compara por su eficiencia. La eficiencia de un aparato se define por la ecuación

$$\eta = \frac{P_{sal}}{P_{ent}} \times 100\% \qquad \textbf{(2-65)}$$

$$\eta = \frac{P_{sal}}{P_{sal} + P_{pérd}} \times 100\% \qquad \textbf{(2-66)}$$

Estas ecuaciones se aplican tanto a motores y generadores como a transformadores.

Los circuitos equivalentes del transformador facilitan los cálculos de eficiencia. Hay tres tipos de pérdidas en los transformadores:

1. *Pérdidas en el cobre* (I^2R). Estas pérdidas las causan las resistencias en serie y el circuito equivalente.
2. *Pérdidas por histéresis.* Estas pérdidas se explican en el capítulo 1 y las causa el resistor R_N.
3. *Pérdidas por corrientes parásitas*. Estas pérdidas se explican en el capítulo 1 y las causa el resistor R_N.

Para calcular la eficiencia de un transformador con una carga dada, simplemente adicione las pérdidas de cada resistor y aplique la ecuación (2-67). Ya que la potencia de salida está dada por

$$P_{\text{sal}} = V_S I_S \cos \theta_S \tag{2-7}$$

la eficiencia del transformador se puede expresar como

$$\eta = \frac{V_S I_S \cos \theta}{P_{\text{Cu}} + P_{\text{núcleo}} + V_S I_S \cos \theta} \times 100\% \tag{2-67}$$

EJEMPLO 2-5

Se va a probar un transformador de 15 kVA y 2 300/230 V para determinar los componentes de la rama de excitación, sus impedancias en serie y su regulación de voltaje. Se obtuvieron los siguientes datos de las pruebas realizadas al transformador:

Prueba de circuito abierto (lado de bajo voltaje)	Prueba de cortocircuito (lado de alto voltaje)
$V_{\text{CAb}} = 230$ V	$V_{\text{CC}} = 47$ V
$I_{\text{CAb}} = 2.1$ A	$I_{\text{CC}} = 6.0$ A
$V_{\text{CAb}} = 50$ W	$P_{\text{CC}} = 160$ W

Los datos se tomaron utilizando las conexiones que se muestran en las figuras 2-19 y 2-20.

a) Encuentre el circuito equivalente de este transformador referido al lado de alto voltaje.
b) Encuentre el circuito equivalente de este transformador referido al lado de bajo voltaje.
c) Calcule la regulación de voltaje a plena carga con un factor de potencia de 0.8 en retraso, un factor de potencia de 1.0 y un factor de potencia de 0.8 en adelanto usando la ecuación exacta para $\mathbf{V}_P$.
d) Haga una gráfica de la regulación de voltaje conforme se incrementa la carga desde vacío hasta plena carga con factores de potencia de 0.8 en retraso y 1.0 y 0.8 en adelanto.
e) ¿Cuál es la eficiencia del transformador en plena carga con un factor de potencia de 0.8 en retraso?

Solución

a) La relación de espiras de este transformador es $a = 2\,300/230 = 10$. Los valores de la rama de excitación del circuito equivalente del transformador con referencia al lado secundario (de bajo voltaje) se pueden calcular a partir de los datos de la *prueba de cortocircuito*. A partir de los datos de la prueba de circuito abierto, el ángulo de impedancia de circuito abierto es

$$\theta_{\text{CAb}} = \cos^{-1} \frac{P_{\text{CAb}}}{V_{\text{CAb}} I_{\text{CAb}}}$$

$$\theta_{\text{CAb}} = \cos^{-1} \frac{50 \text{ W}}{(230 \text{ V})(2.1 \text{ A})} = 84°$$

La admitancia de excitación es

$$Y_E = \frac{I_{\text{CAb}}}{V_{\text{CAb}}} \angle -84°$$

$$Y_E = \frac{2.1 \text{ A}}{230 \text{ V}} \angle -84° \text{ S}$$

$$Y_E = 0.00913 \angle -84° \text{ S} = 0.000954 - j0.00908 \text{ S}$$

Los elementos de la rama de excitación referida al secundario son

$$R_{N,S} = \frac{1}{0.000954} = 1\,050\ \Omega$$

$$X_{M,S} = \frac{1}{0.00908} = 110\ \Omega$$

Con los datos de la prueba de cortocircuito, el ángulo de impedancia de cortocircuito es

$$\theta_{CC} = \cos^{-1}\frac{P_{CC}}{V_{CC}I_{CC}}$$

$$\theta_{CC} = \cos^{-1}\frac{160\text{ W}}{(47\text{ V})(6\text{ A})} = 55.4°$$

La impedancia en serie equivalente es

$$Z_{ES} = \frac{V_{CC}}{I_{CC}}\angle\theta_{CC}$$

$$Z_{ES} = \frac{47\text{ V}}{6\text{ A}}\angle 55.4°\ \Omega$$

$$Z_{ES} = 7.833\angle 55.4° = 4.45 + j6.45\ \Omega$$

Los elementos en serie referidos al primario son

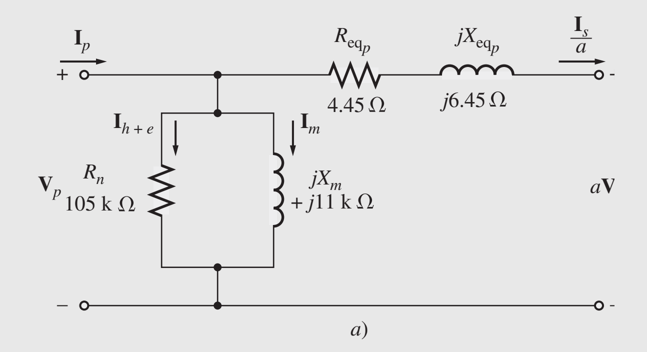
$$R_{eq,P} = 4.45\ \Omega \qquad X_{eq,P} = 6.45\ \Omega$$

El circuito simplificado resultante que se refiere al lado primario se puede determinar convirtiendo los valores de la derivación de excitación al lado primario:

$$R_{N,P} = a^2 R_{N,S} = (10)^2\,(1\,050\ \Omega) = 105\text{ k}\Omega$$

$$X_{M,P} = a^2 X_{M,S} = (10)^2\,(110\ \Omega) = 11\text{ k}\Omega$$

Este circuito equivalente se muestra en la figura 2-28*a*).



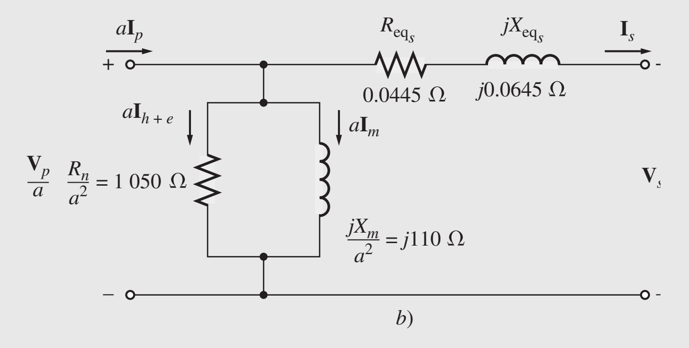


FIGURA 2-28 Circuito equivalente de transferencia del ejemplo 2-5 referido a *a*) su lado primario y *b*) su lado secundario.

b) Para encontrar el circuito equivalente referido al lado de bajo voltaje, simplemente se requiere dividir la impedancia entre a^2. Como $a = N_P/N_S = 10$, los valores resultantes son

$$R_N = 1\,050\ \Omega \qquad R_{eq} = 0.0445\ \Omega$$

$$X_M = 110\ \Omega \qquad X_{eq} = 0.0645\ \Omega$$

El circuito equivalente resultante se muestra en la figura 2-28*b*).

c) La corriente a plena carga en el lado secundario del transformador es

$$I_{S,\text{nominal}} = \frac{S_{\text{nominal}}}{V_{S,\text{nominal}}} = \frac{15\,000 \text{ VA}}{230 \text{ V}} = 65.2 \text{ A}$$

Para calcular V_P/a se utiliza la ecuación (2-64):

$$\frac{\mathbf{V}_P}{a} = \mathbf{V}_S + R_{\text{eq}}\mathbf{I}_S + jX_{\text{eq}}\mathbf{I}_S \tag{2-64}$$

Para un FP = 0.8 en retraso, la corriente $\mathbf{I}_S = 65.2 \angle -36.9°$ A. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{V}_P}{a} &= 230 \angle 0° \text{ V} + (0.0445\ \Omega)(65.2 \angle -36.9° \text{ A}) + j(0.0645\ \Omega)(65.2 \angle -36.9° \text{ A}) \\ &= 230 \angle 0° \text{ V} + 2.90 \angle -36.9° \text{ V} + 4.21 \angle 53.1° \text{ V} \\ &= 230 + 2.32 - j1.74 + 2.52 + j3.36 \\ &= 234.84 + j1.62 = 234.85 \angle 0.40° \text{ V}\end{aligned}$$

La regulación de voltaje resultante es

$$\begin{aligned}\text{RV} &= \frac{V_P/a - V_{S,\text{fl}}}{V_{S,\text{fl}}} \times 100\% \\ &= \frac{234.85 \text{ V} - 230 \text{ V}}{230 \text{ V}} \times 100\% = 2.1\%\end{aligned} \tag{2-62}$$

Para FP = 1.0, la corriente $\mathbf{I}_S = 65.2 \angle 0°$ A. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{V}_P}{a} &= 230 \angle 0° \text{ V} + (0.0445\ \Omega)(65.2 \angle 0° \text{ A}) + j(0.0645\ \Omega)(65.2 \angle 0° \text{ A}) \\ &= 230 \angle 0° \text{ V} + 2.90 \angle 0° \text{ V} + 4.21 \angle 90° \text{ V} \\ &= 230 + 2.90 + j4.21 \\ &= 232.9 + j4.21 = 232.94 \angle 1.04° \text{ V}\end{aligned}$$

La regulación de voltaje resultante es

$$\text{RV} = \frac{232.94 \text{ V} - 230 \text{ V}}{230 \text{ V}} \times 100\% = 1.28\%$$

Para FP = 0.8 en adelanto, la corriente $\mathbf{I}_S = 65.2 \angle 36.9°$ A. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{V}_P}{a} &= 230 \angle 0° \text{ V} + (0.0445\ \Omega)(65.2 \angle 36.9° \text{ A}) + j(0.0645\ \Omega)(65.2 \angle 36.9° \text{ A}) \\ &= 230 \angle 0° \text{ V} + 2.90 \angle 36.9° \text{ V} + 4.21 \angle 126.9° \text{ V} \\ &= 230 + 2.32 + j1.74 - 2.52 + j3.36 \\ &= 229.80 + j5.10 = 229.85 \angle 1.27° \text{ V}\end{aligned}$$

La regulación de voltaje resultante es

$$\text{RV} = \frac{229.85 \text{ V} - 230 \text{ V}}{230 \text{ V}} \times 100\% = -0.062\%$$

Cada uno de estos tres diagramas fasoriales se muestra en la figura 2-29.

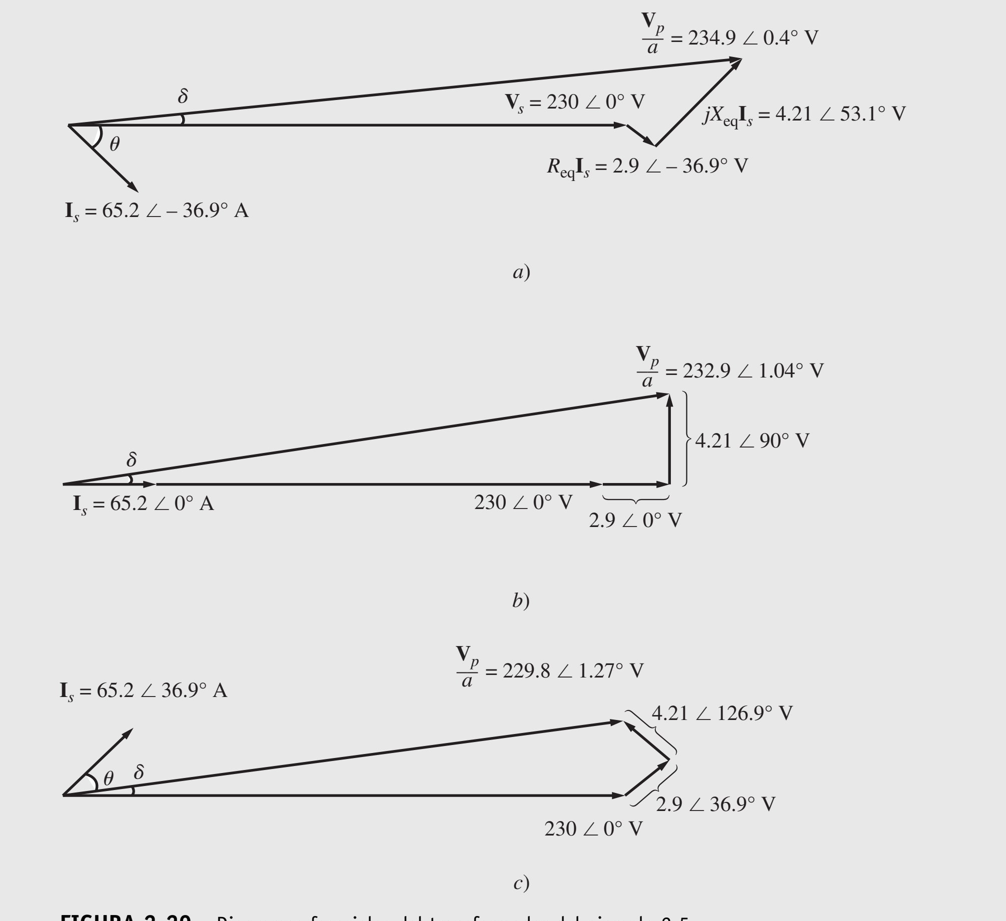


FIGURA 2-29 Diagramas fasoriales del transformador del ejemplo 2-5.

d) La mejor manera de hacer una gráfica de la regulación de voltaje en función de su carga es por medio de la repetición de los cálculos en el inciso *c*) para diferentes cargas, para lo cual se utiliza el MATLAB. A continuación se muestra un programa con el cual se efectúa esta tarea.

```
% Archivo M: trans_vr.m
% Archivo M para calcular y hacer una gráfica de la regulación de
% voltaje de un transformador en función de la carga para
% factores de potencia de 0.8 en retraso y 1.0 y 0.8 en adelanto.
VS = 230;                        % Voltaje secundario (V)
amps = 0:6.52:65.2;              % Valores de corriente (A)
Req = 0.0445;                    % R equivalente (ohms)
Xeq = 0.0645;                    % X equivalente (ohms)

% Calcular el valor de las corrientes para los tres
% factores de potencia. La primera fila de 1 contiene
% las corrientes en retraso, la segunda fila contiene
% las corrientes unitarias y la tercera fila contiene
% las corrientes en adelanto.
I(1, :) = amps .* ( 0.8 - j*0.6);           % En retraso
I(2, :) = amps .* ( 1. 0);                  % Unitaria
I(3, :) = amps .* ( 0.8 + j*0.6);           % En adelanto

% Calcular VP/a
VPa = VS + Req.*I + j.*Xeq.*I;

% Calcular la regulación de voltaje
VR = (abs(VPa) - VS) ./ VS .* 100;
```

```
% Hacer una gráfica de la regulación de voltaje
plot(amps,VR(l,:), 'b-');
hold on;
plot(amps, VR(2,:), 'k-');
plot(amps, VR(3,:), 'r-');
title ('Regulación de voltaje-carga');
xlabel ('Carga (A)');
ylabel ('Regulación de voltaje (%)');
legend ('0.8 PF en retraso','l.0 PF','0.8 PF en adelanto');
hold off;
```

La gráfica que produce este programa se muestra en la figura 2-30.

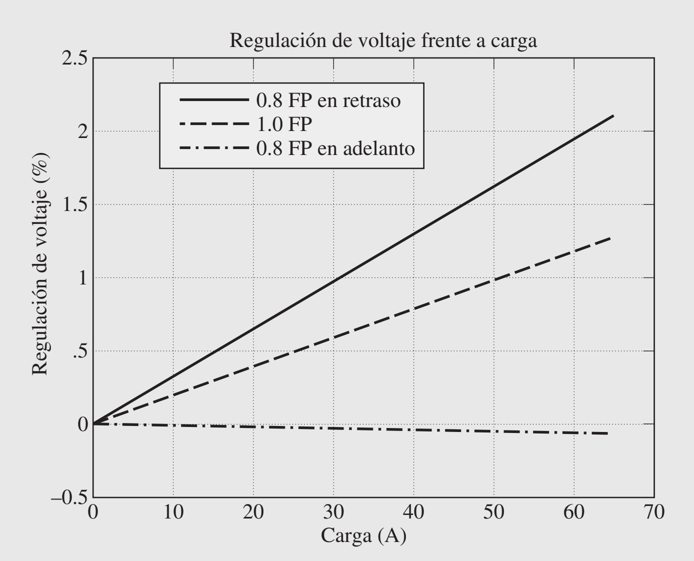


FIGURA 2-30 Gráfica de la regulación de voltaje contra la carga del transformador del ejemplo 2-5.

e) Para encontrar la eficiencia del transformador, primero calcule sus pérdidas. Las pérdidas en el cobre son

$$P_{\text{Cu}} = (I_S)^2 R_{\text{eq}} = (65.2\text{ A})^2(0.0445\ \Omega) = 189\text{ W}$$

Las pérdidas en el núcleo están dadas por

$$P_{\text{núcleo}} = \frac{(V_P/a)^2}{R_N} = \frac{(234.85\text{ V})^2}{1\,050\ \Omega} = 52.5\text{ W}$$

La potencia de salida del transformador con este factor de potencia es

$$\begin{aligned} P_{\text{sal}} &= V_S I_S \cos\theta \\ &= (230\text{ V})(65.2\text{ A}) \cos 36.9° = 12\,000\text{ W} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la eficiencia del transformador con esta condición es

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{V_S I_S \cos\theta}{P_{\text{Cu}} + P_{\text{núcleo}} + V_S I_S \cos\theta} \times 100\% \qquad \textbf{(2-68)} \\ &= \frac{12\,000\text{ W}}{189\text{ W} + 52.5\text{ W} + 12\,000\text{ W}} \times 100\% \\ &= 98.03\% \end{aligned}$$

2.8 TOMAS (TAPS) Y REGULACIÓN DE VOLTAJE EN LOS TRANSFORMADORES

En las secciones anteriores de este capítulo se describieron los transformadores en cuanto a su relación de vueltas o su relación de voltaje primario a secundario. A través de esas secciones la relación de vueltas de un transformador se trató como si fuera completamente fija. En la mayoría de los transformadores de distribución reales esto no es cierto. Los transformadores de distribución tienen una serie de *tomas* (*taps*) en los devanados para permitir pequeños cambios en la relación de vueltas del transformador después de haber salido de la fábrica. Una instalación típica tiene cuatro tomas, además del valor nominal con intervalos de 2.5% del voltaje a plena carga. Tal distribución permite ajustes de hasta 5% por encima o por debajo del voltaje nominal del transformador.

EJEMPLO 2-6

Un transformador de distribución de 500 kVA y 13 200/480 V tiene cuatro tomas de 2.5% en su devanado primario. ¿Cuáles son las relaciones de voltaje de este transformador en cada toma?

Solución

Los cinco valores nominales de voltaje posibles en este transformador son

Toma de +5.0%	13 860/480 V
Toma de +2.5%	13 530/480 V
Valor nominal	13 200/480 V
Toma de −2.5%	12 870/480 V
Toma de −5.0%	12 540/480 V

Las tomas de un transformador permiten ajustar el transformador para acomodarse a las variaciones de voltaje locales. Sin embargo, por lo general estas tomas no se pueden cambiar mientras se está suministrando potencia al transformador. Deben definirse una vez y dejarse así.

A veces se utiliza el transformador en una línea de potencia con un voltaje que varía ampliamente con la carga. Estas variaciones de voltaje se pueden deber a una alta impedancia de la línea entre los generadores del sistema de potencia y esa carga en particular (tal vez se encuentre ubicada a gran distancia). Las cargas normales requieren un suministro de voltaje esencialmente constante. ¿Cómo puede la compañía de electricidad suministrar un voltaje controlado a través de líneas de alta impedancia a niveles de carga que cambian de manera constante?

Una solución a este problema es usar un transformador especial llamado *transformador conmutador de tomas bajo la carga* (TCUL, por sus siglas en inglés) o *regulador de voltaje*. Básicamente, un transformador TCUL es un transformador con la habilidad de cambiar las tomas mientras se suministra potencia. Un regulador de voltaje es un transformador TCUL con un circuito sensor de voltaje que cambia automáticamente las tomas para mantener constante el voltaje del sistema. Estos transformadores especiales son muy comunes en los sistemas de potencia modernos.

2.9 EL AUTOTRANSFORMADOR

En ciertas ocasiones es deseable cambiar los niveles de voltaje únicamente en una pequeña cantidad. Por ejemplo, puede ser necesario aumentar el voltaje de 110 a 120 V o de 13.2 a 13.8 kV. Estos pequeños incrementos pueden ser necesarios debido a una caída de voltaje en un sistema de potencia localizado lejos de los generadores. En tales circunstancias es un desperdicio y demasiado costoso elaborar un transformador con dos devanados completos dimensionados para casi el mismo voltaje. En su lugar, se utiliza un transformador de propósito especial llamado *autotransformador*.

En la figura 2-31 se muestra el diagrama de un autotransformador elevador. En la figura 2-31*a*) se ven las dos bobinas del transformador de manera convencional. En la figura 2-31*b*) se observa el primer devanado conectado de manera aditiva al segundo devanado. Ahora, la relación entre el voltaje en el primer devanado y el voltaje en el segundo devanado está dada por la relación de vueltas del transformador. Sin embargo, *el voltaje de salida del transformador es la suma del voltaje*

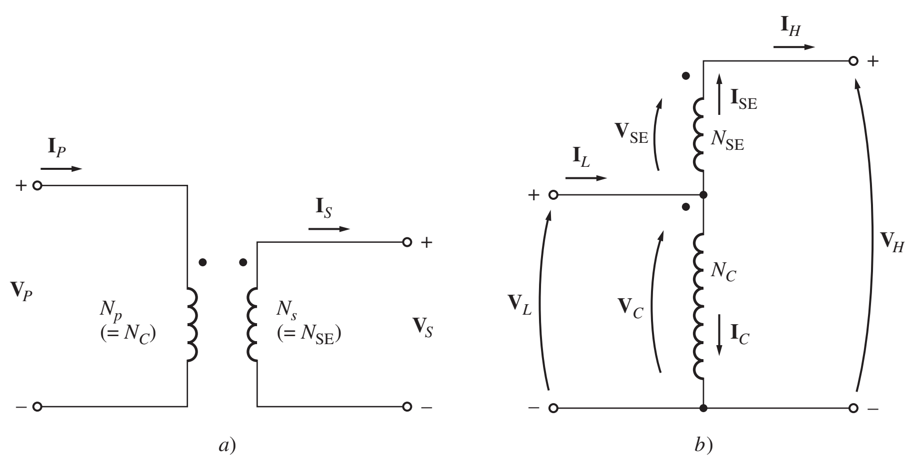


FIGURA 2-31 Transformador con sus devanados *a*) conectados de manera convencional y *b*) reconectados como un autotransformador.

en ambos devanados. En este caso, el primer devanado se llama *devanado común* debido a que su voltaje aparece en ambos lados del transformador. El devanado más pequeño se llama *devanado en serie* debido a que está conectado en serie con el devanado común.

En la figura 2-32 se muestra un diagrama de un autotransformador reductor. En este caso el voltaje de entrada es la suma de los voltajes en el devanado en serie y en el devanado común, mientras que el voltaje de salida es sólo el voltaje en el devanado común.

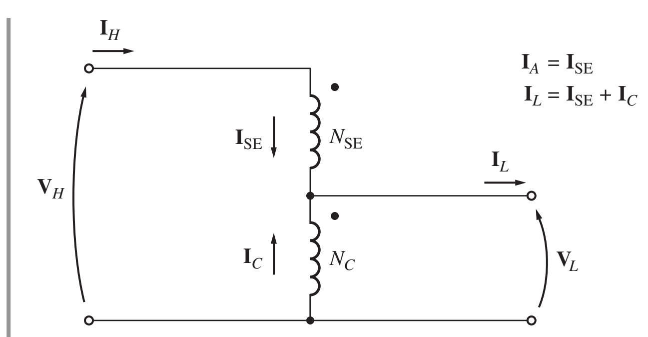


FIGURA 2-32 Conexión de un autotransformador reductor.

Debido a que las bobinas del transformador están conectadas físicamente, para el autotransformador se utiliza una terminología diferente a la de otros tipos de transformadores. El voltaje en la bobina común se llama *voltaje común* $\mathbf{V}_C$ y la corriente en la bobina se llama *corriente común* $\mathbf{I}_C$. El voltaje en la bobina en serie se llama *voltaje en serie* $\mathbf{V}_{SE}$ y la corriente en esa bobina se llama *corriente en serie* $\mathbf{I}_{SE}$. El voltaje y la corriente en el lado de bajo voltaje del transformador se llaman $\mathbf{V}_L$ e $\mathbf{I}_L$, respectivamente, mientras que las cantidades correspondientes en el lado de alto voltaje del transformador se llaman $\mathbf{V}_H$ e $\mathbf{I}_H$. El lado primario del autotransformador (el lado por el cual entra la potencia) puede ser tanto el lado de bajo voltaje como el lado de alto voltaje, dependiendo de si el autotransformador actúa como transformador elevador o reductor. En figura 2-31*b*) los voltajes y las corrientes en las bobinas están relacionados mediante las ecuaciones

$$\frac{\mathbf{V}_C}{\mathbf{V}_{SE}} = \frac{N_C}{N_{SE}} \tag{2-69}$$

$$N_C\mathbf{I}_C = N_{SE}\mathbf{I}_{SE} \tag{2-70}$$

Los voltajes en las bobinas están relacionados con los voltajes en los terminales mediante las ecuaciones

$$\mathbf{V}_L = \mathbf{V}_C \tag{2-71}$$

$$\mathbf{V}_H = \mathbf{V}_C + \mathbf{V}_{SE} \tag{2-72}$$

y las corrientes en las bobinas están relacionadas con las corrientes en los terminales mediante las ecuaciones

$$\mathbf{I}_L = \mathbf{I}_C + \mathbf{I}_{SE} \tag{2-73}$$

$$\mathbf{I}_H = \mathbf{I}_{SE} \tag{2-74}$$

Relaciones entre el voltaje y la corriente en un autotransformador

¿Cuál es la relación de voltajes entre los dos lados de un autotransformador? Es muy fácil determinar la relación entre $\mathbf{V}_H$ y $\mathbf{V}_B$. El voltaje en el lado de alto voltaje del autotransformador está dado por

$$\mathbf{V}_H = \mathbf{V}_C + \mathbf{V}_{SE} \tag{2-72}$$

Pero $\mathbf{V}_C/\mathbf{V}_{SE} = N_C/N_{SE}$, entonces

$$\mathbf{V}_H = \mathbf{V}_C + \frac{N_{SE}}{N_C}\mathbf{V}_C \tag{2-75}$$

Finalmente, si se tiene en cuenta que $\mathbf{V}_L = \mathbf{V}_C$, se tiene

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_H &= \mathbf{V}_B + \frac{N_{SE}}{N_C}\mathbf{V}_L \\ &= \frac{N_{SE} + N_C}{N_C}\mathbf{V}_L \end{aligned} \tag{2-76}$$

o

$$\frac{\mathbf{V}_L}{\mathbf{V}_A} = \frac{N_C}{N_{SE} + N_C} \tag{2-77}$$

Se puede encontrar la relación de corriente entre los dos lados del transformador si se tiene en cuenta que

$$\mathbf{I}_L = \mathbf{I}_C + \mathbf{I}_{SE} \tag{2-73}$$

De la ecuación (2-70), $\mathbf{I}_C = (N_{SE}/N_C)\mathbf{I}_{SE}$. Entonces

$$\mathbf{I}_L = \frac{N_{SE}}{N_C}\mathbf{I}_{SE} + \mathbf{I}_{SE} \tag{2-78}$$

Finalmente, tomando en cuenta que $\mathbf{I}_H = \mathbf{I}_{SE}$, se llega a

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_L &= \frac{N_{SE}}{N_C}\mathbf{I}_A + \mathbf{I}_H \\ &= \frac{N_{SE} + N_C}{N_C}\mathbf{I}_H \end{aligned} \tag{2-79}$$

o

$$\frac{\mathbf{I}_L}{\mathbf{I}_H} = \frac{N_{SE} + N_C}{N_C} \tag{2-80}$$

La ventaja del valor nominal de la potencia aparente de los autotransformadores

Es interesante notar que no toda la potencia que pasa del primario al secundario en el autotransformador pasa a través de los devanados. Como resultado, si un transformador convencional se conecta como autotransformador, puede manejar mucha más potencia que aquella para la que fue concebido originalmente.

Para entender esta idea hay que remitirse de nuevo a la figura 2-32*b*). Nótese que la potencia aparente de entrada al transformador está dada por

$$S_{entr} = V_L I_L \tag{2-81}$$

y la potencia aparente de salida está dada por

$$S_{\text{sal}} = V_H I_H \tag{2-82}$$

Es fácil demostrar, mediante las ecuaciones de voltaje y de corriente [ecuaciones (2-77) y (2-80)] que la potencia aparente de entrada una vez más es igual a la potencia aparente de salida:

$$S_{\text{entr}} = S_{\text{sal}} = S_{\text{ES}} \tag{2-83}$$

donde S_{ES} se define como las potencias aparente de entrada y de salida del transformador. Sin embargo, *la potencia aparente en los devanados del transformador* es

$$S_D = V_C I_C = V_{\text{SE}} I_{\text{SE}} \tag{2-84}$$

La relación entre la potencia que entra en el primario (y sale por el secundario) del transformador y la potencia en sus devanados reales se puede encontrar de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} S_D &= V_C I_C \\ &= V_L(I_L - I_H) \\ &= V_L I_L - V_L I_H \end{aligned}$$

Utilizando la ecuación (2-80) se tiene

$$\begin{aligned} S_D &= V_L I_L - V_L I_L \frac{N_C}{N_{\text{SE}} + N_C} \\ &= V_L I_L \frac{(N_{\text{SE}} + N_C) - N_C}{N_{\text{SE}} + N_C} && \text{(2-85)} \\ &= S_{\text{ES}} \frac{N_{\text{SE}}}{N_{\text{SE}} + N_C} && \text{(2-86)} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la relación de la potencia aparente en el primario y en el secundario del autotransformador con la potencia aparente que realmente pasa a través de sus devanados es

$$\frac{S_{\text{ES}}}{S_D} = \frac{N_{\text{SE}} + N_C}{N_{\text{SE}}} \tag{2-87}$$

La ecuación (2-87) describe la *ventaja del valor nominal de la potencia aparente* de un autotransformador sobre un transformador convencional. Aquí S_{ES} es la potencia aparente que entra por el primario y sale por el secundario del transformador, mientras que S_D es la potencia aparente que realmente pasa a través de los devanados del transformador (el resto pasa del primario al secundario sin ser acoplada por los devanados del transformador). Nótese que mientras más pequeño es el devanado en serie, más grande es la ventaja.

Por ejemplo, un autotransformador de 5 000 kVA que conecta un sistema de 110 kV a un sistema de 138 kV tendría una relación de vueltas N_C/N_{SE} de 110:28. Este autotransformador debería tener devanados dimensionados para

$$\begin{aligned} S_D &= S_{\text{ES}} \frac{N_{\text{SE}}}{N_{\text{SE}} + N_C} && \text{(2-86)} \\ &= (5\,000 \text{ kVA}) \frac{28}{28 + 110} = 1\,015 \text{ kVA} \end{aligned}$$

El autotransformador tendría devanados dimensionados para cerca de 1 015 kVA, mientras que un transformador convencional necesitaría devanados dimensionados para 5 000 kVA. El autotransformador podría ser cinco veces más pequeño que el transformador convencional y también sería

mucho menos costoso. Por esta razón, es muy ventajoso construir transformadores entre dos voltajes muy parecidos como autotransformadores.

El siguiente ejemplo ilustra el análisis de un autotransformador y la ventaja nominal de los autotransformadores.

EJEMPLO 2-7

Se conecta un transformador de 100 VA y 120/12 V para conformar un autotransformador elevador (véase la figura 2-33). Si aplica un voltaje primario de 120 V al transformador.

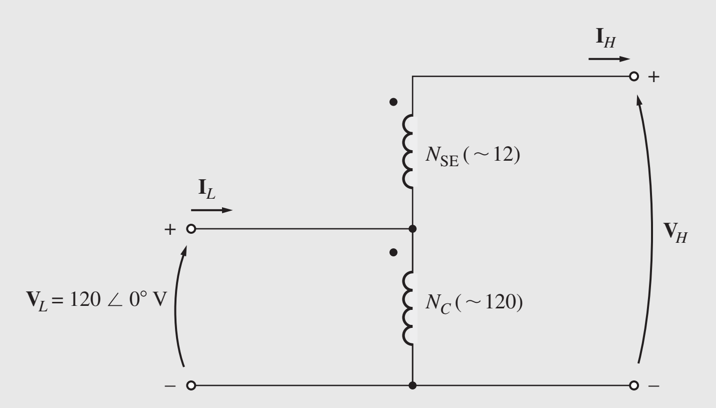


FIGURA 2-33 El autotransformador del ejemplo 2-7.

a) ¿Cuál es el voltaje secundario del transformador?
b) ¿Cuál es su capacidad máxima en voltamperes en este modo de operación?
c) Calcule la ventaja nominal de esta conexión como autotransformador sobre la ventaja nominal en una operación convencional de 120/12 V.

Solución

Para conseguir una transformación elevadora con un primario de 120 V, la relación de vueltas entre el devanado primario N_C y las vueltas en el devanado en serie N_{SE} en este transformador debe ser 120:12 (o 10:1).

a) Este transformador se usa como transformador elevador. El voltaje secundario es V_A y, de la ecuación (2-76),

$$\mathbf{V}_H = \frac{N_{SE} + N_C}{N_C}\mathbf{V}_B \tag{2-76}$$

$$= \frac{12 + 120}{120} 120 \text{ V} = 132 \text{ V}$$

b) El valor máximo en voltamperes en cualquiera de los dos devanados de este transformador es de 100 VA. ¿Cuánta potencia aparente de entrada o de salida puede suministrar? Para encontrar la respuesta debe examinarse el devanado en serie. El voltaje V_{SE} en el devanado es de 12 V y el valor en voltamperes del devanado es de 100 VA. Por lo tanto, la corriente del devanado en serie *máxima* es

$$I_{SE,\text{máx}} = \frac{S_{\text{máx}}}{V_{SE}} = \frac{100 \text{ VA}}{12 \text{ V}} = 8.33 \text{ A}$$

Debido a que I_{SE} es igual a la corriente secundaria I_S (o I_A) y en función de que el voltaje secundario es $V_S = V_A = 132$ V, la potencia aparente secundaria es

$$S_{\text{sal}} = V_S I_S = V_H I_H$$
$$= (132 \text{ V})(8.33 \text{ A}) = 1\,100 \text{ VA} = S_{\text{entr}}$$

c) La ventaja nominal se puede calcular a partir del inciso *b*) o a partir de la ecuación (2-87). A partir del inciso *b*),

$$\frac{S_{\text{ES}}}{S_D} = \frac{1\,100 \text{ VA}}{100 \text{ VA}} = 11$$

A partir de la ecuación (2-87),

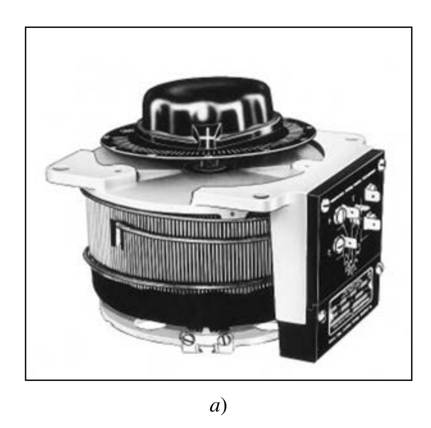
$$\frac{S_{\text{ES}}}{S_D} = \frac{N_{\text{SE}} + N_C}{N_{\text{SE}}} \tag{2-87}$$

$$= \frac{12 + 120}{12} = \frac{132}{12} = 11$$

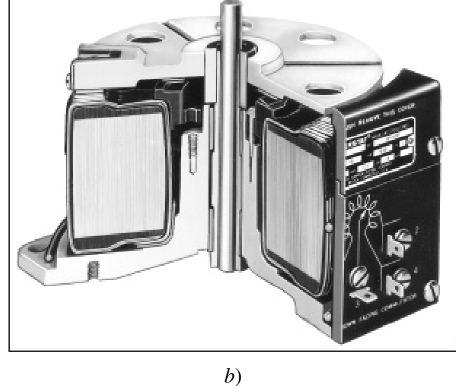
Con cualquiera de las dos ecuaciones la potencia aparente nominal se incrementa 11 veces.

Por lo regular no es posible conectar simplemente un transformador ordinario como autotransformador y utilizarlo como se muestra en el ejemplo 2-7, debido a que el aislamiento en el lado de bajo voltaje del transformador ordinario no es lo suficientemente fuerte como para soportar todo el voltaje de salida de la conexión como autotransformador. En los transformadores que se construyen de manera específica como autotransformadores, el aislamiento en la bobina más pequeña (el devanado en serie) es tan fuerte como el aislamiento en la bobina más grande.

En los sistemas de potencia es común utilizar autotransformadores siempre que dos voltajes con un nivel muy cercano necesiten transformarse, ya que mientras más cercanos sean los voltajes mayor será la ventaja de potencia del autotransformador. También se usan como transformadores variables, donde la toma de bajo voltaje se mueve hacia arriba y hacia abajo en el devanado. Ésta es una manera muy conveniente de obtener un voltaje de ca variable. En la figura 2-34 se muestra un autotransformador variable.



a)



b)

FIGURA 2-34 *a*) Autotransformador de voltaje variable. *b*) Vista en corte de un autotransformador. (*Cortesía de Superior Electric Company*.)

La principal desventaja de los autotransformadores es que a diferencia de los transformadores ordinarios *hay una conexión física directa entre el circuito primario y el secundario*, por lo que se pierde el *aislamiento eléctrico* en ambos lados. Si una aplicación particular no requiere de aislamiento eléctrico, entonces el autotransformador es una forma conveniente y *barata* de unir dos voltajes muy parecidos.

La impedancia interna de un autotransformador

Los autotransformadores tienen una desventaja más en comparación con los transformadores convencionales. Resulta que, en comparación con un transformador conectado de manera convencional,

la impedancia efectiva por unidad de un autotransformador es menor por un factor igual al inverso de la ventaja de potencia de la conexión como autotransformador.

La prueba de este hecho se deja como ejercicio al final del capítulo.

La impedancia interna reducida de un autotransformador en comparación con un transformador convencional con dos devanados puede ser un grave problema en algunas aplicaciones en las que se requiere de la impedancia en serie para limitar los flujos de corriente durante las fallas del sistema de potencia (cortocircuitos). El hecho de que la impedancia interna sea más pequeña en un autotransformador se debe tomar en cuenta en las aplicaciones prácticas antes de seleccionar uno.

EJEMPLO 2-8

Un transformador está dimensionado para 1 000 kVA, 12/1.2 kV y 60 Hz cuando opera como un transformador convencional con dos devanados. En estas condiciones, su resistencia y reactancia en serie son de 1 y 8%, respectivamente. El transformador se utilizará como un transformador reductor a 13.2/12 kV en un sistema de distribución de potencia. En la conexión como autotransformador, *a*) ¿cuál es la capacidad nominal cuando se utiliza de esta manera? y *b*) ¿cuál es la impedancia en serie del transformador en el sistema de medidas por unidad?

Solución

a) La relación de vueltas N_C/N_{SE} debe ser 12:1.2 o 10:1. El voltaje nominal de este transformador será 13.2/12 kV y la potencia aparente (voltamperes) nominal será

$$S_{ES} = \frac{N_{SE} + N_C}{N_{SE}} S_D$$

$$= \frac{1 + 10}{1} 1\,000 \text{ kVA} = 11\,000 \text{ kVA}$$

b) La impedancia del transformador en el sistema por unidad cuando está conectado de manera convencional es

$$Z_{eq} = 0.01 + j0.08 \text{ pu} \qquad \text{devanados separados}$$

La ventaja de potencia aparente de este autotransformador es 11, por lo que la impedancia por unidad del autotransformador conectado como se describe es

$$Z_{eq} = \frac{0.01 + j0.08}{11}$$

$$= 0.00091 + j0.00727 \text{ pu} \qquad \text{autotransformador}$$

2.10 TRANSFORMADORES TRIFÁSICOS

Casi todos los sistemas principales de generación y distribución de potencia en el mundo de hoy son trifásicos de ca. Debido a que los sistemas trifásicos tienen una función tan importante en la vida moderna, es necesario entender cómo se utilizan los transformadores en ellos.

Los transformadores para los circuitos trifásicos se pueden fabricar de dos maneras. Una de ellas consiste simplemente en tomar tres transformadores monofásicos y conectarlos en un banco trifásico. Otra alternativa es construir transformadores trifásicos con tres grupos de devanados enrollados en un núcleo común. En las figuras 2-35 y 2-36 se muestran estos dos tipos de construcción de transformadores. Ambos diseños (tres transformadores separados y un transformador trifásico sencillo) se usan hoy en día y usted estará a gusto trabajando con ellos en la práctica. El transformador trifásico como tal es más ligero, pequeño, barato y un poco más eficiente, pero el uso de tres transformadores monofásicos por separado tiene la ventaja de que cualquier unidad del banco puede ser reemplazada individualmente si se presenta alguna falla. A fin de potencialmente ahorrar dinero, una instalación sólo podría necesitar tener un transformador monofásico separado sencillo para respaldar todos los trifásicos.

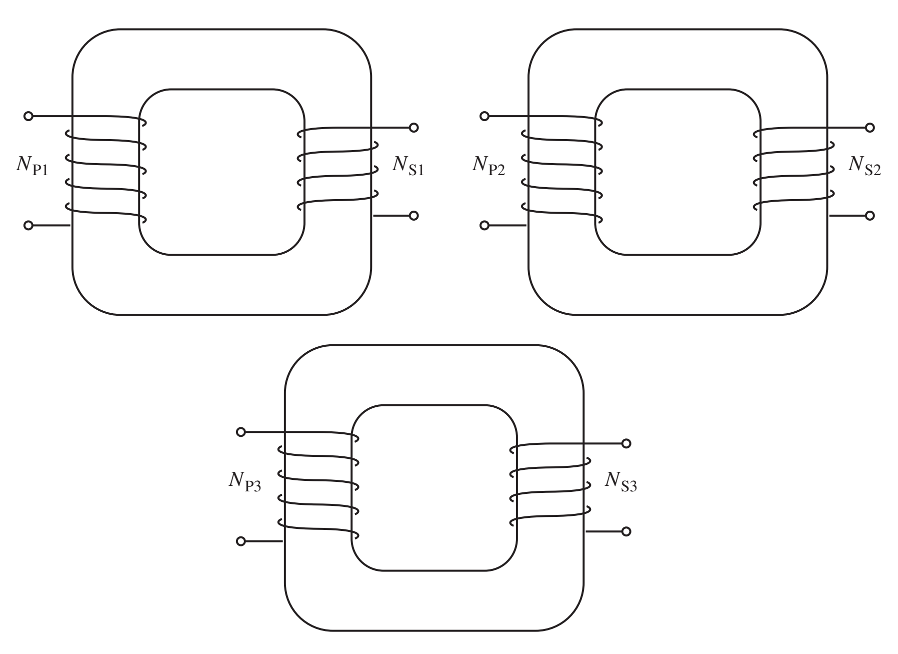


FIGURA 2-35 Banco trifásico de transformador compuesto por tres transformadores independientes.

Conexiones de transformadores trifásicos

Un transformador trifásico consta de tres transformadores, ya sea separados o combinados sobre un solo núcleo. Los primarios y secundarios de cualquier transformador trifásico se pueden conectar independientemente en ye (Y) o en delta (Δ). Esto nos da un total de cuatro conexiones posibles en el banco de un transformador trifásico:

1. Ye-ye (Y-Y).
2. Ye-delta (Y-Δ).
3. Delta-ye (Δ-Y).
4. Delta-delta (Δ-Δ).

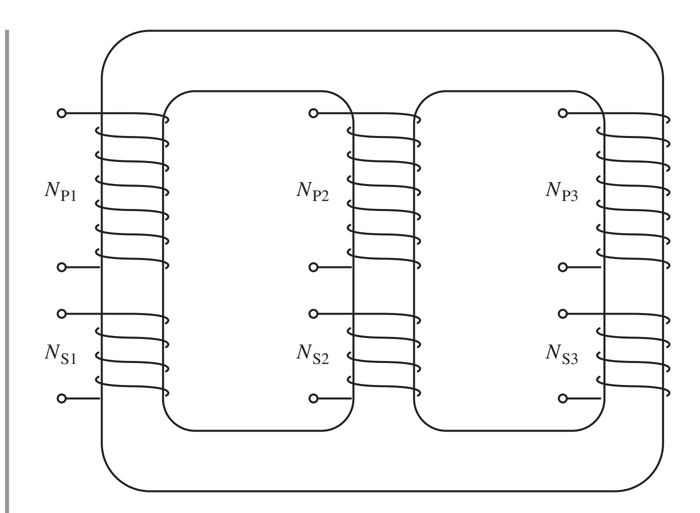


FIGURA 2-36 Transformador trifásico construido sobre un núcleo de tres columnas.

En la figura 2-37 se muestran estas conexiones en las siguientes páginas.

La clave para analizar un banco trifásico es ver un solo transformador del banco. *Cualquier transformador del banco se comporta exactamente como los transformadores monofásicos ya estudiados*. La impedancia, la regulación de voltaje, la eficiencia y los demás cálculos para los transformadores trifásicos se llevan a cabo *con base en un criterio por fase*, utilizando exactamente las mismas técnicas desarrolladas para los transformadores monofásicos.

Las ventajas y desventajas de cada tipo de conexión de transformadores trifásicos se explican a continuación.

CONEXIÓN YE-YE La conexión Y-Y de transformadores trifásicos se muestra en la figura 2-37*a*). En una conexión Y-Y, el voltaje primario en cada fase del transformador está dado por $V_{\phi P} = V_{LP}/\sqrt{3}$. El voltaje de fase primario se relaciona con el voltaje de fase secundario por medio de la relación de vueltas del transformador. El voltaje de fase en el secundario está relacionado con la línea de voltaje en el secundario por $V_{LS} = \sqrt{3}V_{\phi S}$. Por lo tanto, la relación de voltaje general en el transformador es

$$\frac{V_{LP}}{V_{LS}} = \frac{\sqrt{3}V_{\phi P}}{\sqrt{3}V_{\phi S}} = a \qquad \text{Y-Y} \tag{2-88}$$

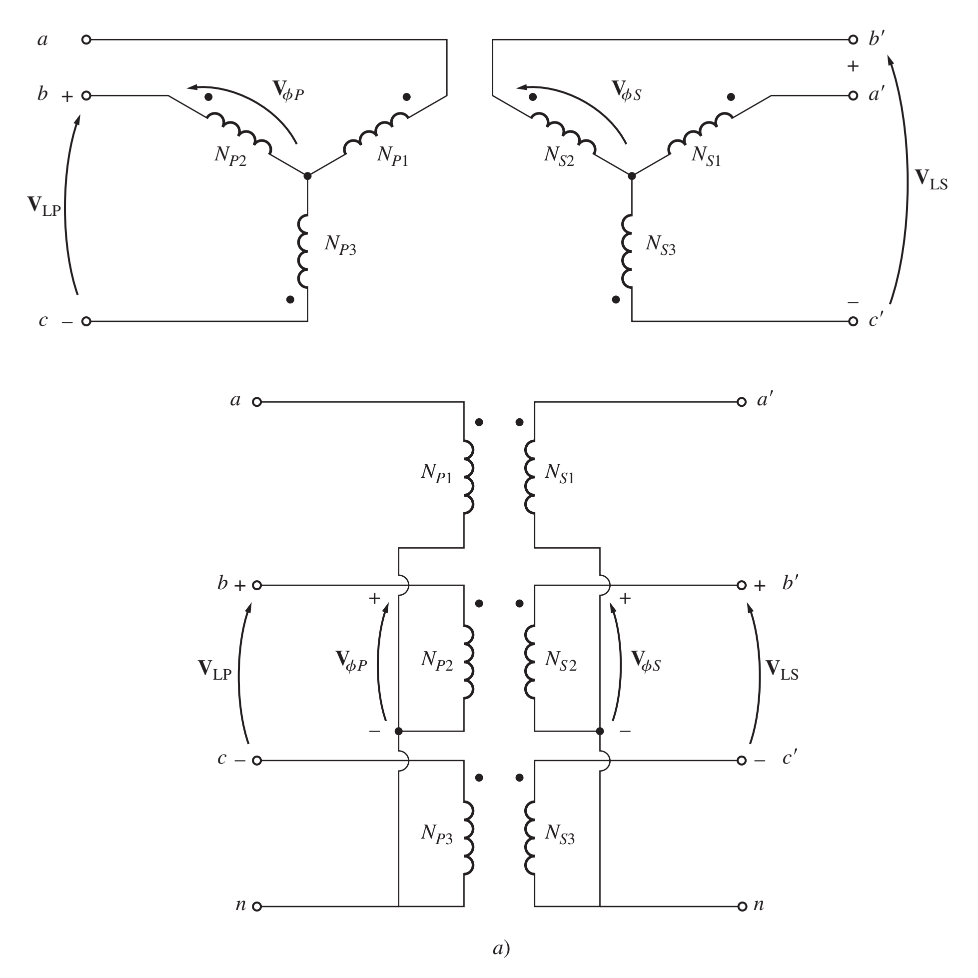


FIGURA 2-37 Diagramas de conexión y de cableado de un transformador trifásico: *a*) Y-Y; *b*) Y-Δ; *c*) Δ-Y; *d*) Δ-Δ.

La conexión Y-Y tiene dos problemas graves:

1. Si las cargas en el circuito del transformador no están equilibradas, entonces los voltajes en las fases del transformador pueden llegar a desequilibrarse severamente.
2. Los voltajes de terceras armónicas pueden ser grandes.

Si se aplica un grupo trifásico de voltajes a un transformador Y-Y, los voltajes en cualquier fase estarán separados por 120° de los voltajes en cualquier otra fase. Sin embargo, *los componentes de la tercera armónica de cada una de las tres fases estarán en fase entre sí*, debido a que hay tres ciclos en la tercera armónica para cada ciclo de la frecuencia fundamental. Invariablemente habrá componentes de la tercera armónica en el transformador, debido a la no linealidad del núcleo. Estos componentes siempre se adicionan. El resultado es un componente de voltaje de la tercera armónica muy grande, además del voltaje fundamental de 50 o 60 Hz. Este voltaje de la tercera armónica puede ser mayor que el voltaje fundamental mismo.

Tanto el problema de desequilibrio de voltajes como el de la tercera armónica se pueden resolver utilizando una de las dos técnicas siguientes:

1. *Conectando sólidamente a tierra los neutros de los transformadores*, en especial el neutro del devanado primario. Esta conexión permite que los componentes aditivos de la tercera armónica causen un flujo de corriente en el neutro en lugar de acumular grandes voltajes. El neutro también suministra un camino de regreso para cualquier desequilibrio de corriente en la carga.

2. *Añadir un tercer devanado (terciario) conectado* en Δ al banco de transformadores. Si se añade al transformador un tercer devanado conectado en Δ, entonces los componentes de voltaje de la tercera armónica en Δ se sumarán y causarán un flujo de corriente circulante dentro del devanado. Esto suprime los componentes de voltaje de la tercera armónica de la misma manera que hacer tierra con los neutros de los transformadores.

   Los devanados terciarios conectados en Δ no necesitan ni siquiera sacarse de la caja del transformador, pero se usan con frecuencia para suministrar iluminación y potencia auxiliar dentro de la subestación donde está ubicado el transformador. Los devanados terciarios deben ser suficientemente grandes para manejar las corrientes circulantes, de modo que por lo regular se hacen para alrededor de un tercio de la potencia nominal de los dos devanados principales.

Se *debe* utilizar una de las dos técnicas de corrección siempre que se instale un transformador Y-Y. En la práctica se utilizan muy pocos transformadores Y-Y debido a que alguno de los otros tipos de transformadores trifásicos puede realizar las mismas funciones.

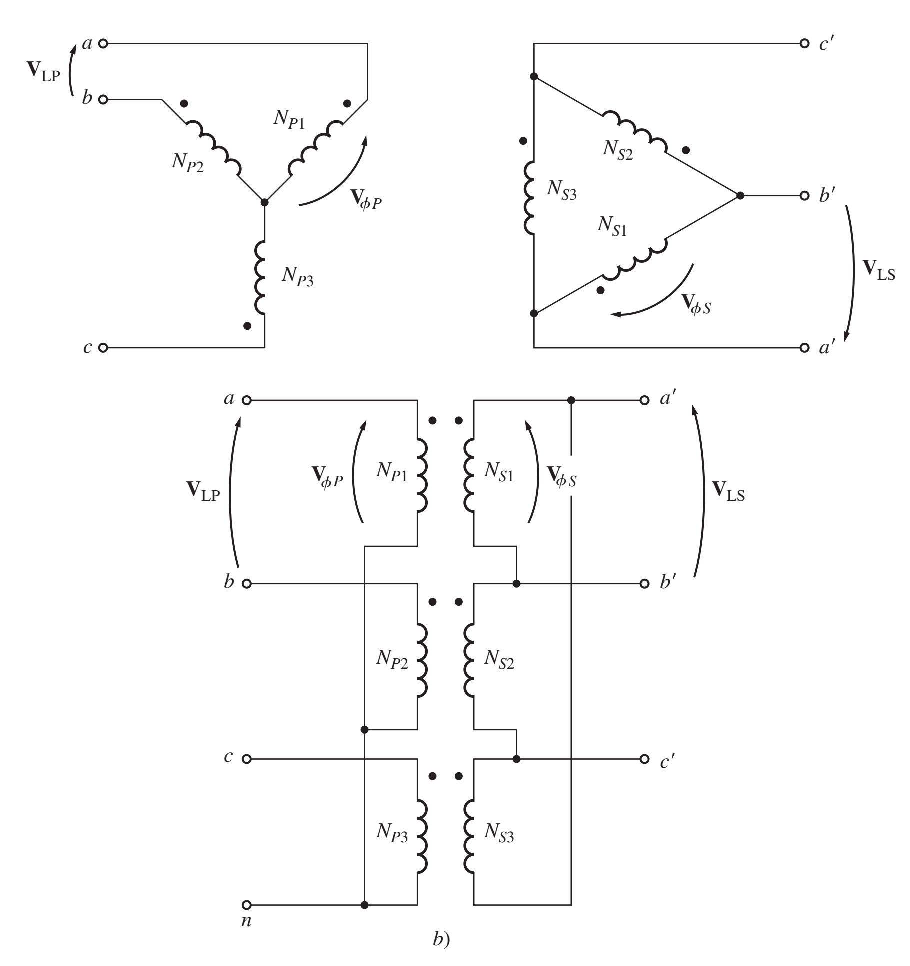


FIGURA 2-37 *b*) Y-Δ (*continuación*).

CONEXIÓN YE-DELTA En la figura 2-37*b*) se muestra una conexión Y-Δ de los transformadores trifásicos. En esta conexión, el voltaje de línea primario está relacionado con el voltaje de fase primario por $V_{LP} = \sqrt{3}V_{\phi P}$, mientras que el voltaje de línea secundario es igual al voltaje de fase secundario $V_{LS} = V_{\phi S}$. La relación de voltaje de cada fase es

$$\frac{V_{\phi P}}{V_{\phi S}} = a$$

por lo que la relación general entre el voltaje de línea en el lado primario del banco y el voltaje de línea en el lado secundario del banco es

$$\frac{V_{LP}}{V_{LS}} = \frac{\sqrt{3}V_{\phi P}}{V_{\phi S}}$$

$$\frac{V_{LP}}{V_{LS}} = \sqrt{3}a \qquad \text{Y-}\Delta \tag{2-89}$$

La conexión Y-Δ no presenta problemas con los componentes en sus voltajes de la tercera armónica, puesto que se consumen en una corriente circulante en el lado Δ. Esta conexión también es más estable con respecto a las cargas desequilibradas, debido a que Δ redistribuye parcialmente cualquier desequilibrio que se presente.

Sin embargo, este arreglo presenta un problema. Debido a la conexión, el voltaje secundario se desplaza 30° con respecto al voltaje primario del transformador. El hecho de que se desplace una fase puede causar problemas en la puesta en paralelo de los secundarios de dos bancos de transformadores. Los ángulos de fase de los transformadores secundarios deben ser iguales si se desea ponerlos en paralelo, lo que quiere decir que se tiene que poner atención a la dirección del desplazamiento de fase de 30° en cada banco del transformador para ponerlos en paralelo.

En Estados Unidos se acostumbra que el voltaje secundario esté 30° en retraso con respecto al voltaje primario. Aunque ésta es la norma no siempre se cumple y las instalaciones más viejas

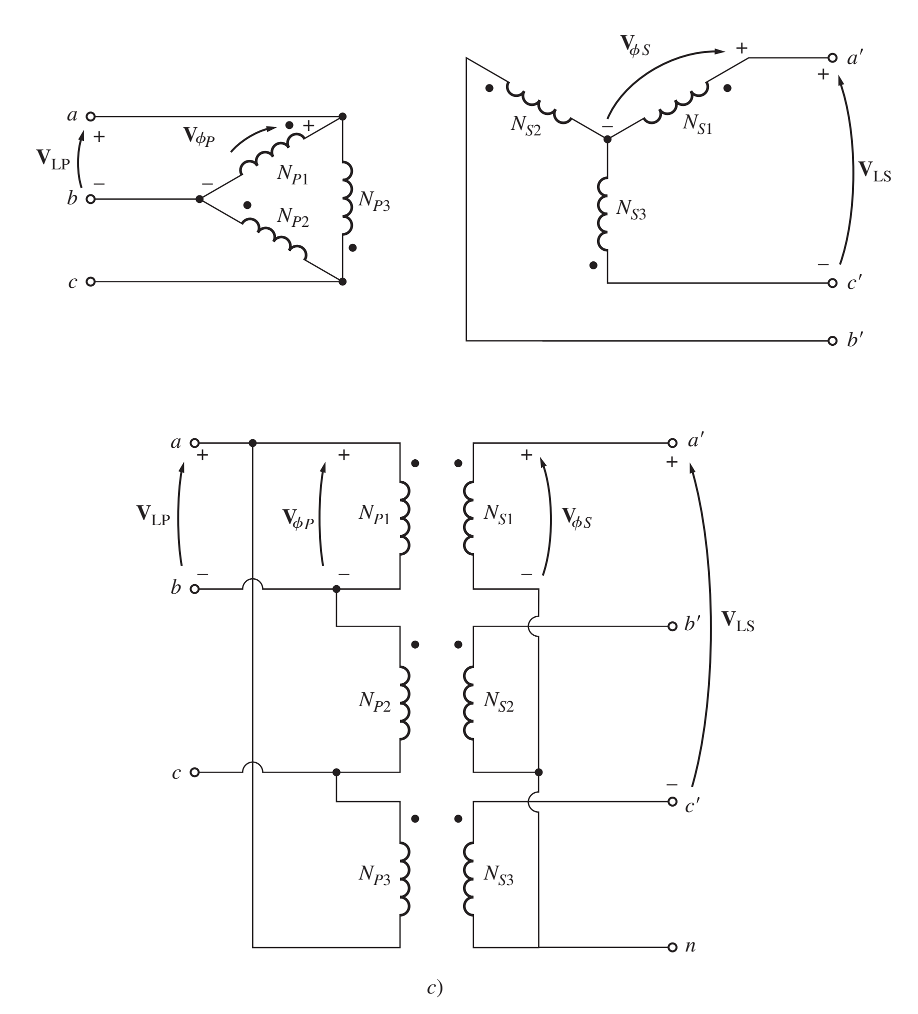


FIGURA 2-37 *c*) Δ-Y (*continuación*).

se deben revisar cuidadosamente antes de poner un nuevo transformador en paralelo con ellas para asegurarse de que sus ángulos de fase concuerden.

La conexión que se muestra en la figura 2-37*b*) causará que el voltaje secundario esté en retraso si la secuencia de fase del sistema es *abc*. Si la secuencia de fase del sistema es *acb*, entonces la conexión que se muestra en la figura 2-37*b*) causará que el voltaje secundario esté 30° en adelanto con respecto del voltaje primario.

CONEXIÓN DELTA-YE En la figura 2-37*c*) se muestra una conexión Δ-Y de un transformador trifásico. En una conexión Δ-Y, el voltaje de línea primario es igual al voltaje de fase primario $V_{LP} = V_{\phi P}$, mientras que los voltajes secundarios están relacionados por $V_{LS} = \sqrt{3}V_{\phi S}$. Por lo tanto, la relación de voltaje de línea a línea en esta conexión es

$$\frac{V_{LP}}{V_{LS}} = \frac{V_{\phi P}}{\sqrt{3}V_{\phi S}}$$

$$\frac{V_{LP}}{V_{LS}} = \frac{a}{\sqrt{3}} \qquad \Delta\text{-Y} \tag{2-90}$$

Esta conexión tiene las mismas ventajas y el mismo desplazamiento de fase que el transformador Y-Δ. La conexión que se muestra en la figura 2-37*c*) ocasiona que el voltaje secundario esté, como anteriormente, en retraso de 30° con respecto al voltaje primario.

CONEXIÓN DELTA-DELTA La conexión Δ-Δ se muestra en la figura 2-37*d*). En una conexión Δ-Δ, $V_{LP} = V_{\phi P}$ y $V_{LS} = V_{\phi S}$, por lo que la relación entre los voltajes de línea primario y secundario es

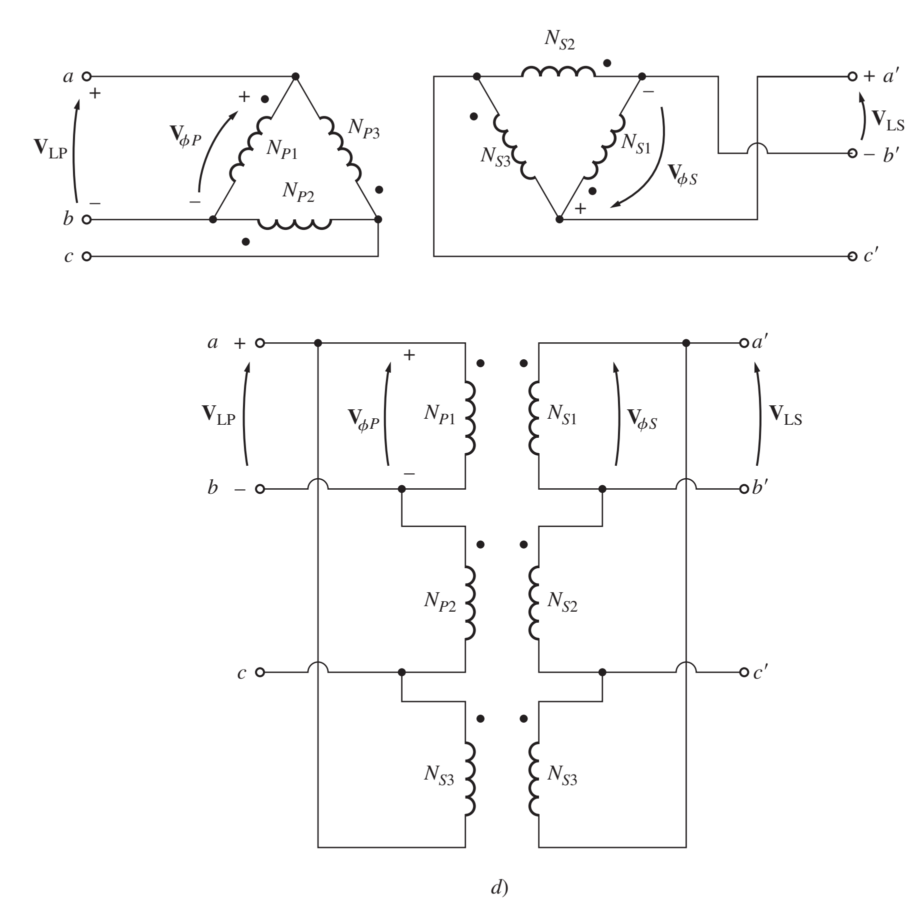


FIGURA 2-37 *d*) Δ-Δ (*conclusión*).

$$\frac{V_{LP}}{V_{LS}} = \frac{V_{\phi P}}{V_{\phi S}} = a \qquad \Delta\text{-}\Delta \tag{2-91}$$

Este transformador no tiene un desplazamiento de fase asociado y no tiene problemas con cargas desequilibradas o armónicos.

El sistema por unidad para los transformadores trifásicos

El sistema de medidas por unidad se aplica tanto a los transformadores trifásicos como a los transformadores monofásicos. Las ecuaciones básicas monofásicas de (2-53) a (2-56) se aplican a sistemas trifásicos con una base *por fase*. Si el valor en voltamperes base total del banco del transformador se llama S_{base}, entonces el valor en voltamperes base de uno de los transformadores $S_{1\phi,\text{ base}}$ es

$$S_{1\phi,\text{base}} = \frac{S_{\text{base}}}{3} \tag{2-92}$$

y la corriente base y la impedancia base del transformador son

$$I_{\phi,\text{base}} = \frac{S_{1\phi,\text{base}}}{V_{\phi,\text{base}}} \tag{2-93a}$$

$$I_{\phi,\text{base}} = \frac{S_{\text{base}}}{3\ V_{\phi,\text{base}}} \tag{2-93b}$$

$$Z_{\text{base}} = \frac{(V_{\phi,\text{base}})^2}{S_{1\phi,\text{base}}} \tag{2-94a}$$

$$Z_{\text{base}} = \frac{3(V_{\phi,\text{base}})^2}{S_{\text{base}}} \tag{2-94b}$$

Las cantidades de línea de los bancos de transformadores trifásicos también se pueden representar en el sistema por unidad. La relación entre el voltaje de línea base y el voltaje de fase base del transformador depende de la conexión de los devanados. Si los devanados están conectados en delta, $V_{\text{L,base}} = V_{\phi,\text{base}}$, mientras que si los devanados están conectados en ye, $V_{\text{L,base}} = \sqrt{3}V_{\phi,\text{base}}$. La corriente de línea base en un banco del transformador trifásico está dada por

$$I_{L,\text{base}} = \frac{S_{\text{base}}}{\sqrt{3}V_{L,\text{base}}} \tag{2-95}$$

La aplicación del sistema por unidad a los problemas de transformadores trifásicos es similar a su aplicación a los ejemplos anteriores sobre transformadores monofásicos.

EJEMPLO 2-9

Un transformador de distribución de 50 kVA, 13 800/208 V, en Δ-Y tiene una resistencia de 1% y una reactancia de 7% por unidad.

a) ¿Cuál es la impedancia de fase del transformador referida al lado de alto voltaje?
b) Calcule la regulación de voltaje de este transformador a plena carga y a 0.8 FP en retraso, utilizando la impedancia del lado de alto voltaje.
c) Determine la regulación de voltaje de este transformador en las mismas condiciones utilizando el sistema por unidad.

Solución

a) El lado de alto voltaje de este transformador tiene un voltaje de línea base de 13 800 V y una potencia aparente base de 50 kVA. Ya que el primario está conectado en Δ, su voltaje de fase es igual a su voltaje de línea. Por lo tanto, su impedancia base es

$$Z_{base} = \frac{3(V_{\phi,\,base})^2}{S_{base}} \tag{2-94b}$$

$$= \frac{3(13\,800\text{ V})^2}{50\,000\text{ VA}} = 11\,426\ \Omega$$

La impedancia por unidad del transformador es

$$Z_{eq} = 0.01 + j0.07\text{ pu}$$

por lo que la impedancia en ohms en el lado de alto voltaje es

$$Z_{eq} = Z_{eq,pu}Z_{base}$$
$$= (0.01 + j0.07\text{ pu})(11\,426\ \Omega) = 114.2 + j800\ \Omega$$

b) Para calcular la regulación de voltaje del banco de un transformador trifásico, determine la regulación de voltaje de cualquier transformador monofásico en el banco. Los voltajes en un transformador monofásico son voltajes de fase, por lo que

$$\text{RV} = \frac{V_{\phi P} - aV_{\phi S}}{aV_{\phi S}} \times 100\%$$

El valor nominal del voltaje de fase en el transformador en el primario es de 13 800 V, por lo que la corriente de fase nominal en el primario está dada por

$$I_\phi = \frac{S}{3V_\phi}$$

La potencia aparente nominal es $S = 50$ kVA, por lo que

$$\text{I}_\phi = \frac{50\,000\text{ VA}}{3(13\,800\text{ V})} = 1.208\text{ A}$$

El voltaje de fase nominal en el secundario del transformador es $208\text{ V}/\sqrt{3} = 120$ V. Cuando se refiere al lado de alto voltaje del transformador, este voltaje llega a ser $V'_{\phi S} = aV_{\phi S} = 13\,800$ V. Suponga que el secundario del transfomador opera a voltaje y corriente nominales y encuentre el voltaje de fase primario resultante:

$$\mathbf{V}_{\phi P} = a\mathbf{V}_{\phi S} + R_{eq}\mathbf{I}_\phi + jX_{eq}\mathbf{I}_\phi$$
$$= 13\,800\angle 0°\text{ V} + (114.2\ \Omega)(1.208\angle{-36.87°}\text{ A}) + (j800\ \Omega)(1.208\angle{-36.87°}\text{ A})$$
$$= 13\,800 + 138\angle{-36.87°} + 966.4\angle 53.13°$$
$$= 13\,800 + 110.4 - j82.8 + 579.8 + j773.1$$
$$= 14\,490 + j690.3 = 14\,506\angle 2.73°\text{ V}$$

Por lo tanto,

$$\text{RV} = \frac{V_{\phi P} - aV_{\phi S}}{aV_{\phi S}} \times 100\%$$
$$= \frac{14\,506 - 13\,800}{13\,800} \times 100\% = 5.1\%$$

c) En el sistema por unidad, el voltaje de salida es $1 \angle 0°$ y la corriente es $1 \angle -36.87°$. Por lo tanto, el voltaje de entrada es

$$\begin{aligned} V_P &= 1\angle 0° + (0.01)(1\angle -36.87°) + (j0.07)(1\angle -36.87°) \\ &= 1 + 0.008 - j0.006 + 0.042 + j0.056 \\ &= 1.05 + j0.05 = 1.051\angle 2.73° \end{aligned}$$

La regulación de voltaje es

$$\text{RV} = \frac{1.051 - 1.0}{1.0} \times 100\% = 5.1\%$$

La regulación de voltaje en el banco del transformador es la misma sin importar si los cálculos se hacen en ohms o en el sistema por unidad.

2.11 TRANSFORMACIÓN TRIFÁSICA UTILIZANDO DOS TRANSFORMADORES

Además de las conexiones trifásicas estándar, existen modos de llevar a cabo la transformación trifásica con sólo dos transformadores. Estas técnicas se emplean algunas veces para crear potencia trifásica en ubicaciones en las que no están disponibles las tres líneas de potencia. Por ejemplo, en áreas rurales, una compañía eléctrica a menudo tiende una o dos de las tres fases en una línea de distribución, debido a que las necesidades de potencia en el área no justifican el costo de tender los tres cables. Si hay un usuario aislado de potencia trifásica a lo largo de una ruta atendida por una línea de distribución con dos de las tres fases, se puede usar esta técnica para crear potencia trifásica para ese usuario en particular.

Todas las técnicas que crean potencia trifásica con sólo dos transformadores involucran una reducción de la capacidad de manejo de potencia de los transformadores, pero se justifican en ciertas situaciones económicas.

Algunas de las conexiones más importantes con dos transformadores son:

1. Conexión Δ abierta (o V-V).
2. Conexión Y abierta-Δ abierta.
3. Conexión Scott-T.
4. Conexión trifásica en T.

Cada una de estas conexiones de transformador se describe en esta sección.

La conexión Δ abierta (o V-V)

En ciertas situaciones no puede utilizarse un banco de transformadores completo para realizar una transformación trifásica. Por ejemplo, supóngase que un banco de transformadores Δ-Δ que consta de transformadores separados tiene una fase dañada que se debe retirar para su reparación. La situación resultante se muestra en la figura 2-38. Si los dos voltajes secundarios que permanecen son $\mathbf{V}_A = V \angle 0°$ y $\mathbf{V}_A = V \angle 120°$ V, entonces el voltaje que pasa a través de la abertura que dejó el tercer transformador está dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_C &= -\mathbf{V}_A - \mathbf{V}_B \\ &= -V\angle 0° - V\angle -120° \\ &= -V - (-0.5V - j0.866V) \\ &= -0.5V + j0.866V \\ &= V\angle 120° \qquad \text{V} \end{aligned}$$

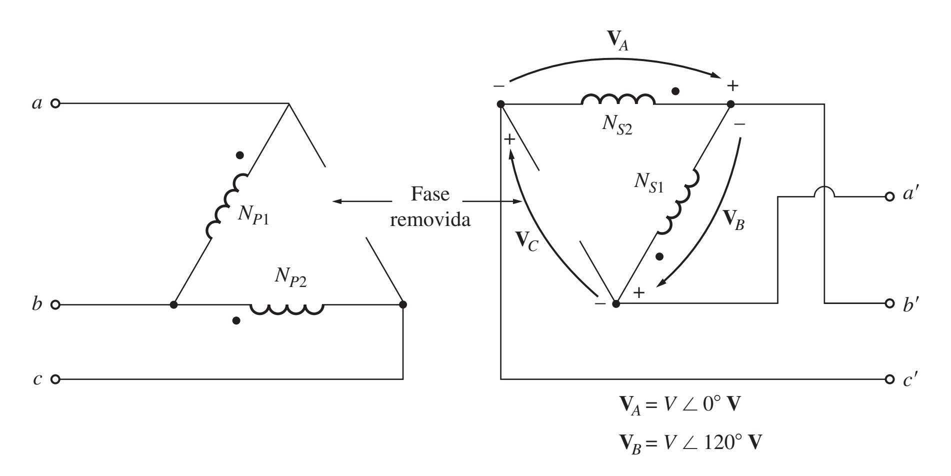


FIGURA 2-38 Conexión de un transformador en Δ abierta o V–V.

Éste es el mismo voltaje que estaría presente si el tercer transformador siguiera ahí. A menudo, a la fase *C* se le llama *fase fantasma*. Entonces, la conexión delta abierta posibilita que un banco de transformadores siga funcionando con sólo dos de sus transformadores, lo que permite que fluya cierta potencia aun cuando se haya removido una fase dañada.

¿Cuánta potencia aparente puede suministrar el banco si se retira uno de sus tres transformadores? En principio, parece que podría suministrar tan sólo dos tercios de su potencia aparente nominal, debido a que sólo dos tercios de los transformadores están presentes. Sin embargo, no es tan sencillo. Observe la figura 2-39 para una mejor comprensión de lo que sucede cuando se retira un transformador.

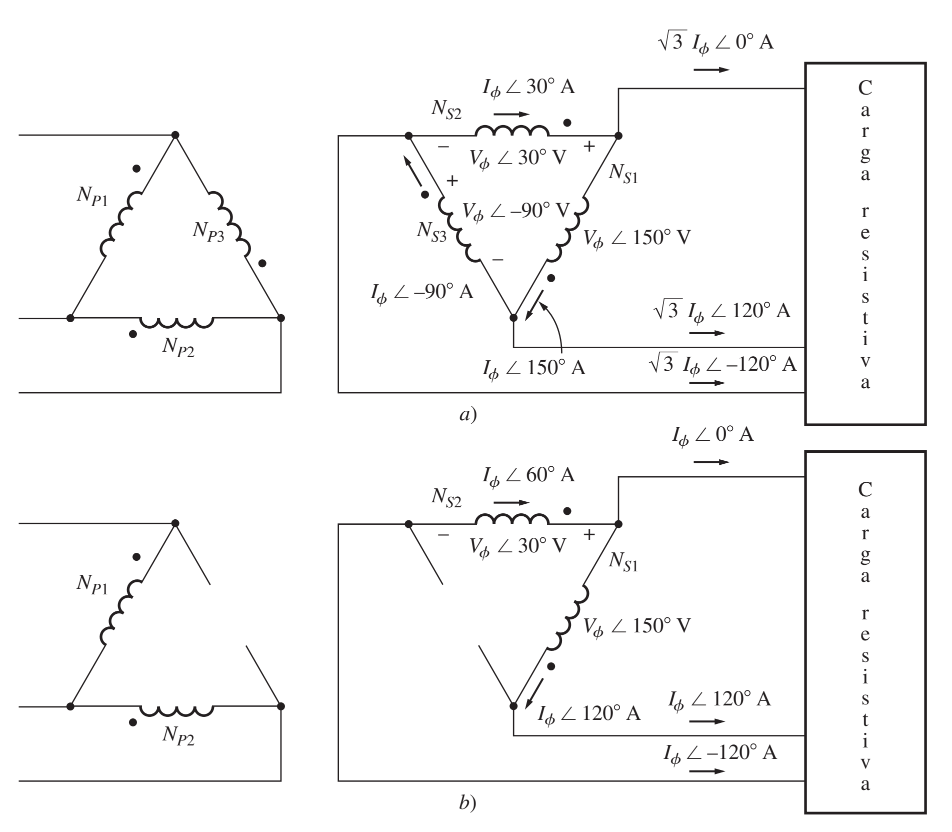


FIGURA 2-39 *a*) Voltajes y corrientes en un banco de transformador Δ-Δ. *b*) Voltajes y corrientes en un banco de transformador Δ abierta.

La figura 2-39*a*) muestra el banco de transformadores en operación normal conectado a una carga resistiva. Si el voltaje nominal de un transformador en el banco es V_ϕ y la corriente nominal es I_ϕ, entonces la potencia máxima que puede suministrar a la carga es

$$P = 3V_\phi I_\phi \cos\theta$$

El ángulo entre el voltaje V_ϕ y la corriente I_ϕ en cada fase es 0°, por lo que la potencia total suministrada por el transformador es

$$\begin{aligned} P &= 3V_\phi I_\phi \cos\theta \\ &= 3V_\phi I_\phi \end{aligned} \tag{2-96}$$

En la figura 2-39*b*) se muestra un transformador con delta abierta. Es importante hacer notar los ángulos en los voltajes y corrientes en el banco de este transformador. Debido a que falta una de las fases del transformador, la corriente de línea de transmisión es igual a la corriente de fase en cada transformador y las corrientes y voltajes en el banco del transformador tienen un ángulo que difiere en 30°. Ya que los ángulos de la corriente y el voltaje difieren en cada uno de los dos transformadores, es necesario examinar cada uno individualmente para determinar la potencia máxima que puede suministrar. El voltaje del transformador 1 tiene un ángulo de 150° y la corriente tiene un ángulo de 120°, por lo que la expresión de la potencia máxima en el transformador 1 es

$$\begin{aligned} P_1 &= V_\phi I_\phi \cos(150 - 120) \\ P_1 &= V_\phi I_\phi \cos(30) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} V_\phi I_\phi \end{aligned} \tag{2-97}$$

En el caso del transformador 2, el voltaje tiene un ángulo de 30° y la corriente tiene un ángulo de 60°, por lo que la potencia máxima es

$$\begin{aligned} P_2 &= V_\phi I_\phi \cos(30 - 60) \\ P_2 &= V_\phi I_\phi \cos(-30) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} V_\phi \end{aligned} \tag{2-98}$$

Por lo tanto, la potencia máxima total del banco delta abierta está dada por

$$P = \sqrt{3} V_\phi I_\phi \tag{2-99}$$

La corriente nominal es la misma en cada transformador, sin importar si son dos o tres, y el voltaje es el mismo en cada transformador, por lo que la razón entre la potencia de salida disponible del banco delta abierta y la potencia de salida disponible del banco trifásico normal es

$$\frac{P_{\text{abierta }\Delta}}{P_{3\text{ fase}}} = \frac{\sqrt{3}V_\phi I_\phi}{3V_\phi I_\phi} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.577 \tag{2-100}$$

La potencia disponible que sale del banco delta abierta es sólo 57.7% del valor nominal del banco original.

Una buena pregunta es qué pasa con el resto del valor nominal del banco delta abierta. Después de todo, la potencia total que los dos generadores juntos pueden producir equivale a dos tercios del valor nominal del banco original. Para encontrar la respuesta se debe examinar la potencia reactiva del banco delta abierta. La potencia reactiva del transformador 1 es

$$\begin{aligned} Q_1 &= V_\phi I_\phi \operatorname{sen}(150 - 120) \\ Q_1 &= V_\phi I_\phi \operatorname{sen}(30) \\ &= \tfrac{1}{2} V_\phi I_\phi \end{aligned}$$

La potencia reactiva del transformador 2 es

$$Q_2 = V_\phi I_\phi \text{ sen } (30 - 60)$$
$$Q_2 = V_\phi I_\phi \text{ sen } (-30)$$
$$= -\tfrac{1}{2} V_\phi I_\phi$$

Entonces, un transformador produce potencia reactiva que consume el otro. Este intercambio de energía entre los dos transformadores es lo que limita la potencia de salida a 57.7% del *valor nominal del banco original* en lugar del esperado 66.7%.

Otra manera de ver el valor nominal de la conexión delta abierta es que se puede utilizar 86.6% del valor nominal *de los dos transformadores restantes*.

Las conexiones delta abierta se utilizan ocasionalmente cuando se desea suministrar una pequeña cantidad de potencia trifásica a una carga monofásica. En tal caso, se puede utilizar la conexión de la figura 2-40, donde el transformador T_2 es mucho más grande que el transformador T_1.

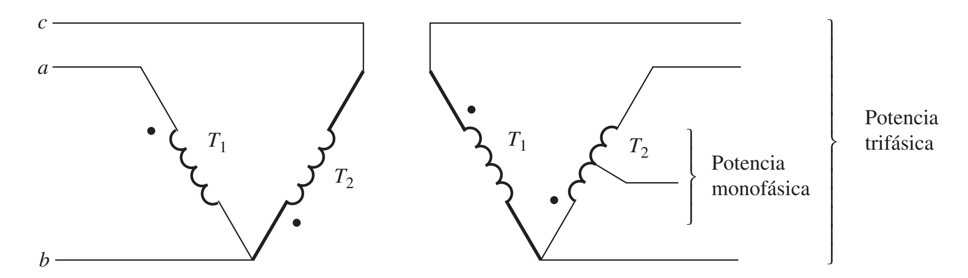


FIGURA 2-40 Utilización de una conexión de transformador en Δ abierta para suministrar una pequeña cantidad de potencia trifásica y mucha potencia monofásica. El transformador T_2 es mucho mayor que el transformador T_1.

La conexión ye abierta-delta abierta

La conexión ye abierta-delta abierta es muy parecida a la conexión delta abierta excepto en que los voltajes primarios se derivan de dos fases y el neutro. Este tipo de conexión se muestra en la figura 2-41. Se utiliza para dar servicio a pequeños clientes comerciales que necesitan servicio trifásico en áreas rurales donde no están disponibles las tres fases. Con esta conexión un cliente puede obtener el servicio trifásico provisional hasta que la demanda haga necesaria la instalación de la tercera fase.

Una gran desventaja de esta conexión es que debe fluir una corriente de retorno muy grande en el neutro del circuito primario.

La conexión Scott-T

La conexión Scott-T es una manera de obtener dos fases separadas 90° a partir de un suministro de potencia trifásica. En los comienzos de la transmisión de potencia de ca los sistemas de potencia bifásicos y trifásicos eran muy comunes. En aquellos días era necesariamente rutinario conectar entre sí sistemas de potencia bifásicos y trifásicos. Con este propósito se desarrolló la conexión de transformador Scott-T.

Hoy en día, la potencia bifásica está básicamente limitada a ciertas aplicaciones de control, pero aún se usa la Scott-T para producir la potencia necesaria para operarla.

La Scott-T consta de dos transformadores monofásicos con idéntica capacidad. Uno tiene una toma en su devanado primario a 86.6% de su voltaje a plena carga. Están conectados como se muestra en la figura 2-42*a*). La toma de 86.6% del transformador T_2 está conectada a la toma central del transformador T_1. Los voltajes aplicados al devanado primario se muestran en la figura 2-42*b*) y los voltajes resultantes aplicados a los primarios de los dos transformadores se muestran en la figura 2-42*c*). Debido a que estos voltajes se encuentran desfasados 90°, ocasionan una salida bifásica.

Esta conexión también permite convertir la potencia bifásica en potencia trifásica, pero debido a que hay muy pocos generadores bifásicos en uso, por lo común no se hace.

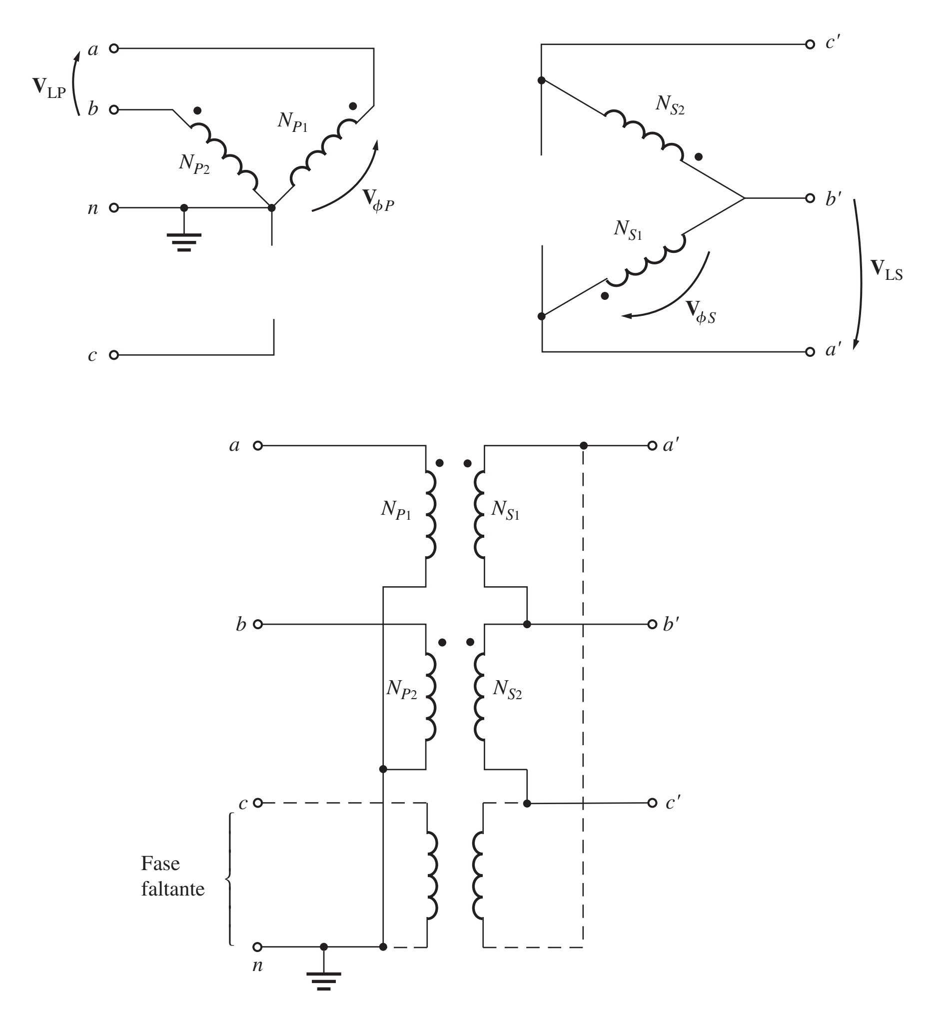


FIGURA 2-41 Diagrama de cableado de la conexión del transformador Y abierta-Δ abierta. Nótese que esta conexión es idéntica a la conexión Y-Δ de la figura 2-37*b*), excepto por la ausencia del tercer transformador y por la presencia del hilo del neutro.

La conexión T trifásica

La conexión Scott-T utiliza dos transformadores para convertir *potencia trifásica* en *potencia bifásica* con un nivel diferente de voltaje. Mediante una sencilla modificación de esta conexión, los mismos dos transformadores pueden convertir *potencia trifásica* en *potencia trifásica* con otro nivel de voltaje. Esta conexión se muestra en la figura 2-43. En este caso, tanto el devanado primario como secundario del transformador T_2 tienen una toma al 86.6% y las tomas están conectadas a las tomas centrales de los devanados correspondientes del transformador T_1. En esta conexión, a T_1 se le llama *transformador principal* y a T_2 *transformador de conexión en T* (*teaser transformer*).

Al igual que en la Scott-T, el voltaje de entrada trifásico produce dos voltajes desfasados 90° en los devanados primarios de los transformadores. Estos voltajes primarios producen voltajes secundarios que también están desfasados 90°. A diferencia de la Scott-T, los voltajes secundarios se vuelven a combinar en una salida trifásica.

Una de las mayores ventajas de la conexión T trifásica sobre las otras conexiones trifásicas de dos transformadores (la delta abierta y la ye abierta-delta abierta) es que se puede conectar un neutro tanto al lado primario como al lado secundario del banco de transformadores. Esta conexión se utiliza en transformadores de distribución trifásicos autónomos, puesto que sus costos de producción son menores que los de un banco de transformadores trifásico completo.

Debido a que las partes más bajas de los devanados del transformador de conexión en T no se usan ni en el lado primario ni en el lado secundario, se pueden omitir sin alterar el comportamiento de la conexión. De hecho, esto se hace con los transformadores de distribución.

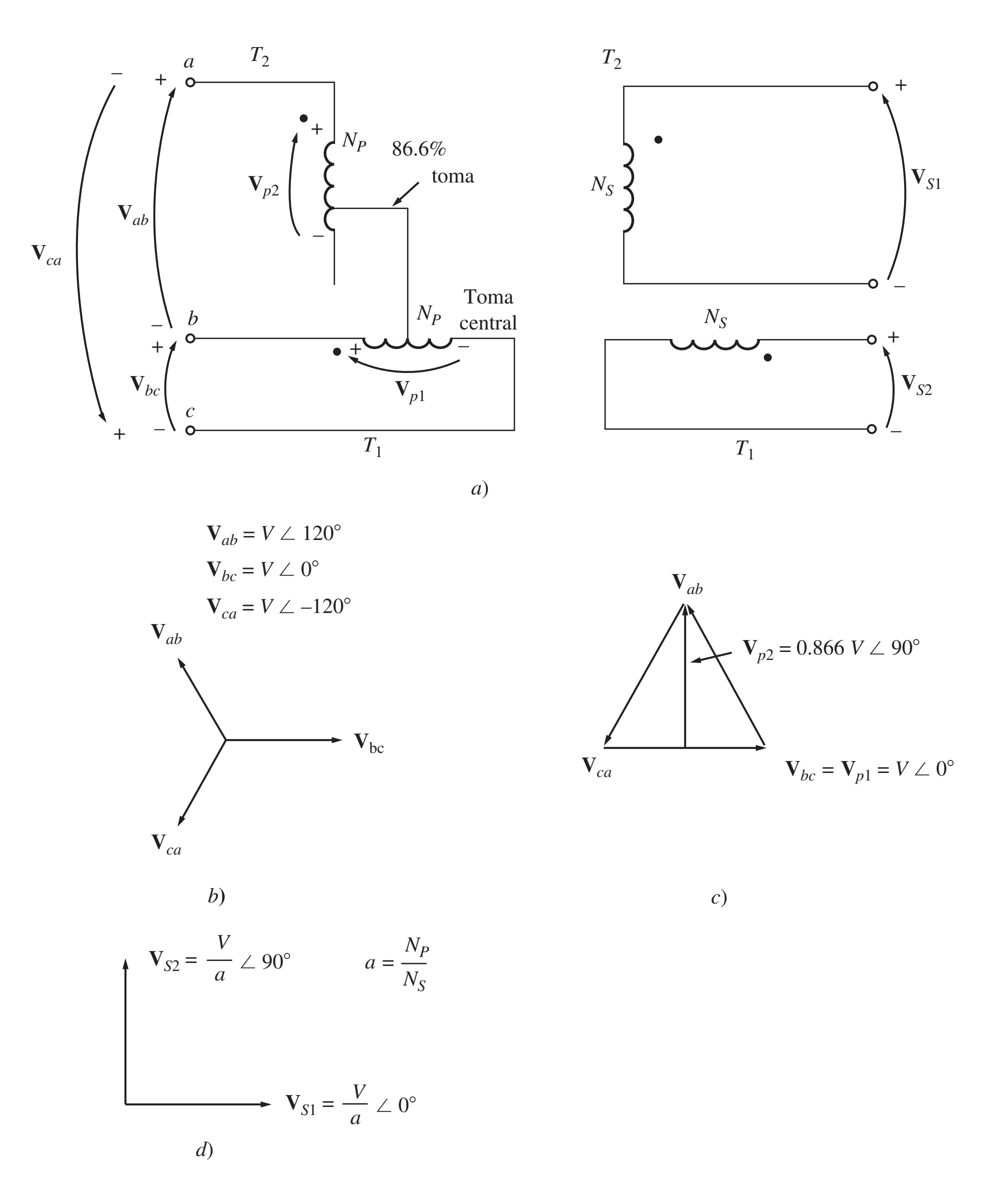


FIGURA 2-42 Conexión del transformador Scott-T. *a*) Diagrama de cableado; *b*) voltajes de entrada trifásicos; *c*) voltajes en los devanados primarios del transformador; *d*) voltajes secundarios bifásicos.

2.12 VALORES NOMINALES Y PROBLEMAS RELACIONADOS CON LOS TRANSFORMADORES

Los transformadores tienen cuatro valores nominales principales:

1. Potencia aparente (kVA o MVA).
2. Voltaje primario y secundario (V).
3. Frecuencia (Hz).
4. Resistencia y reactancia en serie por unidad.

Estos valores se pueden encontrar en las placas de la mayoría de los transformadores. En esta sección se examina por qué estos valores se usan para caracterizar a un transformador. También se consideran las preguntas relacionadas con la corriente de irrupción que se presenta cuando se conecta por primera vez un transformador a la línea.

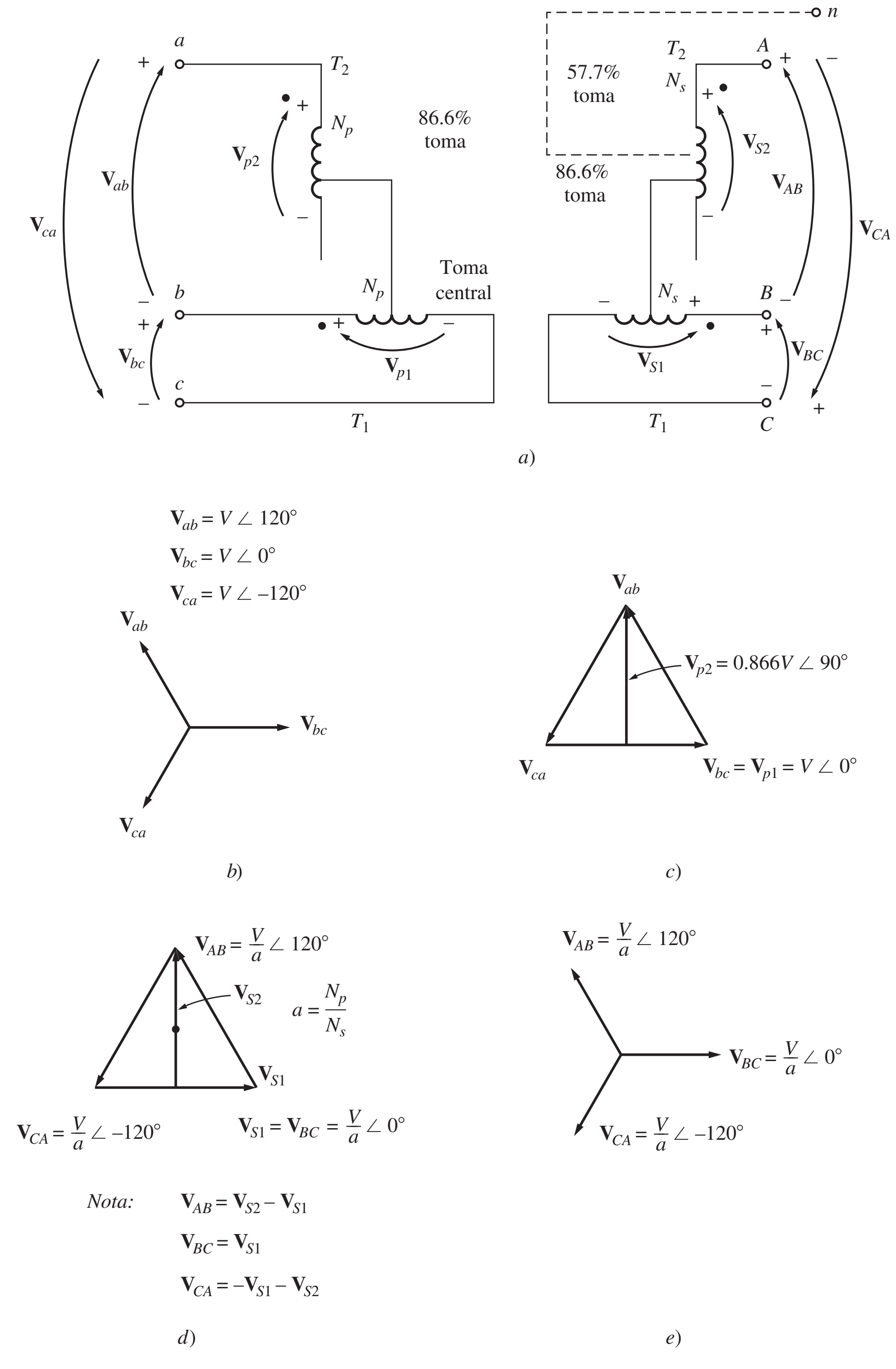


FIGURA 2-43 Conexión trifásica en T del transformador. *a*) Diagrama de cableado; *b*) voltajes de entrada trifásicos; *c*) voltajes en los devanados primarios del transformador; *d*) voltajes en los devanados secundarios del transformador; *e*) voltajes secundarios trifásicos resultantes.

Valores nominales de voltaje y frecuencia de un transformador

El valor nominal del voltaje de un transformador cumple dos funciones. Una es proteger el aislamiento del devanado de la aplicación de un voltaje excesivo. Ésta no es la limitación más seria en los transformadores prácticos. La segunda función está relacionada con la curva de magnetización y

corriente de magnetización del transformador. La figura 2-11 muestra la curva de magnetización de un transformador. Si un voltaje en estado estacionario

$$v(t) = V_M \text{ sen } \omega t \qquad \text{V}$$

se aplica al devanado primario de un transformador, el flujo del transformador estará dado por

$$\phi(t) = \frac{1}{N_P}\int v(t)\, dt$$

$$= \frac{1}{N_P}\int V_M \text{ sen } \omega t\, dt$$

$$\phi(t) = -\frac{V_M}{\omega N_P}\cos \omega t \qquad \textbf{(2-101)}$$

Si se incrementa 10% el voltaje $v(t)$ aplicado, el flujo máximo resultante en el núcleo también aumenta 10%. Sin embargo, por encima de cierto punto sobre la curva de magnetización un incremento de 10% en el núcleo requiere un aumento en la corriente de magnetización *mucho* mayor. Este concepto se ilustra en la figura 2-44. Conforme se incrementa el voltaje, las corrientes de alta magnetización llegan rápidamente a ser inaceptables. El voltaje aplicado máximo (y por lo tanto, el voltaje nominal) lo establece la corriente de magnetización aceptable máxima en el núcleo.

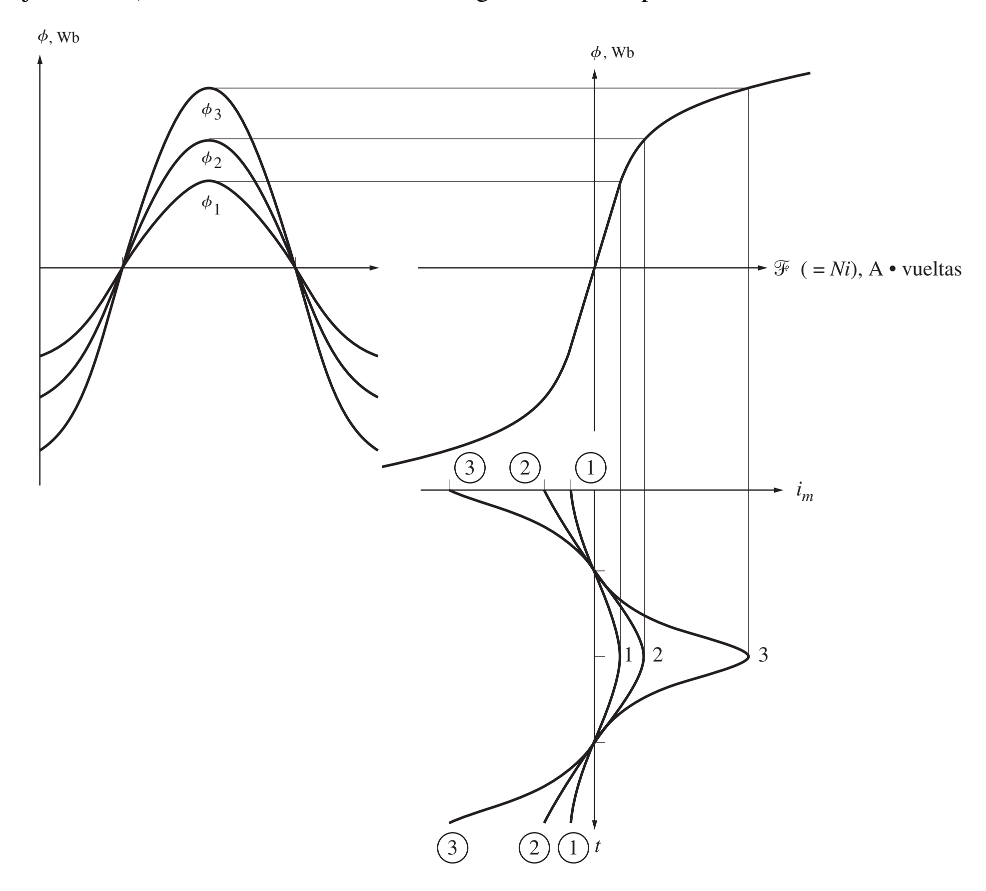


FIGURA 2-44 Efecto del flujo máximo en el núcleo de un transformador con la corriente de magnetización requerida.

Nótese que el voltaje y la frecuencia se relacionan de manera recíproca si el flujo máximo debe ser constante:

$$\phi_{\text{máx}} = \frac{V_{\text{máx}}}{\omega N_P} \qquad \textbf{(2-102)}$$

Entonces, *si un transformador de 60 Hz tiene que operar a 50 Hz, el voltaje que se le aplique debe también reducirse en un sexto* o el flujo máximo en el núcleo será demasiado alto. Esta reducción del voltaje, aplicado con frecuencia, se llama *derrateo* (*derating*). De la misma forma, un transformador de 50 Hz puede operar a un voltaje 20% mayor a 60 Hz si esta acción no causa problemas en su aislamiento.

EJEMPLO 2-10

Un transformador monofásico de 1 k VA, 230/115 V y 60 Hz tiene 850 vueltas en el devanado primario y 425 vueltas en el devanado secundario. La curva de magnetización de este transformador se muestra en la figura 2-45.

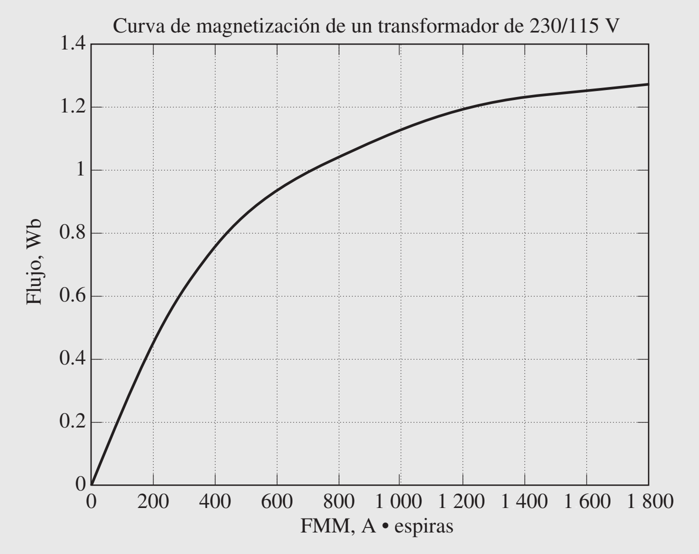


FIGURA 2-45 Curva de magnetización para el transformador de 230/115 V del ejemplo 2-10.

a) Calcule y haga una gráfica de la corriente de magnetización de este transformador cuando se opera a 230 V con una fuente de potencia de 60 Hz. ¿Cuál es el valor rms de la corriente de magnetización?

b) Calcule y haga una gráfica de la corriente de magnetización de este transformador cuando se opera a 230 V con una fuente de potencia de 50 Hz. ¿Cuál es el valor rms de la corriente de magnetización? ¿Cómo se puede comparar esta corriente con la corriente de magnetización a 60 Hz?

Solución

La mejor forma de resolver este problema es calcular el flujo en función del tiempo en este núcleo y luego utilizar la curva de magnetización para transformar el valor de cada flujo en su fuerza magnetomotriz correspondiente. Entonces se puede determinar la corriente de magnetización a partir de la ecuación

$$i = \frac{\mathscr{F}}{N_P} \tag{2-103}$$

Si se supone que el voltaje aplicado al núcleo es $v(t) = V_M$ sen ωt volts, entonces el flujo en el núcleo en función del tiempo está dado por la ecuación (2-102):

$$\phi(t) = -\frac{V_M}{\omega N_P} \cos \omega t \tag{2-101}$$

La curva de magnetización de este transformador está disponible en formato electrónico en el archivo llamado `mag_curve_1.dat`. Este archivo se puede usar en el MATLAB para trasladar los valores de estos flujos en sus valores fmm correspondientes y se puede utilizar la ecuación (2-102) para encontrar los

valores de la corriente de magnetización requeridos. Por último, el valor rms de la corriente de magnetización se puede calcular con la ecuación:

$$I_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2\,dt} \tag{2-104}$$

A continuación se muestra un programa de MATLAB que ejecuta estos cálculos:

```
% Archivo M: mag_current.m
% Archivo M para calcular y hacer la gráfica de la corriente
% de magnetización de un transformador de 230/115 que opera
% a 230 volts y 50/60 Hz. Este programa también calcula
% el valor rms de la corriente de magnetización.
% Cargar la curva de magnetización. Está en dos
% columnas, la primera columna es la fmm y la
% segunda columna es el flujo.
load mag_curve_1.dat;
mmf_data = mag_curve_1 (:,1);
flux_data = mag_curve_1 (:,2);

% Inicializar valores
VM = 325;                      % Voltaje máximo (V)
NP = 850;                      % Vueltas primario

% Calcular la velocidad angular a 60 Hz
freq = 60;                     % Freq (Hz)
w = 2 * pi * freq;

% Calcular el flujo contra el tiempo
time = 0:1/3000:1/30;          % 0 a 1/30 seg
flux = -VM/(w*NP) * cos(w .* time);

% Calcular la mmf correspondiente a un flujo dado
% por medio de la función de interpolación del flujo
mmf = interpl(flux_data,mmf_data,flux);

% Calcular la corriente de magnetización
im = mmf / NP;

% Calcular el valor rms de la corriente
irms = sqrt(sum(im.^2)/length(im));
disp(['La corriente rms a 60 Hz es ', num2str(irms)]);

% Hacer la gráfica de la corriente de magnetización.
figure(l)
subplot(2, 1, 1);
plot(time,im) ;
title ('\bfCorriente de Magnetización a 60 Hz');
xlabel ('\bfTime (s)');
ylabel ('\bf\itI_{m} \rm(A)');
axis([0 0.4 -2 2]);
grid on;

% Calcular la velocidad angular a 50 Hz
freq = 50;                     % Freq (Hz)
w = 2 * pi * freq;

% Calcular el flujo contra el tiempo
time = 0:1/2500:1/25;          % 0 a 1/25 seg
flux = -VM/(w*NP) * cos(w .* time);

% Calcular la mmf correspondiente a un flujo dado
% por medio de la función de interpolación del flujo
mmf =interpl(flux_data, mmf_data,flux);
```

```
% Calcular la corriente de magnetización
im = mmf / NP;
% Calcular el valor rms de la corriente
irms = sqrt(sum(im.^2)/length(im));
disp(['La corriente rms a 50 Hz es', num2str(irms)]);

% Hacer la gráfica de la corriente de magnetización.
subplot(2,1,2);
plot(time,im);
title ('\bfCorriente de Magnetización a 50 Hz');
xlabel ('\bfTime (s)');
ylabel ('\bf\itI_{m} \rm(A)');
axis ([0 0.4 -2 2]);
grid on;
```

Cuando se ejecuta este programa los resultados son

```
» mag_current
La corriente rms a 60 Hz es 0.4894
La corriente rms a 50 Hz es 0.79252
```

Las corrientes de magnetización resultantes se muestran en la figura 2-46. Nótese que la corriente de magnetización rms se incrementa más de 60% cuando la frecuencia cambia de 60 Hz a 50 Hz.

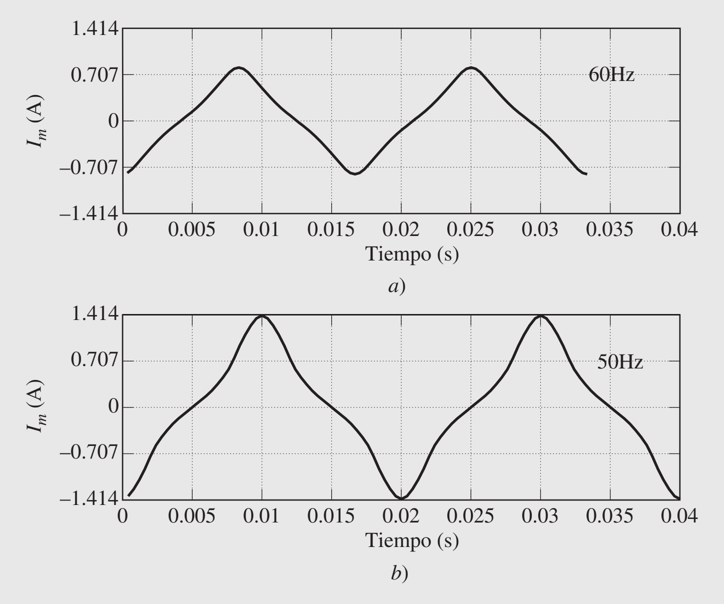


FIGURA 2-46 *a*) Corriente de magnetización del transformador que opera a 60 Hz. *b*) Corriente de magnetización del transformador que opera a 50 Hz.

Valor nominal de la potencia aparente de un transformador

El propósito principal del valor nominal de la potencia aparente de un transformador es que junto con el valor nominal del voltaje establece el flujo de corriente a través de los devanados del transformador. El flujo de corriente es importante debido a que controla las pérdidas i^2R en el transformador, que a su vez controlan el calentamiento de las bobinas del transformador. Es fundamental observar el aumento de temperatura, ya que el sobrecalentamiento de las bobinas de un transformador puede acortar *dramáticamente* la vida de su aislamiento.

Los transformadores se clasifican por potencia aparente en vez de potencia real o reactiva, debido a que la misma cantidad de calentamiento ocurre para una cantidad dada de corriente, independientemente de su fase con respecto al voltaje terminal. Es la magnitud de la corriente la que afecta el calentamiento, no la fase de la corriente.

La potencia nominal aparente real de un transformador puede tener más de un solo valor. En los transformadores reales, puede haber una potencia nominal aparente del transformador por sí mismo, y otra potencia nominal (más alta) del transformador con enfriamiento forzado. La idea clave detrás de la potencia nominal es que la temperatura de punto caliente en los devanados del transformador *debe* limitarse para proteger la vida del transformador.

Si se reduce el voltaje de un transformador por cualquier razón (por ejemplo, por operar en una frecuencia más baja que la normal), el valor nominal en voltamperes del transformador se debe reducir en igual medida. Si no se hace esta corrección, la corriente en los devanados del transformador excederá el nivel máximo permisible y causará un sobrecalentamiento.

El problema de la corriente de irrupción

Un problema relacionado con el nivel de voltaje en el transformador es el de la corriente de irrupción en el arranque. Suponga que el voltaje

$$v(t) = V_M \operatorname{sen} (\omega t + \theta) \qquad \text{V} \tag{2-105}$$

se aplica en el momento en que se conecta por primera vez el transformador a la línea de potencia. La máxima altura alcanzada por el flujo en el primer semiciclo del voltaje aplicado depende de la fase del voltaje en el momento de su aplicación. Si el voltaje inicial es

$$v(t) = V_M \operatorname{sen} (\omega t + 90°) = V_M \cos \omega t \qquad \text{V} \tag{2-106}$$

y si el flujo inicial en el núcleo es cero, entonces el flujo máximo durante el primer semiciclo será igual al flujo máximo en estado estacionario:

$$\phi_{\text{máx}} = \frac{V_{\text{máx}}}{\omega N_P} \tag{2-102}$$

Este nivel de flujo es justamente el flujo en estado estacionario, por lo que no causa ningún problema en especial. Pero si el voltaje aplicado es

$$v(t) = V_M \operatorname{sen} \omega t \qquad \text{V}$$

el flujo máximo durante el primer semiciclo está dado por

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \frac{1}{N_P} \int_0^{\pi/\omega} V_M \operatorname{sen} \omega t \, dt \\ &= -\frac{V_M}{\omega N_P} \cos \omega t \Big|_0^{\pi/\omega} \\ &= -\frac{V_M}{\omega N_P} [(-1) - (1)] \end{aligned}$$

$$\phi_{\text{máx}} = \frac{2V_{\text{máx}}}{\omega N_P} \tag{2-107}$$

Este flujo máximo es el doble del flujo en estado estacionario. Si se examina la curva de magnetización de la figura 2-11, es fácil ver que duplicar el flujo máximo en el núcleo causará una corriente de magnetización *enorme*. De hecho, en parte del ciclo el transformador parece un cortocircuito y fluye una gran corriente (véase la figura 2-47).

Para cualquier otro ángulo de fase aplicado entre 90°, que no causa problema, y 0°, que es el peor caso, hay cierta cantidad de flujo de corriente en exceso. El ángulo de fase del voltaje aplicado normalmente no se controla en el arranque, por lo que hay una gran corriente de irrupción durante los primeros ciclos después de que se conecta el transformador a la línea. El transformador y el sistema de potencia al que se conecta deben ser capaces de soportar estas corrientes.

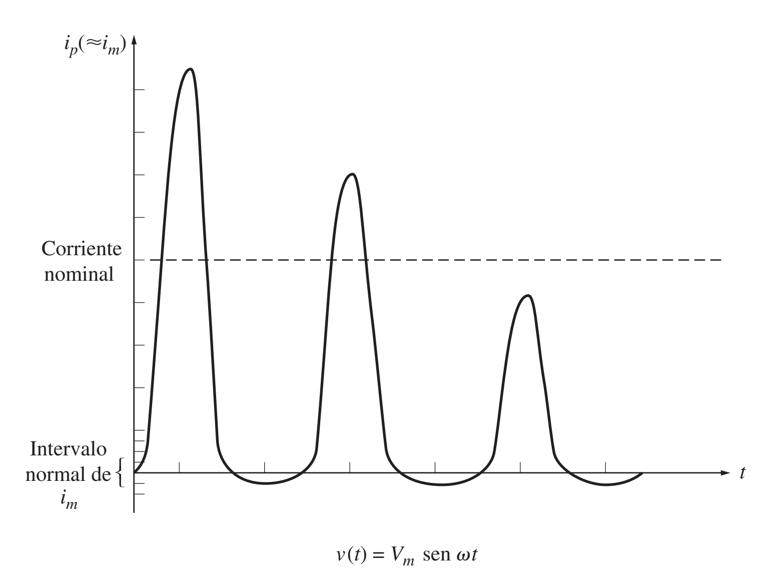


FIGURA 2-47 Corriente de irrupción debida a la corriente de magnetización del transformador en el arranque.

Placa de características del transformador

En la figura 2-48 se muestra una placa característica típica de un transformador de distribución. La información en esta placa incluye el voltaje nominal, los kilovoltsamperes nominales, la frecuencia nominal y la impedancia en serie por unidad del transformador. También muestra el voltaje nominal para cada toma en el transformador y su esquema de cableado.

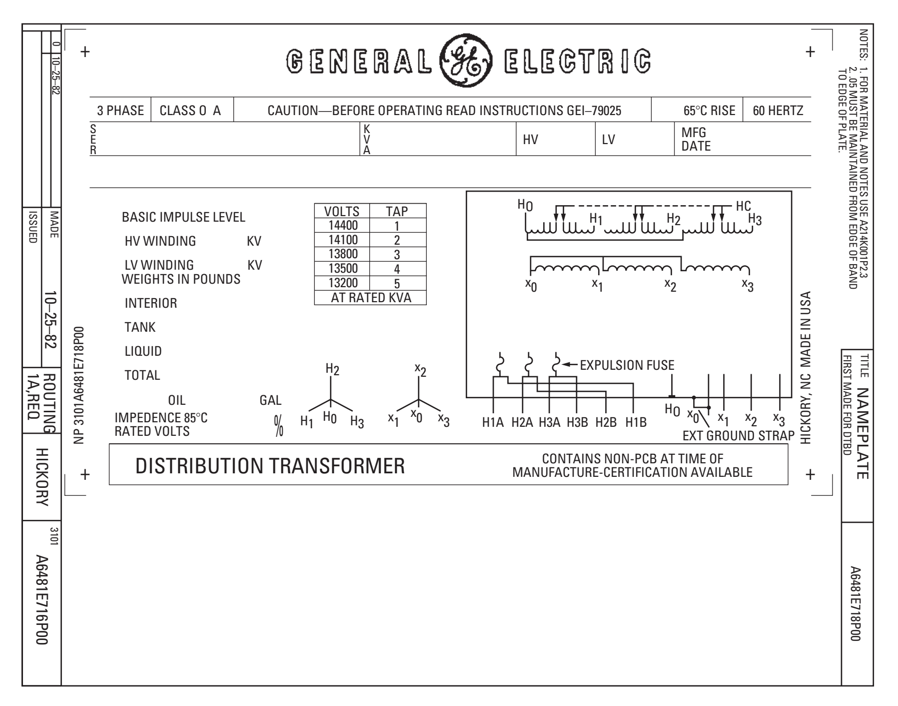


FIGURA 2-48 Ejemplo de las características de una placa de un transformador de distribución. Nótense los valores nominales que se muestran: voltaje, frecuencia, potencia aparente y tomas de derivación. (*Cortesía de General Electric Company*.)

Una placa característica como la que se muestra en la figura también incluye normalmente la designación del tipo de transformador y referencias a sus instrucciones de operación.

2.13 TRANSFORMADORES PARA INSTRUMENTOS

Se utilizan dos tipos de transformadores de propósito especial con los sistemas de potencia para hacer mediciones. Uno es el transformador de potencial y el otro es el transformador de corriente.

El *transformador de potencial* es un transformador con devanados especiales: el primario para alto voltaje y el secundario para bajo voltaje. Este transformador tiene una potencia nominal muy baja y su único propósito es suministrar una *muestra* del sistema de voltaje de potencia a los instrumentos que lo monitorean. Debido a que el principal propósito del transformador es tomar muestras del voltaje, debe ser muy exacto para no distorsionar demasiado el valor de voltaje verdadero. Se pueden comprar transformadores de potencial de varios *niveles de exactitud*, dependiendo de qué tan exactas deban ser las lecturas para determinada aplicación.

Los *transformadores de corriente* toman una muestra de la corriente en una línea y la reducen a un nivel seguro y mensurable. En la figura 2-49 se muestra el diagrama de un transformador de corriente típico. El transformador de corriente consta de un devanado secundario enrollado alrededor de un anillo ferromagnético, con una sola línea primaria que pasa a través del centro del anillo. El anillo ferromagnético capta y concentra una pequeña muestra del flujo de la línea primaria. Este flujo induce un voltaje y una corriente en el devanado secundario.

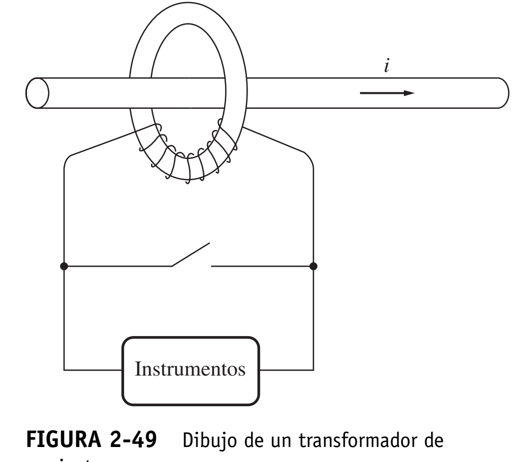


FIGURA 2-49 Dibujo de un transformador de corriente.

Los transformadores de corriente difieren de los demás transformadores descritos en este capítulo en que sus devanados están *débilmente acoplados*. A diferencia de los demás transformadores, el flujo mutuo ϕ_M en el transformador de corriente es más pequeño que el flujo disperso ϕ_D. Debido al acoplamiento débil, no se aplican las relaciones de voltaje y corriente de las ecuaciones (2-1) a (2-5) al transformador de corriente. Sin embargo, la corriente secundaria en un transformador de corriente es directamente proporcional a la corriente primaria que es mucho mayor y puede suministrar una muestra exacta de la corriente de la línea con propósitos de medición.

Los valores nominales de los transformadores de corriente se dan como relaciones de la corriente primaria con la secundaria. Las relaciones típicas de un transformador de corriente son 600:5, 800:5 o 1 000:5. Una corriente de 5 A es la estándar en el secundario de un transformador de corriente.

Es importante mantener en cortocircuito al transformador de corriente en todo momento, debido a que pueden aparecer voltajes extremadamente altos a través de los terminales de sus secundarios abiertos. De hecho, la mayoría de los relés y otros aparatos que utilizan la corriente de un transformador de corriente tienen un *enclavamiento en cortocircuito* que se debe cerrar antes de remover el relé para su inspección o ajuste. Sin este enclavamiento, aparecerán altos voltajes muy peligrosos en los terminales secundarios en el momento en que se retire el relé de su conexión.

2.14 RESUMEN

Un transformador es un aparato para convertir energía eléctrica con un nivel de voltaje en energía eléctrica con otro nivel de voltaje a través de la acción de un campo magnético. Tiene una función muy importante en la vida moderna, ya que hace posible la transmisión económica de energía eléctrica a largas distancias.

Cuando se aplica un voltaje al primario de un transformador, el flujo que se produce en el núcleo está dado por la ley de Faraday. El flujo variable en el núcleo induce un voltaje en el devanado secundario del transformador. Debido a que los núcleos de los transformadores tienen una permeabilidad muy alta, la fuerza magnetomotriz neta que se requiere en el núcleo para producir el flujo es muy pequeña. Puesto que esta fuerza es muy pequeña, la fuerza magnetomotriz del circuito primario debe ser aproximadamente igual y opuesta a la fuerza magnetomotriz del circuito secundario. Este hecho produce la razón de corriente del transformador.

Un transformador real tiene flujos dispersos que únicamente atraviesan el devanado primario o el secundario, pero no ambos. Además, hay pérdidas por histéresis, por corrientes parásitas y en el cobre. Estos efectos se toman en cuenta en el circuito equivalente del transformador. Las imper-

fecciones de los transformadores se miden en un transformador real por medio de la regulación de voltaje y de la eficiencia.

El sistema de medición por unidad es una manera conveniente de estudiar los sistemas que contienen transformadores, debido a que en este sistema los diferentes niveles de voltaje del esquema desaparecen. Además, las impedancias por unidad de un transformador expresadas sobre sus propios valores nominales como base caen dentro de un intervalo relativamente estrecho, lo que permite hacer una comprobación conveniente de lo razonable que puede ser la solución de un problema.

Un autotransformador difiere de un transformador regular en que los dos devanados del autotransformador están conectados. El voltaje en un lado del transformador es el voltaje que pasa a través de un solo devanado, mientras que el voltaje en el otro lado del transformador es la suma de los voltajes que pasan a través de *ambos* devanados. Debido a que sólo una porción de la potencia de un autotransformador pasa realmente a través de sus devanados, un autotransformador tiene una ventaja de potencia nominal comparado con un transformador convencional del mismo tamaño. Sin embargo, la conexión destruye el aislamiento eléctrico entre los lados primarios y secundarios de un transformador.

Los niveles de voltaje en los circuitos trifásicos se pueden transformar por medio de la combinación adecuada de dos o tres transformadores. Los transformadores de potencial y los de corriente pueden tomar muestras de los voltajes y corrientes que están presentes en un circuito. Ambos aparatos son muy comunes en los grandes sistemas de distribución de potencia.

PREGUNTAS

2-1. ¿La relación de vueltas en un transformador es igual a la relación de voltajes a través de un transformador? ¿Por qué sí o por qué no?

2-2. ¿Por qué la corriente de magnetización impone un límite superior al voltaje aplicado al núcleo de un transformador?

2-3. ¿Qué componentes integran la corriente de excitación de un transformador? ¿Cómo se consideran en el circuito equivalente del transformador?

2-4. ¿Qué es el flujo disperso de un transformador? ¿Por qué se considera como un inductor en el circuito equivalente del transformador?

2-5. Enliste y describa los tipos de pérdidas que se presentan en un transformador.

2-6. ¿Por qué afecta la regulación de voltaje de un transformador el factor de potencia de una carga?

2-7. ¿Por qué la prueba de cortocircuito muestra esencialmente sólo las pérdidas i^2R y no las pérdidas de excitación del transformador?

2-8. ¿Por qué la prueba de circuito abierto muestra esencialmente sólo las pérdidas de excitación y no las pérdidas i^2R?

2-9. ¿Cómo se elimina el problema de tener diferentes niveles de voltaje en un sistema de potencia por medio del sistema de medidas por unidad?

2-10. ¿Por qué los autotransformadores pueden manejar más potencia que los transformadores convencionales del mismo tamaño?

2-11. ¿Qué son las tomas de derivación en los transformadores? ¿Por qué se usan?

2-12. ¿Cuáles son los problemas asociados con la conexión de un transformador trifásico Y-Y?

2-13. ¿Qué es un transformador TCUL?

2-14. ¿Cómo se puede lograr la transformación trifásica utilizando sólo dos transformadores? ¿Qué tipos de conexiones se pueden utilizar? ¿Cuáles son sus desventajas y sus ventajas?

2-15. Explique por qué una conexión de transformador Δ abierta está limitada a suministrar sólo 57.7% de la carga de un banco de transformadores Δ-Δ normal.

2-16. ¿Un transformador de 60 Hz puede operar en un sistema de 50 Hz? ¿Qué se requiere hacer para permitir esta operación?

2-17. ¿Qué le pasa a un transformador cuando se conecta a la línea de potencia por primera vez? ¿Se puede hacer algo para mitigar este problema?

2-18. ¿Qué es un transformador de potencial? ¿Cómo se utiliza?

2-19. ¿Qué es un transformador de corriente? ¿Cómo se utiliza?

2-20. Un transformador de distribución tiene los siguientes valores nominales: 18 kVA, 20 000/480 V y 60 Hz. ¿Este transformador puede suministrar de manera segura 15 kVA a una carga de 415 V a 50 Hz? ¿Por qué sí o por qué no?

2-21. ¿Por qué se escucha un zumbido al estar cerca de un gran transformador de potencia?

PROBLEMAS

2-1. Un transformador de distribución de 100 kVA y 8 000/277 V tiene las siguientes resistencias y reactancias:

$$R_P = 5\ \Omega \qquad R_S = 0.005\ \Omega$$
$$X_P = 6\ \Omega \qquad X_S = 0.006\ \Omega$$
$$R_C = 50\ \text{k}\Omega \qquad X_M = 10\ \text{k}\Omega$$

Las impedancias de la rama de excitación se dan referidas al lado de alto voltaje del transformador.

a) Encuentre el circuito equivalente de este transformador referido al lado de bajo voltaje.

b) Encuentre el circuito equivalente por unidad de este transformador.

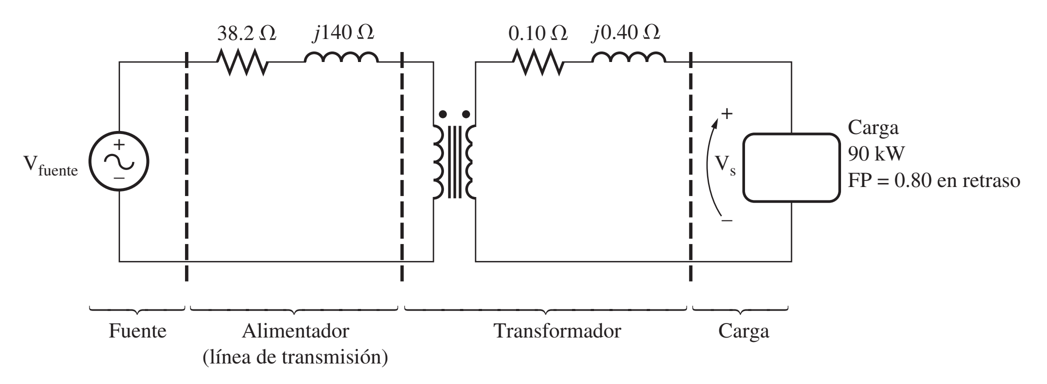


FIGURA P2-1 Circuito del problema 2-2.

c) Suponga que este transformador suministra una carga nominal de 277 V y un FP = 0.85 en retraso. ¿Cuál es el voltaje de entrada de este transformador? ¿Cuál es su regulación de voltaje?

d) ¿Cuáles son las pérdidas de cobre y las pérdidas del núcleo en este transformador bajo las condiciones del inciso *c*)?

e) ¿Cuál es la eficiencia del transformador en las condiciones del inciso *c*)?

2-2. En la figura P2-1 se muestra un sistema de potencia monofásico. La fuente de potencia alimenta un transformador de 100 kVA y 14/2.4 kV a través de un alimentador con una impedancia de 38.2 + *j*140 Ω. La impedancia en serie equivalente del transformador referida a su lado de bajo voltaje es 0.10 + *j*0.40 Ω. La carga en el transformador es de 90 kW con un FP = 0.80 en retraso y 2 300 V.

a) ¿Cuál es el voltaje en la fuente de potencia del sistema?

b) ¿Cuál es la regulación de voltaje del transformador?

c) En general, ¿qué tan eficiente es el sistema de potencia?

2-3. El devanado secundario de un transformador ideal tiene un voltaje terminal de $v_s(t)$ = 282.8 sen 377*t* V. La relación de vueltas del transformador es de 100:200 (a = 0.50). Si la corriente en el devanado del secundario del transformador es de $i_s(t)$ = 7.07 sen (377*t* – 36.87°) A, ¿cuál es la corriente en el devanado del primario de este transformador? ¿Cuál es su regulación de voltaje y su eficiencia?

2-4. El devanado secundario de un transformador real tiene un voltaje terminal de $v_s(t)$ = 282.8 sen 377*t* V. La relación de vueltas del transformador es de 100:200 (a = 0.50). Si la corriente secundaria del transformador es de $i_s(t)$ = 7.07 sen (377*t* – 36.87°) A, ¿cuál es la corriente primaria de este transformador? ¿Cuál es su regulación de voltaje y su eficiencia? Las impedancias de este transformador referidas al lado primario son

$$R_{eq} = 0.20\ \Omega \qquad R_C = 300\ \Omega$$
$$X_{eq} = 0.80\ \Omega \qquad X_M = 100\ \Omega$$

2-5. Cuando los turistas de Estados Unidos y Canadá van de visita a Europa, se encuentran con un sistema de distribución de potencia diferente. Los voltajes en las tomas de pared son de 120 V rms a 60 Hz en América del Norte, mientras que en Europa son de 230 V a 50 Hz. Muchos turistas cargan con pequeños transformadores reductores/elevadores para poder utilizar sus aparatos en los países que visitan. Un transformador típico podría ser dimensionado a 1 kVA y 115/230 V; con 500 vueltas de alambre en el lado de 115 V y 1 000 vueltas de alambre en el lado de 230 V. La curva de magnetización de este transformador se muestra en la figura P2-2 y se puede encontrar en el archivo `p22.mag` en el sitio web de este libro.

a) Suponga que este transformador está conectado a una fuente de potencia de 120 V y 60 Hz y no tiene ninguna carga conectada en el lado de 240 V. Dibuje la corriente de magnetización que fluirá en el transformador. (Si se encuentra disponible utilice MATLAB para graficar de manera exacta la corriente.) ¿Cuál es la amplitud rms de la corriente de magnetización? ¿Qué porcentaje de la corriente a plena carga es la corriente de magnetización?

b) Ahora suponga que este transformador se conecta a una fuente de potencia de 240 V y 50 Hz y no tiene ninguna carga conectada al lado de 120 V. Dibuje la corriente de magnetización que fluirá en el transformador. (Si se encuentra disponible utilice MATLAB para graficar de manera exacta la corriente.) ¿Cuál es la amplitud rms de la corriente de magnetización? ¿Qué porcentaje de la corriente a plena carga es la corriente de magnetización?

c) ¿En qué caso la corriente de magnetización constituye un porcentaje más alto de la corriente a plena carga? ¿Por qué?

2-6. Se prueba un transformador de 1 000 VA y 230/115 V para determinar su circuito equivalente. Los resultados de la prueba se muestran a continuación:

Prueba de circuito abierto (en el lado secundario)	Prueba de cortocircuito (en el lado primario)
V_{CAb} = 115 V I_{CAb} = 0.11 A P_{CAb} = 3.9 W	V_{CC} = 17.1 V I_{CC} = 8.7 A P_{CC} = 38.1 W

a) Encuentre el circuito equivalente de este transformador referido al lado de bajo voltaje del transformador.

b) Especifique la regulación del voltaje del transformador en condiciones nominales y 1) FP = 0.8 en retraso, 2) FP = 1.0 y 3) FP = 0.8 en adelanto.

c) Determine la eficiencia del transformador en condiciones nominales y un FP = 0.8 en retraso.

2-7. Un transformador de distribución de 30 kVA y 8 000/230 V tiene una impedancia referida al primario de 20 + *j*100 Ω.

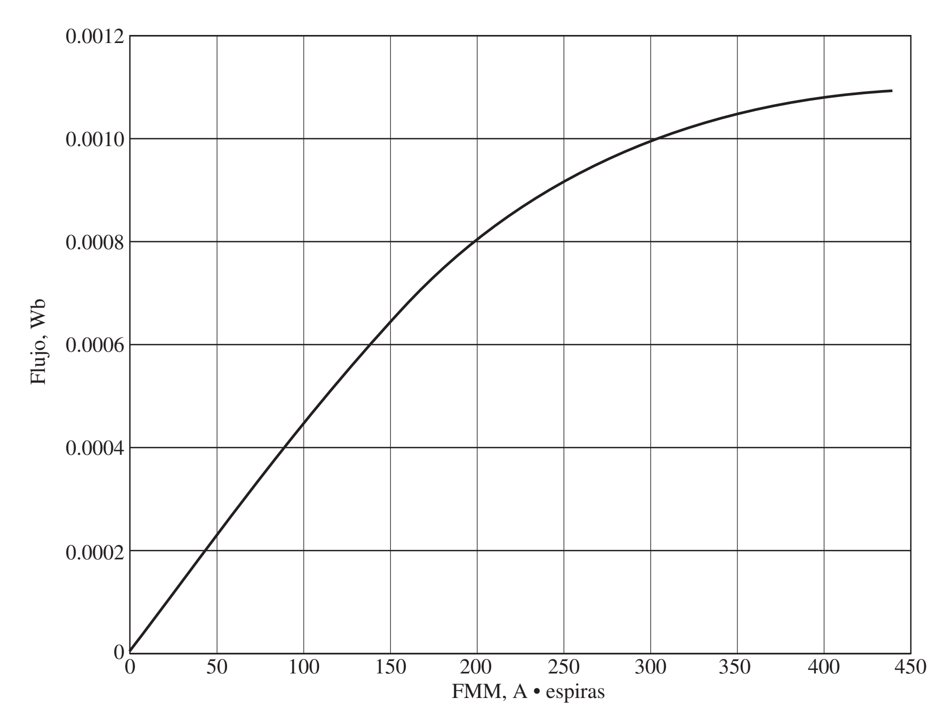


FIGURA P2-2 Curva de magnetización del transformador del problema 2-5.

Los componentes de la rama de excitación referidos al lado primario son $R_N = 100$ kΩ y $X_M = 20$ kΩ.

a) Si el voltaje primario es de 7 967 V y la impedancia de la carga es $Z_L = 2.0 + j0.6$ Ω, ¿cuál es el voltaje secundario del transformador? ¿Cuál es la regulación de voltaje del transformador?

b) Si se desconecta la carga y se conecta en su lugar un condensador de $-j3.0$ Ω, ¿cuál es el voltaje secundario del transformador? ¿Cuál es la regulación de voltaje en estas circunstancias?

2-8. Un transformador de potencia monofásico de 150 MVA y 15/200 kV tiene una resistencia de 1.2% por unidad y una reactancia de 5% por unidad (estos datos se tomaron de la placa de características del transformador). La impedancia de magnetización es de $j80$ por unidad.

a) Encuentre el circuito equivalente referido al lado de bajo voltaje del transformador.

b) Calcule la regulación de voltaje de este transformador con una corriente a plena carga y un factor de potencia de 0.8 en retraso.

c) Calcule las pérdidas de cobre y núcleo en el transformador en las condiciones del inciso *b*).

d) Suponga que el voltaje primario de este transformador es de 15 kV constante y haga una gráfica del voltaje secundario como función de la corriente de carga desde vacío hasta plena carga. Repita este proceso para los factores de potencia de 0.8 en retraso, 1.0 y 0.8 en adelanto.

2-9. Un transformador de potencia monofásico de 5 000 kVA y 230/13.8 kV tiene una resistencia de 1% por unidad y una reactancia de 5% por unidad (estos datos se tomaron de la placa de características del transformador). Los siguientes datos son el resultado de la prueba de circuito abierto que se realizó en el lado de bajo voltaje del transformador:

$$V_{\text{CAb}} = 13.8 \text{ kV} \qquad I_{\text{CAb}} = 21.1 \text{ A} \qquad P_{\text{CAb}} = 90.8 \text{ kW}$$

a) Encuentre el circuito equivalente referido al lado de bajo voltaje de este transformador.

b) Si el voltaje en el lado secundario es de 13.8 kV y la potencia suministrada es de 4 000 kW con un FP = 0.8 en retraso, encuentre la regulación de voltaje del transformador. Determine su eficiencia.

2-10. El banco de un transformador trifásico debe aguantar 500 kVA y tener una relación de voltaje de 34.5/11 kV. Encuentre los valores nominales de cada uno de los transformadores en el banco (alto voltaje, bajo voltaje, relación de vueltas y potencia aparente), si el banco del transformador se conecta a *a*) Y-Y, *b*) Y-Δ, *c*) Δ-Y, *d*) Δ-Δ, *e*) Δ abierta, *f*) Y abierta-Δ abierta.

2-11. Un transformador de potencia trifásico de 100 MVA, 230/115 kV y Δ-Y tiene una resistencia de 0.015 pu y una reactancia de 0.06 pu. Los elementos de la rama de excitación son $R_N = 100$ pu y $X_M = 20$ pu.

a) Si este transformador suministra una carga de 80 MVA con un FP = 0.8 en retraso, dibuje el diagrama fasorial de una fase del transformador.

b) ¿Cuál es la regulación de voltaje del banco del transformador en estas circunstancias?

c) Dibuje el circuito equivalente referido al lado de bajo voltaje de una fase de este transformador. Calcule todas las impedancias del transformador referidas al lado de bajo voltaje.

d) Determine las pérdidas en el transformador y la eficiencia del transformador bajo las condiciones del inciso *b*).

2-12. Tres transformadores de distribución de 20 kVA y 24 000/277 V se conectan en Δ-Y. Se realizó una prueba de circuito abierto en el lado de bajo voltaje del banco de transformadores y se obtuvieron los siguientes datos:

$$V_{\text{línea,CAb}} = 480 \text{ V} \quad I_{\text{línea,CAb}} = 4.10 \text{ A} \quad P_{3\phi,\text{CAb}} = 945 \text{ W}$$

Se realizó la prueba de cortocircuito en el lado de alto voltaje del banco del transformador y se obtuvieron los siguientes datos:

$$V_{\text{línea,CC}} = 1\,400 \text{ V} \quad I_{\text{línea,CC}} = 1.80 \text{ A} \quad P_{3\phi,\text{CC}} = 912 \text{ W}$$

a) Encuentre el circuito equivalente por unidad del banco del transformador.
b) Determine la regulación de voltaje del banco de transformadores con la carga nominal y un FP = 0.90 en retraso.
c) ¿Cuál es la eficiencia del banco de transformadores en estas circunstancias?

2-13. El banco de un transformador trifásico de 14 400/480 V conectado en Y-Δ consta de tres transformadores idénticos de 100 kVA y 8 314/480 V. Se suministra potencia directamente desde un gran bus de voltaje constante. En la prueba de cortocircuito los valores obtenidos en el lado de alto voltaje de uno de estos transformadores son

$$V_{\text{CC}} = 510 \text{ V} \quad I_{\text{CC}} = 12.6 \text{ A} \quad P_{\text{CC}} = 3\,000 \text{ W}$$

a) Si este banco suministra una carga nominal a un FP de 0.8 en retraso y un voltaje nominal, ¿cuál es el voltaje línea a línea en el primario del banco del transformador?
b) ¿Cuál es la regulación de voltaje en estas circunstancias?
c) Suponga que el voltaje de fase primario de este transformador es de 8 314 kV constante y haga una gráfica del voltaje secundario como función de la corriente de carga desde corriente en vacío hasta plena carga. Repita este proceso para los factores de potencia de 0.8 en retraso, 1.0 y 0.8 en adelanto.
d) Haga una gráfica de la regulación de voltaje de este transformador como función de la corriente de carga, para corrientes desde vacío hasta plena carga. Repita este proceso para los factores de potencia de 0.8 en retraso, 1.0 y 0.8 en adelanto.
e) Determine el circuito equivalente por unidad de este transformador.

2-14. Un generador monofásico de 13.8 kV suministra potencia a una carga a través de una línea de transmisión. La impedancia de la carga es $Z_{\text{carga}} = 500 \angle 36.87° \ \Omega$ y la impedancia de la línea de transmisión es $Z_{\text{línea}} = 60 \angle 60° \ \Omega$.

a) Si se conecta el generador directamente a la carga (figura P2-3*a*), ¿cuál es la razón entre el voltaje de la carga y el voltaje generado? ¿Cuáles son las pérdidas de transmisión del sistema?
b) ¿Qué porcentaje de la potencia suministrada por la fuente alcanza la carga? (¿cuál es la eficiencia del sistema de transmisión?)
c) Si se coloca un transformador elevador de 1:10 a la salida del generador y un transformador 10:1 en el extremo de la línea de transmisión donde está la carga, ¿cuál es la nueva relación entre el voltaje de la carga y el voltaje generado? ¿Ahora cuáles son las pérdidas de transmisión del sistema? (*Nota:* Se puede suponer que los transformadores son ideales.)
d) ¿Qué porcentaje de la potencia suministrada por la fuente alcanza ahora la carga?
e) Compare las eficiencias del sistema de transmisión con o sin transformadores.

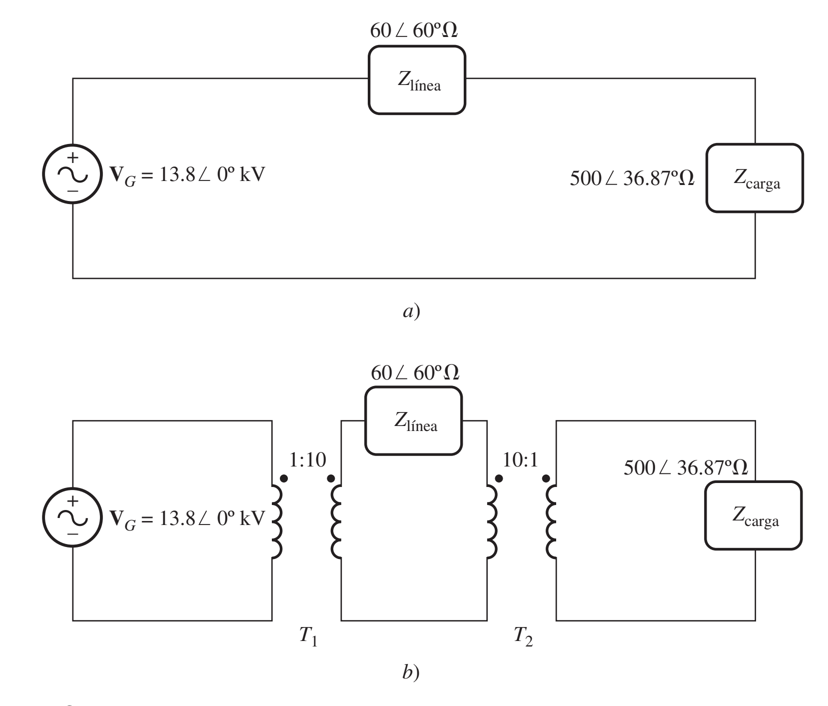


FIGURA P2-3 Circuitos del problema 2-14: *a*) sin transformadores y *b*) con transformadores.

2-15. Se utiliza un autotransformador para conectar una línea de distribución de 12.6 kV a una línea de distribución de 13.8 kV. Debe ser capaz de manejar 2 000 kVA. Hay tres fases conectadas en Y-Y con sus neutros que hacen tierra sólidamente.

a) ¿Cuál debe ser la relación de vueltas N_C/N_{SE} para esta conexión?
b) ¿Cuánta potencia aparente deben manejar los devanados de cada autotransformador?
c) ¿Cuál es la ventaja de potencia de este sistema autotransformador?
d) Si uno de los autotransformadores se conecta como un transformador ordinario, ¿cuáles serían sus valores nominales?

2-16. Pruebe la siguiente afirmación: si un transformador con una impedancia en serie Z_{eq} se conecta como autotransformador, su impedancia en serie Z'_{eq} por unidad como autotransformador será de

$$Z'_{eq} = \frac{N_{SE}}{N_{SE} + N_C} Z_{eq}$$

Nótese que esta expresión es el inverso de la ventaja de potencia del autotransformador.

2-17. Un transformador convencional de 10 kVA, 480/120 V se utiliza para suministrar potencia de una fuente de 600 V a una carga de 120 V. Considere que el transformador es ideal y suponga que su aislamiento puede soportar hasta 600 V.

a) Dibuje la conexión del transformador para este efecto.
b) Calcule el valor nominal en kilovoltamperes del transformador con esa configuración.
c) Encuentre las corrientes máximas primarias y secundarias en estas condiciones.

2-18. Un transformador convencional de 10 kVA, 480/120 V se utiliza para suministrar potencia de una fuente de 600 V a una carga de 480 V. Considere que el transformador es ideal y suponga que todo el aislamiento puede soportar 600 V.

a) Dibuje la conexión del transformador para este efecto.
b) Calcule el valor nominal en kilovoltamperes del transformador con esa configuración.
c) Encuentre las corrientes máximas primarias y secundarias en estas condiciones.
d) El transformador del problema 2-18 es idéntico al del problema 2-17, pero hay una diferencia significativa en la capacidad de potencia aparente del transformador en las dos situaciones. ¿Por qué? ¿Qué se puede decir acerca de la mejor circunstancia en la que se usa un autotransformador?

2-19. Dos de las fases de una línea de distribución trifásica de 14.4 kV dan servicio a un camino rural remoto (también está disponible el neutro). Un granjero tiene un alimentador de 480 V que suministra 200 kW a un FP = 0.85 en retraso de estas cargas trifásicas, más 60 kW en un FP = 0.9 en retraso de las cargas monofásicas. Las cargas monofásicas se distribuyen uniformemente entre las tres fases. Suponiendo que se utiliza la conexión Y abierta-Δ abierta para suministrar potencia a su granja, encuentre los voltajes y corrientes en cada uno de los dos transformadores. También calcule la potencia real y reactiva suministradas por cada transformador. Suponga que los transformadores son ideales. ¿Cuál es el valor nominal mínimo requerido kVA de cada transformador?

2-20. Se realiza una prueba a un transformador de distribución de 50 kVA, 20 000/480 V y 60 Hz y se obtienen los siguientes resultados:

Prueba de circuito abierto (en el lado secundario)	Prueba de cortocircuito (en el lado primario)
V_{CAb} = 480 V	V_{CC} = 1 130 V
I_{CAb} = 4.1 A	I_{CC} = 1.30 A
P_{CAb} = 620 W	P_{CC} = 550 W

a) Encuentre el circuito equivalente por unidad de este transformador a 60 Hz.
b) ¿Cuál es la eficiencia del transformador en las condiciones establecidas y el factor de unidad de potencia? ¿Cuál es la regulación de voltaje en esas condiciones?
c) ¿Cuáles serían los valores nominales de este transformador si opera en un sistema de potencia de 50 Hz?
d) Dibuje el circuito equivalente por unidad de este transformador referido al lado primario *si opera a 50 Hz*.
e) ¿Cuál es la eficiencia del transformador en las condiciones nominales de un sistema de potencia de 50 Hz?, ¿con factor de potencia unitario? ¿Cuál es la regulación de voltaje en esas condiciones?
f) ¿Cuál es la eficiencia del transformador en las condiciones nominales y 60 Hz comparada al mismo dispositivo físico que funciona a 50 Hz?

2-21. Pruebe que el sistema trifásico de voltajes en el secundario del transformador Y-Δ que se muestra en la figura 2-37*b*) retrasa por 30° el sistema de voltajes trifásico en el primario del transformador.

2-22. Demuestre que el sistema trifásico de voltajes en el secundario del transformador Δ-Y que se muestra en la figura 2-37*c*) retrasa 30° el sistema de voltajes trifásico en el primario del transformador.

2-23. Un transformador monofásico de 10 kvA y 480/120 V se utiliza como autotransformador y une una línea de distribución de 600 V con una carga de 480 V. Se obtienen los siguientes datos cuando se le realizan pruebas como un transformador convencional, que se tomaron del lado primario (480 V) del transformador:

Prueba de circuito abierto (en el lado secundario)	Prueba de cortocircuito (en el lado primario)
V_{CAb} = 120 V	V_{CC} = 10.0 V
I_{CAb} = 1.60 A	I_{CC} = 10.6 A
P_{CAb} = 38 W	P_{CC} = 25 W

a) Encuentre el circuito equivalente por unidad del transformador cuando se conecta de manera convencional. ¿Cuál es la eficiencia del transformador en condiciones nominales y un factor de potencia unitario? ¿Cuál es la regulación de voltaje en estas condiciones?
b) Dibuje las conexiones del transformador cuando se utiliza como un autotransformador reductor de 600/480 V.
c) ¿Cuál es el valor nominal en kilovoltamperes del transformador cuando se utiliza con la conexión de autotransformador?

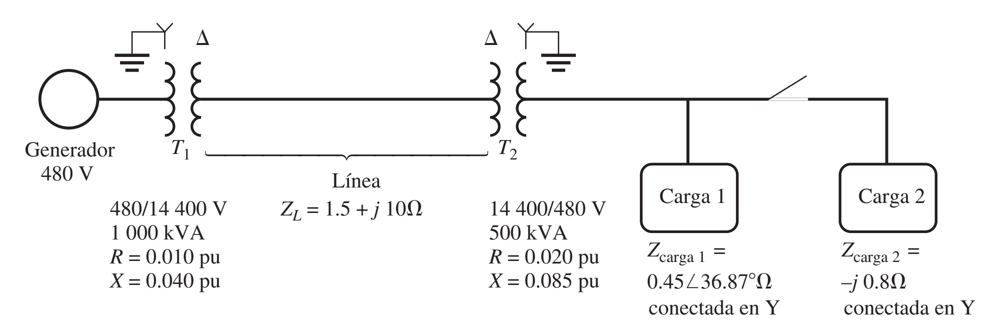


FIGURA P2-4 Diagrama en línea del sistema de potencia del problema 2-24. Nótese que algunos de los valores de las impedancias están dados en el sistema por unidad, mientras que otros están en ohms.

d) Responda la pregunta del inciso *a*) para la conexión como autotransformador.

2-24. La figura P2-4 muestra un sistema de potencia que consta de un generador trifásico de 480 V y 60 Hz que suministra potencia a dos cargas a través de una línea de transmisión con un par de transformadores en cada extremo. (*Nota:* En el apéndice A se describen diagramas en línea, en la explicación de circuitos de potencia trifásicos.)

a) Dibuje el circuito equivalente por fase de este sistema de potencia.

b) Con el interruptor abierto, encuentre la potencia real *P*, la potencia reactiva *Q* y la potencia aparente *S* suministradas por el generador. ¿Cuál es el factor de potencia del generador?

c) Con el interruptor cerrado, encuentre la potencia real *P*, la potencia reactiva *Q* y la potencia aparente *S* suministradas por el generador. ¿Cuál es el factor de potencia del generador?

d) ¿Cuáles son las pérdidas de transmisión (las pérdidas del transformador más las pérdidas de la línea de transmisión) en el sistema con el interruptor abierto? ¿Y con el interruptor cerrado? ¿Cuál es el efecto de adicionar la carga 2 al sistema?

BIBLIOGRAFÍA

1. Beeman, Donald, *Industrial Power Systems Handbook*, McGraw-Hill, Nueva York, 1995.
2. Del Toro, V., *Electric Machines and Power Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs. N.J., 1985.
3. Feinberg, R., *Modern Power Transformer Practice*, Wiley, Nueva York, 1979.
4. Fitzgerald. A.E., C. Kingsley, Jr. y S.D. Umans, *Electric Machinery*, 6a. ed., McGraw-Hill, Nueva York, 2003.
5. McPherson, George, *An Introduction to Electrical Machines and Transformers*, Wiley, Nueva York, 1981.
6. Personal del M.I.T., *Magnetic Circuits and Transformers*, Wiley, Nueva York, 1943.
7. Slemon, G.R. y A. Straughen, *Electric Machines*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1980.
8. *Electrical Transmission and Distribution Reference Book*, Westinghouse Electric Corporation, East Pittsburgh, 1964.

CAPÍTULO

3

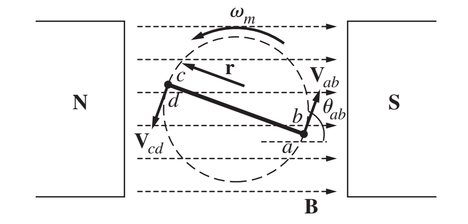
Principios básicos de las máquinas de corriente alterna (ca)

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

- Aprender cómo generar un voltaje ca en una espira giratoria en un campo magnético uniforme.
- Entender cómo se produce un par en una espira que lleva una corriente en un campo magnético uniforme.
- Aprender cómo crear un campo magnético giratorio desde un estator trifásico.
- Entender cómo un rotor en rotación con un campo magnético induce voltajes ca en los devanados del estator.
- Comprender la relación entre frecuencia eléctrica, el número de polos y la velocidad de rotación de una máquina eléctrica.
- Entender cómo se induce par en una máquina de ca.
- Comprender los efectos del aislamiento de los devanados en la vida útil de las máquinas.
- Entender los tipos de pérdidas en una máquina y el diagrama de flujo de potencia.

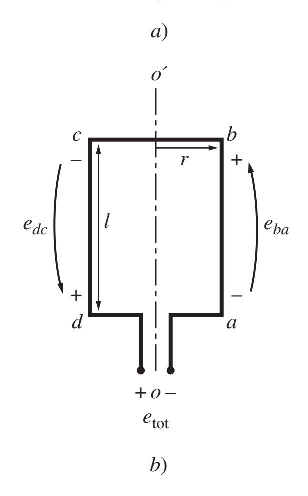
Las máquinas de ca son generadores que convierten energía mecánica en energía eléctrica de ca y motores que convierten energía eléctrica de ca en energía mecánica. Los principios básicos de las máquinas de ca son muy simples pero, desafortunadamente, parecen un tanto difíciles por lo complicado que es construir máquinas reales. En este capítulo se explican primero los principios de operación de las máquinas de ca por medio de ejemplos sencillos y luego se consideran algunas de las complicaciones que se presentan en las máquinas de ca reales.

Hay dos clases principales de máquinas de ca: las máquinas síncronas y las máquinas de inducción (también llamadas máquinas asíncronas). Las *máquinas síncronas* son motores y generadores cuya corriente de campo magnético la suministra una fuente de potencia ca externa, mientras que las *máquinas de inducción* son motores y generadores cuya corriente de campo magnético se suministra a sus devanados de campo por medio de inducción magnética (acción transformadora). Los circuitos de campo de la mayoría de las máquinas síncronas y de inducción se localizan en los rotores. En este capítulo se estudian algunos de los principios básicos comunes a ambos tipos de máquinas de ca trifásicas. Las máquinas síncronas se estudian con detalle en los capítulos 4 y 5 y las máquinas de inducción en el capítulo 6.



B es un campo magnético uniforme, alineado como puede apreciarse.

a)



b)

FIGURA 3-1 Espira sencilla giratoria en un campo magnético uniforme. *a*) Vista frontal; *b*) vista de la bobina.

3.1 ESPIRA SENCILLA EN UN CAMPO MAGNÉTICO UNIFORME

Se comenzará con el estudio de las máquinas de ca con una espira sencilla de alambre que gira dentro de un campo magnético uniforme. La máquina más sencilla posible que produce un voltaje de ca senoidal es una espira de alambre en un campo magnético uniforme. Este caso no es representativo de las máquinas de ca reales debido a que el flujo en las máquinas de ca reales no es constante ni en magnitud ni en dirección. Sin embargo, los factores que controlan el voltaje y el par en la espira son los mismos que los factores que controlan el voltaje y el par en las máquinas de ca reales.

La figura 3-1 muestra una máquina simple que consta de un imán estacionario grande que produce un campo magnético esencialmente constante y uniforme y una espi-

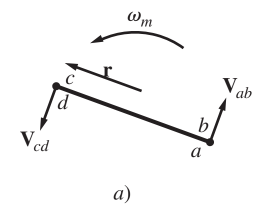
ra de alambre dentro del campo. La parte giratoria de la máquina se llama *rotor* y la parte estacionaria se denomina *estator*. Ahora se determinarán los voltajes presentes en el rotor conforme gira dentro del campo magnético.

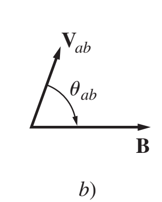
Voltaje inducido en una espira rotativa sencilla

Si el rotor de esta máquina gira, se inducirá un voltaje en la espira de alambre. Examine la figura 3-2 para determinar la magnitud y forma del voltaje. La espira de alambre que se muestra es rectangular, sus lados *ab* y *cd* son perpendiculares al plano de esta página y sus lados *bc* y *da* son paralelos al plano de esta página. El campo magnético es constante y uniforme y tiene una dirección de izquierda a derecha de esta página.

Para determinar el voltaje total e_{tot} en la espira se examinará cada segmento de la espira por separado y se sumarán los voltajes resultantes. El voltaje en cada segmento está dado por la ecuación (1-45):

$$e_{ind} = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{l} \qquad \textbf{(1-45)}$$





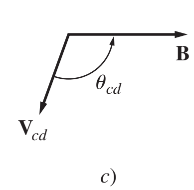


FIGURA 3-2 *a*) Velocidades y orientaciones de los lados de la espira con respecto al campo magnético. *b*) Dirección del movimiento con respecto al campo magnético del lado *ab*. *c*) Dirección del movimiento con respecto al campo magnético del lado *cd*.

1. *Segmento ab*. En este segmento la velocidad del alambre es tangencial a la trayectoria de rotación, en tanto que el campo magnético **B** apunta hacia la derecha, como se muestra en la figura 3-2*b*). La cantidad $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ apunta hacia la página, que es la misma dirección del segmento *ab*. Por lo tanto, el voltaje inducido en este segmento del alambre es

$$\begin{aligned} e_{ba} &= (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{l} \\ &= vBl \operatorname{sen} \theta_{ab} \qquad \text{hacia la página} \end{aligned} \qquad \textbf{(3-1)}$$

2. *Segmento bc*. En la primera mitad de este segmento la cantidad $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ apunta hacia la página y en la segunda mitad del segmento, la cantidad $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ apunta hacia afuera de la página. Debido a que la longitud de **l** está en el plano de la página, $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ es perpendicular a **l** en ambas porciones del segmento. Por lo tanto, el voltaje en el segmento *bc* será cero:

$$e_{cb} = 0 \qquad \textbf{(3-2)}$$

3. *Segmento cd*. En este segmento, la velocidad del alambre es tangencial a la trayectoria de rotación, en tanto que el campo magnético **B** apunta a la derecha, como se muestra en la figura 3-2*c*). La cantidad $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ apunta hacia afuera de la página, que es la misma dirección que en el segmento *cd*. Por lo tanto, el voltaje inducido en este segmento del alambre es

$$\begin{aligned} e_{dc} &= (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{l} \\ &= vBl \operatorname{sen} \theta_{cd} \qquad \text{hacia fuera de la página} \end{aligned} \qquad \textbf{(3-3)}$$

4. *Segmento da*. Igual que en el segmento *bc*, $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ es perpendicular a **l**. Por lo tanto, el voltaje en este segmento también será cero:

$$e_{ad} = 0 \qquad \textbf{(3-4)}$$

El voltaje total inducido en la espira e_{ind} es la suma de los voltajes en cada uno de sus lados:

$$\begin{aligned} e_{ind} &= e_{ba} + e_{cb} + e_{dc} + e_{ad} \\ &= vBl \operatorname{sen} \theta_{ab} + vBl \operatorname{sen} \theta_{cd} \end{aligned} \qquad \textbf{(3-5)}$$

Nótese que $\theta_{ab} = 180° - \theta_{cd}$, y recuérdese la identidad trigonométrica $\operatorname{sen} \theta = \operatorname{sen} (180° - \theta)$. Por lo tanto, el voltaje inducido es

$$e_{ind} = 2vBl \operatorname{sen} \theta \qquad \textbf{(3-6)}$$

En la figura 3-3 se muestra el voltaje resultante e_{ind} en función del tiempo.

Hay otra manera de expresar la ecuación (3-6), que claramente relaciona el comportamiento de una pequeña espira sencilla con el comportamiento de las máquinas de ca reales que son más grandes. Una vez más examine la figura 3-1 para deducir esta expresión alternativa. Si la espira rota con una velocidad angular constante ω, entonces el ángulo θ de la espira se incrementará linealmente con el tiempo. En otras palabras,

$$\theta = \omega t$$

Además, la velocidad tangencial v de las orillas de la espira se puede expresar como

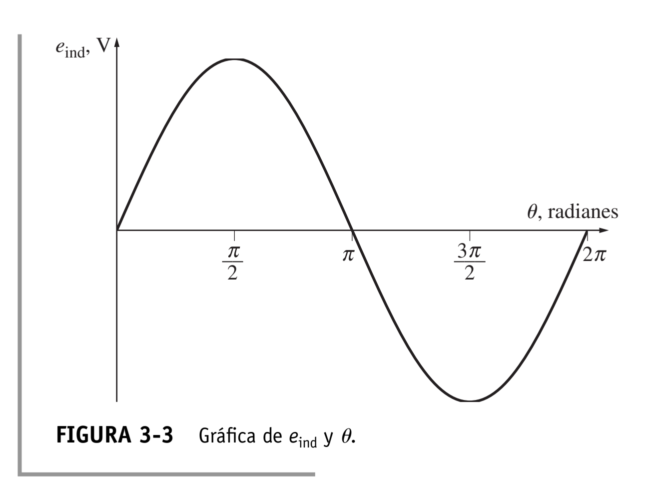


FIGURA 3-3 Gráfica de e_{ind} y θ.

$$v = r\omega \tag{3-7}$$

donde r es el radio del eje de rotación desde la orilla de la espira y ω es la velocidad angular de la espira. Sustituyendo estas expresiones en la ecuación (3-6) se tiene

$$e_{ind} = 2r\omega Bl \text{ sen } \omega t \tag{3-8}$$

Nótese también en la figura 3-1*b*) que el área A de la espira es justamente $2rl$. Por lo tanto,

$$e_{ind} = AB\omega \text{ sen } \omega t \tag{3-9}$$

Finalmente, observe que el flujo máximo a través de la espira se presenta cuando ésta es perpendicular a las líneas de densidad del flujo magnético. Este flujo es simplemente el producto del área de la superficie de la espira y de la densidad del flujo a través de la espira.

$$\phi_{máx} = AB \tag{3-10}$$

Por lo tanto, la forma final de la ecuación del voltaje es

$$e_{ind} = \phi_{máx}\omega \text{ sen } \omega t \tag{3-11}$$

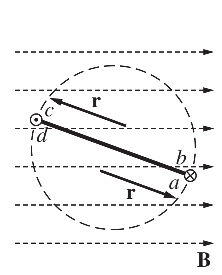
Así, *el voltaje generado en la espira es senoidal y su magnitud es igual al producto del flujo dentro de la máquina y la velocidad de rotación de la máquina*. Esto también es cierto en las máquinas de ca reales. En general, el voltaje en cualquier máquina real depende de tres factores:

1. El flujo en la máquina.
2. La velocidad de rotación.
3. Una constante que representa la construcción de la máquina (el número de espiras, etcétera).

Par inducido en una espira que porta corriente

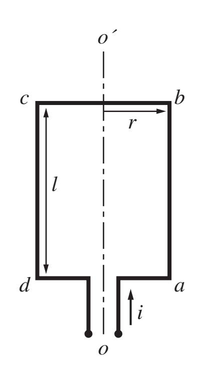
Ahora suponga que la espira rotor se encuentra en algún ángulo arbitrario θ con respecto al campo magnético y que una corriente i fluye en la espira, tal como se muestra en la figura 3-4. Si hay un flujo de corriente en la espira, entonces se inducirá un par en el alambre de la espira. Examine la figura 3-5 para determinar la magnitud y dirección del par. La fuerza en cada segmento de la espira está dada por la ecuación (1-43),

$$\mathbf{F} = i(\mathbf{l} \times \mathbf{B}) \tag{1-43}$$



B es un campo magnético uniforme, alineado como se muestra. La × en el alambre indica que la corriente fluye hacia la página, y el • en el alambre indica que la corriente fluye hacia afuera de la página.

a)



b)

FIGURA 3-4 Una espira con corriente en un campo magnético uniforme. *a*) Vista de frente; *b*) vista de la bobina.

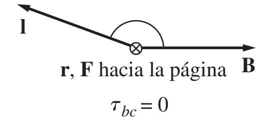
l hacia la página

B

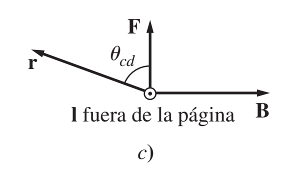
θ_{ab}

F **r**

a)

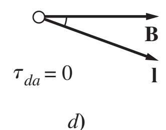


b)



c)

r, **F** fuera de la página



d)

FIGURA 3-5 *a*) Obtención de la fuerza y par en el segmento *ab*. *b*) Obtención de la fuerza y par en el segmento *bc*. *c*) Obtención de la fuerza y par en el segmento *cd*. *d*) Obtención de la fuerza y par en el segmento *da*.

donde

$i =$ magnitud de la corriente en el segmento
$\mathbf{l} =$ longitud del segmento, cuya dirección se define como la dirección del flujo de la corriente
$\mathbf{B} =$ vector de densidad del flujo magnético

El par en ese segmento está dado por

$$\begin{aligned}\tau &= \text{(fuerza aplicada) (distancia perpendicular)}\\ &= (F)\,(r \text{ sen } \theta)\\ &= rF \text{ sen } \theta \end{aligned} \qquad \textbf{(1-6)}$$

donde θ es el ángulo entre el vector **r** y el vector **F**. La dirección del par es en el sentido de las manecillas del reloj si tiende a causar una rotación en ese mismo sentido y en el sentido contrario a las manecillas del reloj si tiende a causar una rotación en ese sentido.

1. *Segmento ab*. En este segmento la dirección de la corriente es hacia la página, mientras que el campo magnético **B** apunta hacia la derecha, como se muestra en la figura 3-5*a*). La cantidad **l** × **B** apunta hacia abajo. Por lo tanto, la fuerza inducida sobre este segmento del alambre es

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= i(\mathbf{l} \times \mathbf{B})\\ &= ilB \qquad \text{hacia abajo}\end{aligned}$$

El par resultante es

$$\begin{aligned}\tau_{ab} &= (F)\,(r \text{ sen } \theta_{ab})\\ &= rilB \text{ sen } \theta_{ab} \qquad \text{en sentido de las manecillas del reloj}\end{aligned} \qquad \textbf{(3-12)}$$

2. *Segmento bc*. En este segmento la dirección de la corriente sigue el plano de la página, mientras que el campo magnético **B** apunta hacia la derecha, como se muestra en la figura 3-5*b*). La cantidad **l** × **B** apunta hacia la página. Por lo tanto, la fuerza inducida sobre este segmento del alambre es

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= i(\mathbf{l} \times \mathbf{B})\\ &= ilB \qquad \text{hacia la página}\end{aligned}$$

En este segmento el par resultante es 0 debido a que los vectores **r** y **l** son paralelos (ambos apuntan hacia la página) y el ángulo θ_{bc} es cero.

$$\begin{aligned}\tau_{bc} &= (F)\,(r \text{ sen } \theta_{ab})\\ &= 0\end{aligned} \qquad \textbf{(3-13)}$$

3. *Segmento cd*. En este segmento la dirección de la corriente es hacia afuera de la página, mientras que el campo magnético **B** apunta hacia la derecha, como se muestra en la figura 3-5*c*). La cantidad **l** × **B** apunta hacia arriba. Por lo tanto, la fuerza inducida sobre este segmento del alambre es

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= i(\mathbf{l} \times \mathbf{B}) \\ &= ilB \qquad \text{hacia arriba} \end{aligned}$$

El par resultante es

$$\begin{aligned} \tau_{cd} &= (F)\,(r \operatorname{sen} \theta_{cd}) \\ &= rilB \operatorname{sen} \theta_{cd} \qquad \text{en sentido de las manecillas del reloj} \end{aligned} \tag{3-14}$$

4. *Segmento da*. En este segmento la dirección de la corriente sigue el plano de la página, mientras que el campo magnético **B** apunta hacia la derecha, como se muestra en la figura 3-5*d*). La cantidad **l** × **B** apunta hacia afuera de la página. Por lo tanto, la fuerza inducida sobre este segmento del alambre es

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= i(\mathbf{l} \times \mathbf{B}) \\ &= ilB \qquad \text{hacia fuera de la página} \end{aligned}$$

En este segmento el par resultante es 0, debido a que los vectores **r** y **l** son paralelos (ambos apuntan hacia fuera de la página) y el ángulo θ_{da} es 0.

$$\begin{aligned} \tau_{da} &= (F)\,(r \operatorname{sen} \theta_{da}) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3-15}$$

El par inducido total en la espira τ_{ind} es la suma de los pares en cada uno de los lados:

$$\begin{aligned} \tau_{\text{ind}} &= \tau_{ab} + \tau_{bc} + \tau_{cd} + \tau_{da} \\ &= rilB \operatorname{sen} \theta_{ab} + rilB \operatorname{sen} \theta_{cd} \end{aligned} \tag{3-16}$$

Nótese que $\theta_{ab} = \theta_{cd}$, por lo que el par inducido es

$$\tau_{\text{ind}} = 2\, rilB \operatorname{sen} \theta \tag{3-17}$$

El par resultante τ_{ind} se muestra en función del ángulo en la figura 3-6. Nótese que el par llega a su máximo valor cuando el plano de la espira es paralelo al campo magnético y el par es cero cuando el plano de la espira es perpendicular al campo magnético.

Hay otra manera de expresar la ecuación (3-17), que claramente relaciona el comportamiento de una espira sencilla con el comportamiento de las máquinas de ca reales que son más grandes. Para deducir esta expresión alternativa, examine la figura 3-7. Si la corriente en la espira es la que se muestra en la figura, la corriente generará una densidad de flujo magnético $\mathbf{B}_{\text{esp}}$ con la dirección que se muestra. La magnitud de $\mathbf{B}_{\text{esp}}$ es

$$B_{\text{esp}} = \frac{\mu i}{G}$$

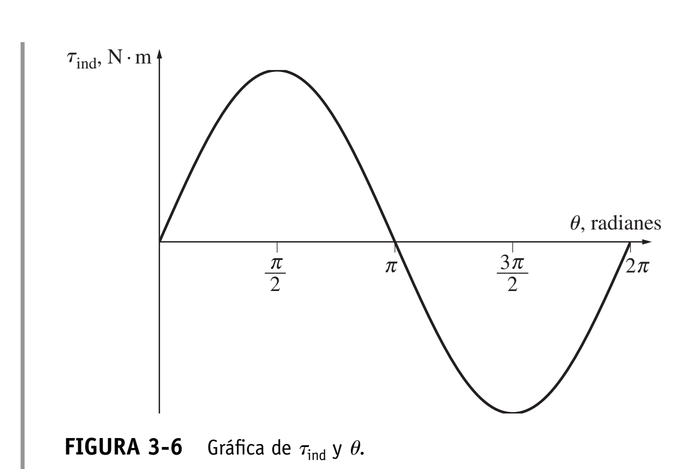
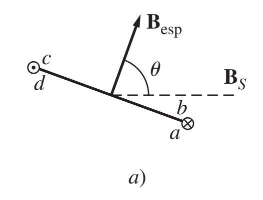


FIGURA 3-6 Gráfica de τ_{ind} y θ.



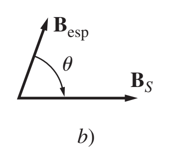


FIGURA 3-7 Obtención de la ecuación de par inducido. *a*) La corriente en la espira produce una densidad de flujo magnético $\mathbf{B}_{esp}$ perpendicular al plano de la espira; *b*) relación geométrica entre $\mathbf{B}_{esp}$ y $\mathbf{B}_S$.

donde G es un factor que depende de la geometría de la espira.* También nótese que el área de la espira A es justamente $2rl$. Sustituyendo estas dos ecuaciones en la ecuación (3-17) se tiene como resultado

$$\tau_{ind} = \frac{AG}{\mu} B_{esp} B_S \operatorname{sen} \theta \qquad \textbf{(3-18)}$$

$$= kB_{esp} B_S \operatorname{sen} \theta \qquad \textbf{(3-19)}$$

donde $k = AG/\mu$ es un factor que depende de la construcción de la máquina, B_S se utiliza para el campo magnético del estator con objeto de distinguirlo del campo magnético generado por el rotor y θ es el ángulo entre $\mathbf{B}_{esp}$ y $\mathbf{B}_S$. Por medio de las identidades trigonométricas se puede ver que el ángulo entre $\mathbf{B}_{esp}$ y $\mathbf{B}_S$ es el mismo ángulo θ de la ecuación (3-17).

Se pueden determinar tanto la magnitud como la dirección del par inducido si se expresa la ecuación (3-19) como un producto cruz:

$$\tau_{ind} = k\mathbf{B}_{esp} \times \mathbf{B}_S \qquad \textbf{(3-20)}$$

Si se aplica esta ecuación a la espira de la figura 3-7 produce un vector de par hacia la página, lo que indica que el par es en sentido de las manecillas del reloj con una magnitud que se obtiene por medio de la ecuación (3-19).

Así, *el par inducido en la espira es proporcional a la fuerza del campo magnético de la espira, la fuerza del campo magnético externo y el seno del ángulo entre ellos.* Esto también es cierto para las máquinas de ca reales. En general, el par en cualquier máquina real depende de cuatro factores:

1. La intensidad del campo magnético del rotor.
2. La intensidad del campo magnético externo.
3. El seno del ángulo entre ellos.
4. Una constante que representa la construcción de la máquina (geometría, etcétera).

3.2 CAMPO MAGNÉTICO GIRATORIO

En la sección 3.1 se demostró que si hay dos campos magnéticos presentes en una máquina, entonces se crea un par que tenderá a alinear los dos campos magnéticos. Si un campo magnético lo produce el estator de una máquina de ca y el otro lo produce el rotor de la máquina, entonces se inducirá un par en el rotor que causará que éste gire y se alinee con el campo magnético del estator.

Si hubiera una manera de hacer girar el campo magnético del estator, entonces el par inducido en el rotor provocaría que "persiguiera" constantemente en círculos al campo magnético del estator. Esto, en breves palabras, es el principio básico de la operación de un motor de ca.

¿Cómo se puede lograr que el campo magnético del estator gire? El principio fundamental de la operación de las máquinas de ca es que *si un grupo de corrientes trifásicas, cada una de igual magnitud y desfasadas entre ellas 120°, fluye en un devanado trifásico, producirán un campo magnético giratorio de magnitud constante*. Un devanado trifásico consta de tres devanados individuales, separados 120° eléctricos alrededor de la superficie de la máquina.

El caso más sencillo de un campo magnético giratorio es un estator vacío que contiene tres bobinas, cada una separada por 120° (véase la figura 3-8*a*). Debido a que tal devanado sólo produce un polo magnético norte y uno sur, es un devanado de dos polos.

Para comprender el concepto de un campo magnético giratorio, se aplicará un grupo de corrientes al estator de la figura 3-8 y se verá el resultado en momentos específicos de tiempo. Supóngase que las corrientes en las tres bobinas se obtienen de las ecuaciones

$$i_{aa'}(t) = I_M \operatorname{sen} \omega t \quad \text{A} \qquad \textbf{(3-21}\textbf{\textit{a}}\textbf{)}$$

$$i_{bb'}(t) = I_M \operatorname{sen} (\omega t - 120°) \quad \text{A} \qquad \textbf{(3-21}\textbf{\textit{b}}\textbf{)}$$

$$i_{cc'}(t) = I_M \operatorname{sen} (\omega t - 240°) \quad \text{A} \qquad \textbf{(3-21}\textbf{\textit{c}}\textbf{)}$$

* Si la espira es un círculo, entonces $G = 2r$, donde r es el radio del círculo, por lo que $\mathbf{B}_{esp} = \mu i/2r$. En una espira rectangular, el valor de G variará dependiendo de la relación exacta de la longitud con el ancho de la espira.

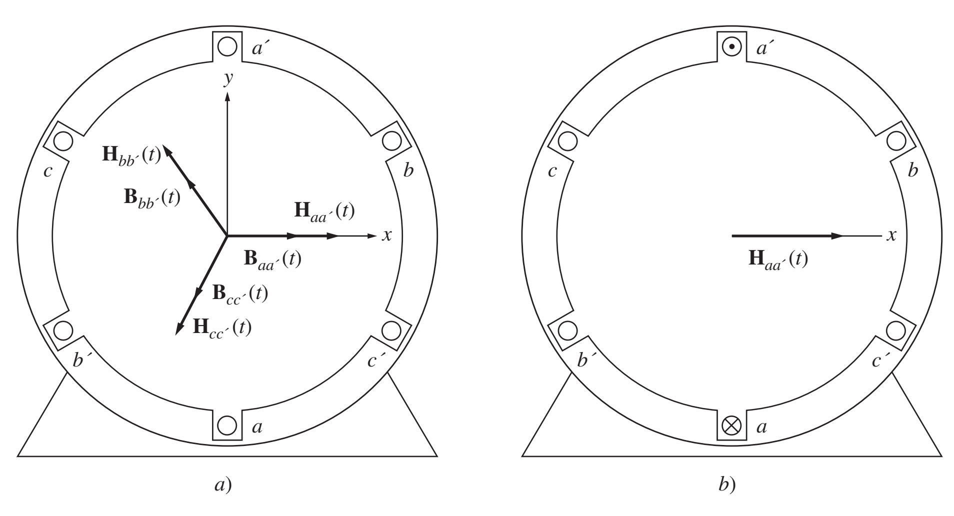


FIGURA 3-8 *a*) Un estator trifásico simple. Se asume que las corrientes en el estator son de secuencia positiva si fluyen hacia adentro de la bobina por el extremo no primado y salen de él por el extremo primado. También se muestran las intensidades de magnetización producidas por cada bobina. *b*) Vector de intensidad de magnetización $\mathbf{H}_{aa'}(t)$ producido por una corriente que fluye en la bobina *aa′*.

La corriente *aa′* en la bobina fluye hacia el extremo *a* de la bobina y sale por el extremo *a′* de ella. Produce la intensidad de campo magnético

$$\mathbf{H}_{aa'}(t) = H_M \operatorname{sen} \omega t \angle 0° \qquad \text{A • vueltas/m} \tag{3-22a}$$

donde 0° es el ángulo *espacial* del vector de intensidad de campo magnético, como se muestra en la figura 3-8*b*). La dirección del vector de intensidad de campo magnético $\mathbf{H}_{aa'}(t)$ se encuentra por medio de la regla de la mano derecha: si los dedos de la mano derecha se doblan en la dirección del flujo de corriente en la bobina, entonces el dedo pulgar apunta en la dirección del campo magnético resultante. Nótese que la magnitud del vector de intensidad de campo magnético $\mathbf{H}_{aa'}(t)$ varía sinusoidalmente en tiempo, pero la dirección $\mathbf{H}_{aa'}(t)$ siempre es constante. De manera similar, los vectores de intensidad de campo magnético $\mathbf{H}_{bb'}(t)$ y $\mathbf{H}_{cc'}(t)$ son

$$\mathbf{H}_{bb'}(t) = H_M \operatorname{sen} (\omega t - 120°) \angle 120° \qquad \text{A • vueltas/m} \tag{3-22b}$$

$$\mathbf{H}_{cc'}(t) = H_M \operatorname{sen} (\omega t - 240°) \angle 240° \qquad \text{A • vueltas/m} \tag{3-22c}$$

Las densidades de flujo resultantes de las intensidades de estos campos magnéticos se obtienen con la ecuación (1-21):

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \tag{1-21}$$

Y son

$$\mathbf{B}_{aa'}(t) = B_M \operatorname{sen} \omega t \angle 0° \qquad \text{T} \tag{3-23a}$$

$$\mathbf{B}_{bb'}(t) = B_M \operatorname{sen} (\omega t - 120°) \angle 120° \qquad \text{T} \tag{3-23b}$$

$$\mathbf{B}_{cc'}(t) = B_M \operatorname{sen} (\omega t - 240°) \angle 240° \qquad \text{T} \tag{3-23c}$$

donde $B_M = \mu H_M$. Las corrientes y sus densidades de flujo correspondientes se pueden examinar en momentos específicos para determinar el campo magnético neto resultante en el estator.

Por ejemplo, en el tiempo $\omega t = 0°$, el campo magnético en la bobina *aa′* será

$$\mathbf{B}_{aa'} = 0 \tag{3-24a}$$

El campo magnético en la bobina bb' será

$$\mathbf{B}_{bb'} = B_M \text{ sen } (-120°) \angle 120° \tag{3-24b}$$

y el campo magnético en la bobina cc' será

$$\mathbf{B}_{cc'} = B_M \text{ sen } (-240°) \angle 240° \tag{3-24c}$$

El campo magnético total se obtiene de la suma de las tres bobinas

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{\text{net}} &= \mathbf{B}_{aa'} + \mathbf{B}_{bb'} + \mathbf{B}_{cc'} \\
&= 0 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}B_M\right)\angle 120° + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}B_M\right)\angle 240° \\
&= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}B_M\right)\left[-\left(\cos 120°\,\hat{\mathbf{x}} + \text{sen } 120°\,\hat{\mathbf{y}}\right) + \left(\cos 240°\,\hat{\mathbf{x}} + \text{sen } 240°\,\hat{\mathbf{y}}\right)\right] \\
&= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}B_M\right)\left(\frac{1}{2}\,\hat{\mathbf{x}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,\hat{\mathbf{y}} - \frac{1}{2}\,\hat{\mathbf{x}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,\hat{\mathbf{y}}\right) \\
&= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}B_M\right)\left(-\sqrt{3}\,\hat{\mathbf{y}}\right) \\
&= -1.5B_M\,\hat{\mathbf{y}} \\
&= 1.5B_M \angle -90°
\end{aligned}$$

donde $\hat{\mathbf{x}}$ es el vector unitario en la dirección x y $\hat{\mathbf{y}}$ es el vector unitario en la dirección y en la figura 3-8. El campo magnético neto resultante se muestra en la figura 3-9*a*).

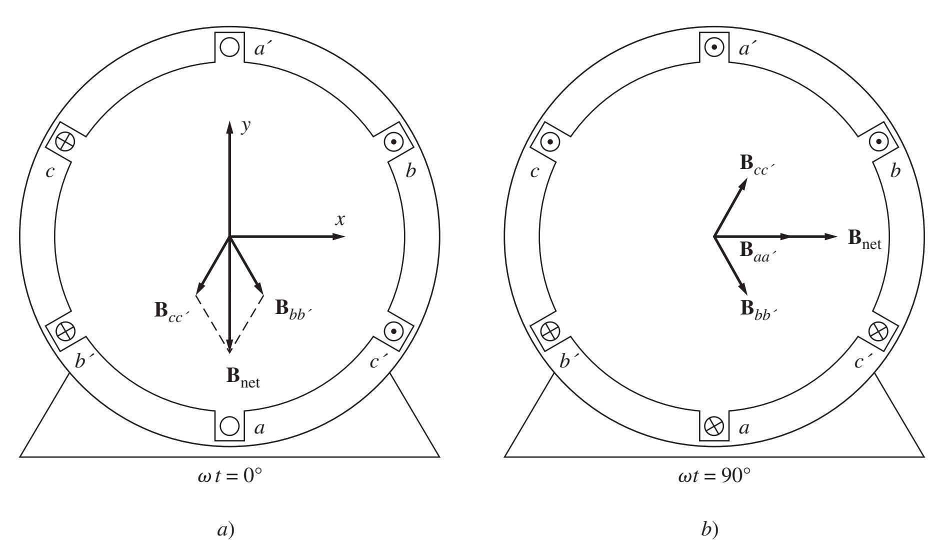


FIGURA 3-9 *a*) Vector de campo magnético de un estator en el tiempo $\omega t = 0°$. *b*) Vector de campo magnético en el estator en el tiempo $\omega t = 90°$.

Como otro ejemplo tómese el campo magnético en el tiempo $\omega t = 90°$. En ese momento, las corrientes son

$$\begin{aligned}
i_{aa'} &= I_M \text{ sen } 90° \quad \text{A} \\
i_{bb'} &= I_M \text{ sen } (-30°) \quad \text{A} \\
i_{cc'} &= I_M \text{ sen } (-150°) \quad \text{A}
\end{aligned}$$

y los campos magnéticos son

$$\mathbf{B}_{aa'} = B_M \angle 0°$$
$$\mathbf{B}_{bb'} = -0.5\ B_M \angle 120°$$
$$\mathbf{B}_{cc'} = -0.5\ B_M \angle 240°$$

El campo magnético resultante es

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{\text{net}} &= \mathbf{B}_{aa'} + \mathbf{B}_{bb'} + \mathbf{B}_{cc'} \\
&= B_M \angle 0° + \left(-\frac{1}{2}B_M\right) \angle 120° + \left(-\frac{1}{2}B_M\right) \angle 240° \\
&= B_M \left[\hat{\mathbf{x}} - \frac{1}{2}\left(\cos 120°\,\hat{\mathbf{x}} + \text{sen } 120°\,\hat{\mathbf{y}}\right) - \frac{1}{2}\left(\cos 240°\,\hat{\mathbf{x}} + \text{sen } 240°\,\hat{\mathbf{y}}\right)\right] \\
&= B_M \left(\hat{\mathbf{x}} - \frac{1}{2}\,\hat{\mathbf{x}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\mathbf{y}} - \frac{1}{2}\,\hat{\mathbf{x}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\mathbf{y}}\right) \\
&= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}B_M\right)\left(-\sqrt{3}\ \hat{\mathbf{y}}\right) \\
&= -\frac{3}{2}B_M\hat{\mathbf{y}} \\
&= 1.5B_M \angle -90°
\end{aligned}$$

En la figura 3-9*b*) se muestra el campo magnético resultante. Nótese que aun cuando cambió la *dirección* del campo magnético, la *magnitud* permanece constante. El campo magnético tiene una magnitud constante mientras rota en dirección contraria a las manecillas del reloj.

Demostración del concepto de campo magnético giratorio

En cualquier tiempo t, el campo magnético tendrá la misma magnitud $1.5B_M$ y seguirá girando con una velocidad angular ω. A continuación se demuestra esta afirmación.

Regresemos al estator que se muestra en la figura 3-8. En el sistema coordenado que puede verse en la figura, la dirección de x es hacia la derecha y la dirección de y es hacia arriba. El vector $\hat{\mathbf{x}}$ es el vector unitario en la dirección horizontal y el vector $\hat{\mathbf{y}}$ es el vector unitario en la dirección vertical. Para encontrar la densidad de flujo magnético total en el estator, simplemente se suman vectorialmente los tres campos magnéticos que lo componen y se encuentra el resultado.

La densidad de flujo magnético neto en el estator es

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{\text{net}}(t) &= \mathbf{B}_{aa'}(t) + \mathbf{B}_{bb'}(t) + \mathbf{B}_{cc'}(t) \\
&= B_M \text{ sen } \omega t \angle 0° + B_M \text{ sen } (\omega t - 120°) \angle 120° + B_M \text{ sen } (\omega t - 240°) \angle 240°\ \text{T}
\end{aligned}$$

Cada uno de los tres campos magnéticos que lo componen se puede separar en sus componentes en x y y.

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{\text{net}}(t) = {} & B_M \text{ sen } \omega t\,\hat{\mathbf{x}} \\
& - [0.5B_M \text{ sen } (\omega t - 120°)]\hat{\mathbf{x}} + \left[\frac{\sqrt{3}}{2}B_M \text{ sen } (\omega t - 120°)\right]\hat{\mathbf{y}} \\
& - [0.5B_M \text{ sen } (\omega t - 240°)]\hat{\mathbf{x}} - \left[\frac{\sqrt{3}}{2}B_M \text{ sen } (\omega t - 240°)\right]\hat{\mathbf{y}}
\end{aligned}$$

Combinando los componentes en x y y se obtiene

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{\text{net}}(t) = {} & [B_M \text{ sen } \omega t - 0.5B_M \text{ sen } (\omega t - 120°) - 0.5B_M \text{ sen } (\omega t - 240°)]\,\hat{\mathbf{x}} \\
& + \left[\frac{\sqrt{3}}{2}B_M \text{ sen } (\omega t - 120°) - \frac{\sqrt{3}}{2}B_M \text{ sen } (\omega t - 240°)\right]\hat{\mathbf{y}}
\end{aligned}$$

De acuerdo con las identidades trigonométricas de adición de ángulo se tiene que

$$\mathbf{B}_{\text{net}}(t) = \left[B_M \operatorname{sen}\omega t + \frac{1}{4}B_M \operatorname{sen}\omega t + \frac{\sqrt{3}}{4}B_M \cos\omega t + \frac{1}{4}B_M \operatorname{sen}\omega t - \frac{\sqrt{3}}{4}B_M \cos\omega t\right]\hat{\mathbf{x}}$$

$$+ \left[-\frac{\sqrt{3}}{4}B_M \operatorname{sen}\omega t - \frac{3}{4}B_M \cos\omega t + \frac{\sqrt{3}}{4}B_M \operatorname{sen}\omega t - \frac{3}{4}B_M \cos\omega t\right]\hat{\mathbf{y}}$$

$$\mathbf{B}_{\text{net}}(t) = (1.5B_M \operatorname{sen}\omega t)\hat{\mathbf{x}} - (1.5B_M \cos\omega t)\hat{\mathbf{y}} \tag{3-25}$$

La ecuación (3-25) es la expresión final de la densidad del flujo magnético neto. Nótese que la magnitud del campo es la constante $1.5B_M$ y que el ángulo cambia continuamente en una dirección contraria a las manecillas del reloj con una velocidad angular ω. Nótese también que $\omega t = 0°$, $\mathbf{B}_{\text{net}} = 1.5B_M \angle -90°$ y que a $\omega t = 90°$, $\mathbf{B}_{\text{net}} = 1.5B_M \angle 0°$. Estos resultados concuerdan con los ejemplos específicos ya examinados.

Relación entre la frecuencia eléctrica y la velocidad de rotación del campo magnético

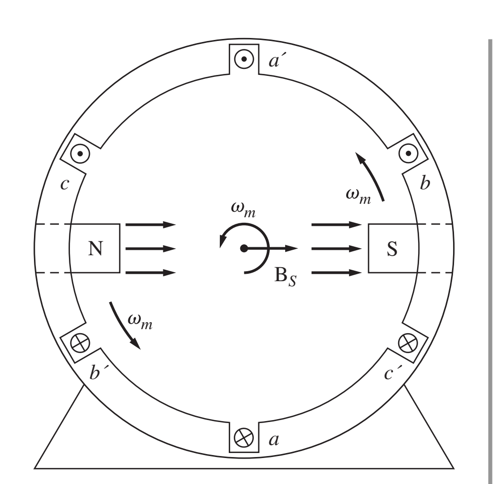


FIGURA 3-10 Campo magnético giratorio en un estator representado como polos de estator norte y sur en movimiento.

La figura 3-10 muestra que el campo magnético giratorio en el estator se puede representar con un polo norte (por donde el flujo sale del estator) y un polo sur (por donde el flujo entra). Estos polos magnéticos completan una rotación mecánica alrededor de la superficie del estator por cada ciclo eléctrico de la corriente aplicada. Por lo tanto, la velocidad mecánica de rotación del campo magnético en revoluciones por segundo es igual a la frecuencia eléctrica en hertz:

$$f_e = f_m \qquad \text{dos polos} \tag{3-26}$$

$$\omega_e = \omega_m \qquad \text{dos polos} \tag{3-27}$$

En este caso f_m y ω_m representan la velocidad mecánica en revoluciones por segundo y radianes por segundo, mientras que f_e y ω_e representan la velocidad eléctrica en hertz y radianes por segundo.

Nótese que el orden de los devanados del estator bipolar de la figura 3-10 (en sentido contrario a las manecillas del reloj) es

$$a\text{-}c'\text{-}b\text{-}a'\text{-}c\text{-}b'$$

¿Qué pasaría en un estator si este modelo se repitiera dos veces dentro de él? La figura 3-11*a*) muestra un estator con esta característica. Así, el modelo de devanados (en sentido contrario a las manecillas del reloj) es

$$a\text{-}c'\text{-}b\text{-}a'\text{-}c\text{-}b'\text{-}a\text{-}c'\text{-}b\text{-}a'\text{-}c\text{-}b'$$

que es exactamente el modelo del estator anterior repetido dos veces. Cuando un conjunto de corrientes trifásicas se aplica al estator, se producen *dos* polos norte y *dos* polos sur en los devanados del estator, tal como puede verse en la figura 3-11*b*). En este devanado, un polo recorre sólo la mitad de la superficie del estator en un ciclo eléctrico. Ya que un ciclo eléctrico consta de 360 grados eléctricos y debido a que el movimiento mecánico es de 180 grados mecánicos, la relación entre el ángulo eléctrico θ_e y el ángulo mecánico θ_m en el estator es

$$\theta_e = 2\theta_m \tag{3-28}$$

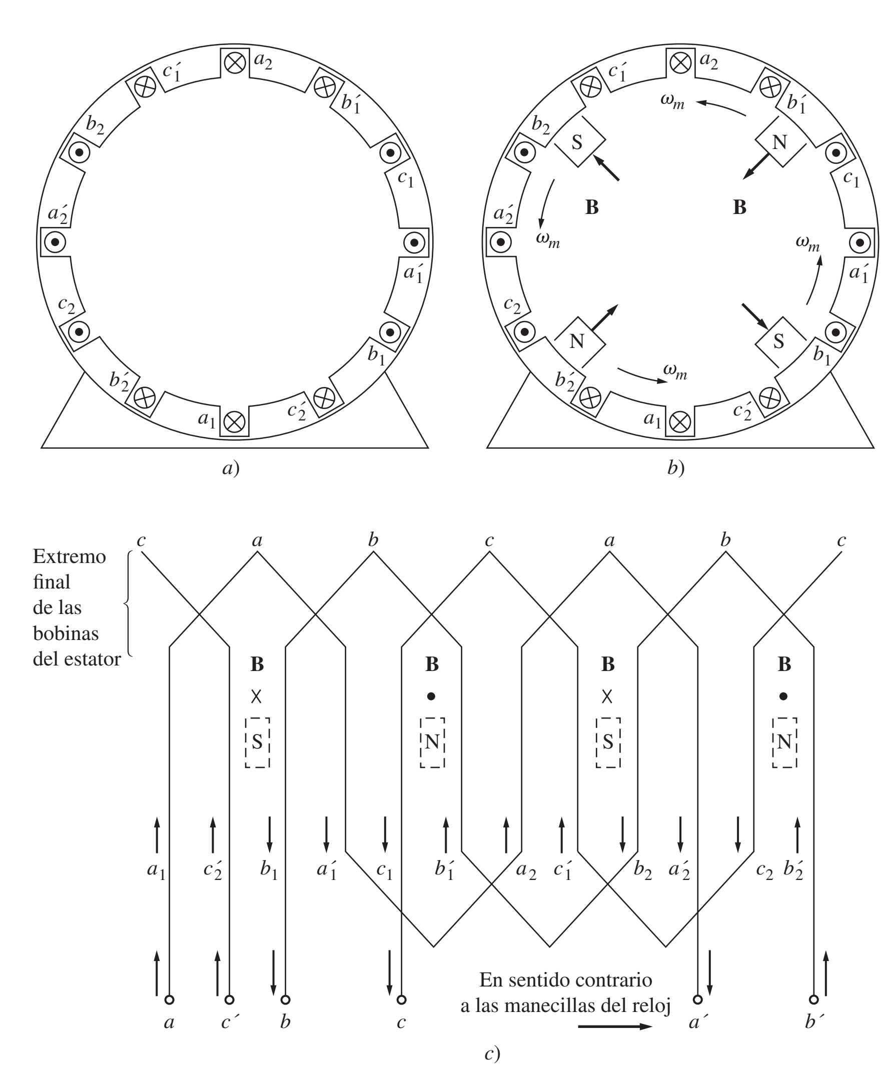


FIGURA 3-11 *a*) Un devanado de estator de cuatro polos simple. *b*) Los polos magnéticos del estator resultantes. Nótese que hay polos en movimiento que alternan polaridad cada 90° alrededor de la superficie del estator. *c*) Diagrama de un devanado del estator visto desde su superficie interna que muestra cómo las corrientes del estator producen polos magnéticos de norte y sur.

Entonces, en el caso del devanado de cuatro polos, la frecuencia eléctrica de la corriente es dos veces la frecuencia mecánica de rotación:

$$f_e = 2f_m \quad \text{cuatro polos} \tag{3-29}$$

$$\omega_e = 2\omega_m \quad \text{cuatro polos} \tag{3-30}$$

En general, si el número de polos magnéticos en el estator de una máquina de ca es P, entonces hay $P/2$ repeticiones de la secuencia de devanados a-c'-b-a'-c-b' alrededor de su superficie interior y las cantidades mecánicas y eléctricas en el estator se relacionan por medio de

$$\theta_e = \frac{P}{2}\theta_m \tag{3-31}$$

$$f_e = \frac{P}{2}f_m \tag{3-32}$$

$$\omega_e = \frac{P}{2}\omega_m \tag{3-33}$$

También, puesto que $f_m = n_m/60$, es posible relacionar la frecuencia eléctrica del estator en hertz con la velocidad mecánica resultante de los campos magnéticos en revoluciones por minuto. Esta relación es

$$f_e = \frac{n_m P}{120} \tag{3-34}$$

Inversión de la dirección de rotación del campo magnético

Hay otro aspecto interesante sobre el campo magnético resultante. *Si se intercambia la corriente en dos de las tres bobinas, se invertirá la dirección de rotación del campo magnético*. Esto significa que es posible invertir la dirección de rotación de un motor de ca simplemente conmutando las conexiones de dos de las tres bobinas. A continuación se comprobará este resultado.

Para comprobar la inversión de la dirección de rotación se intercambian las fases bb' y cc' de la figura 3-8 y se calcula la densidad del flujo resultante $\mathbf{B}_{\text{net}}$.

La densidad del flujo magnético en el estator es

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_{\text{net}}(t) &= \mathbf{B}_{aa'}(t) + \mathbf{B}_{bb'}(t) + \mathbf{B}_{cc'}(t)\\ &= B_M \operatorname{sen}\omega t \angle 0° + B_M \operatorname{sen}(\omega t - 240°) \angle 120° + B_M \operatorname{sen}(\omega t - 120°) \angle 240° \text{ T}\end{aligned}$$

Cada uno de los tres campos magnéticos se puede descomponer en sus componentes x y y:

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_{\text{net}}(t) = {} & B_M \operatorname{sen}\omega t\,\hat{\mathbf{x}}\\ & - [0.5B_M \operatorname{sen}(\omega t - 240°)]\hat{\mathbf{x}} + \left[\frac{\sqrt{3}}{2} B_M \operatorname{sen}(\omega t - 240°)\right]\hat{\mathbf{y}}\\ & - [0.5B_M \operatorname{sen}(\omega t - 120°)]\hat{\mathbf{x}} - \left[\frac{\sqrt{3}}{2} B_M \operatorname{sen}(\omega t - 120°)\right]\hat{\mathbf{y}}\end{aligned}$$

Combinando los componentes x y y se obtiene

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_{\text{net}}(t) = {} & [B_M \operatorname{sen}\omega t - 0.5B_M \operatorname{sen}(\omega t - 240°) - 0.5B_M \operatorname{sen}(\omega t - 120°]\hat{\mathbf{x}}\\ & + \left[\frac{\sqrt{3}}{2} B_M \operatorname{sen}(\omega t - 240°) - \frac{\sqrt{3}}{2} B_M \operatorname{sen}(\omega t - 120°)\right]\hat{\mathbf{y}}\end{aligned}$$

De acuerdo con las identidades trigonométricas de adición de ángulos, se tiene

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_{\text{net}}(t) = {} & \left[B_M \operatorname{sen}\omega t + \frac{1}{4}B_M \operatorname{sen}\omega t - \frac{\sqrt{3}}{4}B_M \cos \omega t + \frac{1}{4}B_M \operatorname{sen}\omega t + \frac{\sqrt{3}}{4}B_M \cos \omega t\right]\hat{\mathbf{x}}\\ & + \left[-\frac{\sqrt{3}}{4}B_M \operatorname{sen}\omega t + \frac{3}{4}B_M \cos \omega t + \frac{\sqrt{3}}{4}B_M \operatorname{sen}\omega t + \frac{3}{4}B_M \cos \omega t\right]\hat{\mathbf{y}}\end{aligned}$$

$$\mathbf{B}_{\text{net}}(t) = (1.5B_M \operatorname{sen}\omega t)\hat{\mathbf{x}} + (1.5B_M \cos \omega t)\hat{\mathbf{y}} \tag{3-35}$$

Esta vez el campo magnético tiene la misma magnitud pero gira en el sentido de las manecillas del reloj. Por lo tanto, *conmutando las corrientes en dos fases del estator, se invierte la dirección de rotación del campo magnético en una máquina de ca.*

EJEMPLO 3-1

Cree un programa de MATLAB que represente el comportamiento de un campo magnético giratorio en el estator trifásico que se muestra en la figura 3-9.

Solución

La geometría de las espiras del estator es fija, como se observa en la figura 3-9. Las corrientes en las espiras son

$$i_{aa'}(t) = I_M \operatorname{sen} \omega t \qquad \text{A} \tag{3-21a}$$

$$i_{bb'}(t) = I_M \operatorname{sen} (\omega t - 120°) \qquad \text{A} \tag{3-21b}$$

$$i_{cc'}(t) = I_M \operatorname{sen} (\omega t - 240°) \qquad \text{A} \tag{3-21c}$$

y las densidades de los flujos magnéticos resultantes son

$$\mathbf{B}_{aa'}(t) = B_M \operatorname{sen} \omega t \angle 0° \qquad \text{T} \tag{3-23a}$$

$$\mathbf{B}_{bb'}(t) = B_M \operatorname{sen} (\omega t - 120°) \angle 120° \qquad \text{T} \tag{3-23b}$$

$$\mathbf{B}_{cc'}(t) = B_M \operatorname{sen} (\omega t - 240°) \angle 240° \qquad \text{T} \tag{3-23c}$$

$$\phi = 2rlB = dlB$$

A continuación se muestra un sencillo programa de MATLAB que dibuja una gráfica de $\mathbf{B}_{aa'}$, $\mathbf{B}_{bb'}$, $\mathbf{B}_{cc'}$ y $\mathbf{B}_{\text{net}}$ en función del tiempo:

```
% Archivo M: mag_field.m
% Archivo M para calcular el campo magnético neto producido
% por un estator trifásico.

% Establecer las condiciones básicas
bmax = 1;                           % Normalizar bmax a 1
freq = 60;                          % 60 Hz
w = 2*pi*freq;                      % velocidad angular (rad/s)

% Primero, generar los tres campos magnéticos
t=0:1/6000:1/60;
Baa = sin(w*t) .* (cos(0) + j*sin(0));
Bbb = sin(w*t+2*pi/3) .* (cos(2*pi/3) + j*sin(2*pi/3));
Bcc = sin(w*t+2*pi/3) .* (cos(−2*pi/3) + j*sin(−2*pi/3));

% Calcular Bnet
Bnet = Ba + Bbb + Bcc;

% Calcular un círculo que represente el valor máximo
% esperado de Bnet
circle = 1.5 * (cos(w*t) + j*sin(w*t));

% Hacer una gráfica de la magnitud y la dirección de los
% campos magnéticos resultantes. Nótese que Ba es negra, Bbb
% es azul, Bcc es morada y Bnet es roja.
for ii = 1:length(t)

  % Hacer una gráfica del círculo de referencia
  plot(circle, 'k');
  hold on;

  % Hacer una gráfica de los cuatro campos magnéticos
  plot([0 real(Baa(ii))], [0 imag(Baa(ii))],'k','LineWidth', 2);
  plot([0 real(Bbb(ii))],[0 imag(Bbb(ii))],'b','LineWidth', 2);
  plot([0 real(Bcc(ii))],[0 imag(Bcc(ii))],'m','LineWidth', 2);
  plot([0 real (Bnet(ii))],[0 imag(Bnet(ii))],'r','LineWidth',3);
  axis square;
  axis([-2 2 -2 2]);
  drawnow;
  hold off;

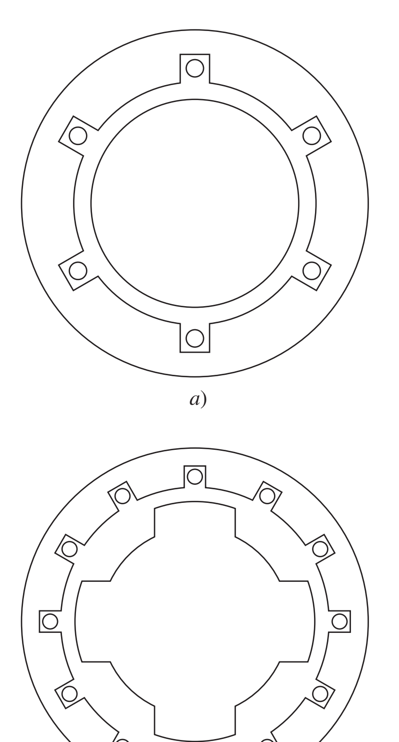
end
```

Cuando ejecute este programa, dibuje las líneas correspondientes a los tres campos magnéticos así como también la línea correspondiente al campo magnético neto. Ejecute este programa y observe el comportamiento de $\mathbf{B}_{net}$.

3.3 FUERZA MAGNETOMOTRIZ Y DISTRIBUCIÓN DE FLUJO EN MÁQUINAS DE CA

En la sección 3.2 se estudió el flujo producido dentro de una máquina de ca como si estuviera en espacio libre. Se asumió que la dirección de la densidad del flujo producido por una bobina de alambre era perpendicular al plano de la bobina, y la dirección del flujo se obtenía por medio de la regla de la mano derecha.

El *flujo en una máquina real no se comporta de manera tan sencilla como se supuso anteriormente*, debido a que hay un rotor ferromagnético en el centro de la máquina con un pequeño entrehierro entre el rotor y el estator. El rotor puede ser cilíndrico, como el que se muestra en la figura 3-l2*a*), o puede tener caras polares proyectadas hacia afuera de su superficie, como se observa en la figura 3-12*b*). Si el rotor es cilíndrico, entonces se dice que la máquina es de *polos no salientes*; si el rotor tiene caras de polos proyectadas hacia fuera de su superficie, se dice que la máquina es de *polos salientes*. Las máquinas con rotores cilíndricos o polos no salientes son más fáciles de entender y analizar que las máquinas de polos salientes. En este texto el análisis se limitará a las máquinas con rotores cilíndricos. Las máquinas de polos salientes se estudiarán brevemente en el apéndice C y de manera más extensa en las referencias 1 y 2.



a)

b)

FIGURA 3-12 *a*) Máquina de ca con rotor cilíndrico o de polos no salientes. *b*) Máquina de ca con rotor de polos salientes.

Respecto de la máquina de rotor cilíndrico de la figura 3-12*a*), la reluctancia del entrehierro en esta máquina es mucho más alta que las reluctancias en el rotor y en el estator, por lo que el *vector de densidad de flujo* **B** *toma el camino más corto a través del entrehierro* y salta perpendicularmente entre el rotor y el estator.

Para producir un voltaje senoidal en una máquina como ésta, la *magnitud del vector de densidad de flujo* **B** *debe variar de manera senoidal* a lo largo de la superficie del entrehierro. La densidad de flujo varía senoidalmente sólo si la intensidad de magnetización **H** (y la fuerza magnetomotriz $\mathcal{F}$) varía de manera senoidal a lo largo de la superficie del entrehierro (véase la figura 3-13).

El método más sencillo de obtener una variación senoidal de la fuerza magnetomotriz a lo largo de la superficie del entrehierro consiste en distribuir las vueltas del devanado que produce la fuerza magnetomotriz en ranuras espaciadas muy cercanas alrededor de la superficie de la máquina y variar el número de conductores en cada ranura de manera senoidal. La figura 3-l4*a*) muestra tal devanado y la figura 3-14*b*) la fuerza magnetomotriz resultante del devanado. El número de conductores en cada ranura se obtiene con la ecuación

$$n_C = N_C \cos \alpha \tag{3-36}$$

donde N_C es el número de conductores en un ángulo de 0°. Como se muestra en la figura 3-14*b*), esta distribución de conductores produce una aproximación muy cercana a una distribución senoidal de fuerza magnetomotriz. Además, cuantas más ranuras haya alrededor de la superficie de la máquina y mientras más cerca estén las unas de las otras, más cercana será la aproximación que se obtenga.

En la práctica no es posible distribuir los devanados exactamente como lo dicta la ecuación (3-36), debido a que hay un número finito de ranuras en una máquina real y a que sólo se pueden incluir números enteros de conductores en cada ranura. La distribución de fuerza magnetomotriz resultante es aproximadamente senoidal y estarán presentes componentes de armónicas de orden superior. Como se explica en el apéndice B.1, se utilizan los devanados de paso fraccionado para suprimir estos componentes de armónicas no deseados.

Además, a menudo conviene que el diseñador de la máquina incluya un número igual de conductores en cada ranura en lugar de variar el número de acuerdo con la ecuación (3-36). En el apén-

FIGURA 3-13 *a*) Rotor cilíndrico con densidad de flujo del entrehierro que varía senoidalmente. *b*) Fuerza magnetomotriz o intensidad de campo magnético como función del ángulo α en el entrehierro. *c*) Densidad de flujo como función del ángulo α en el entrehierro.

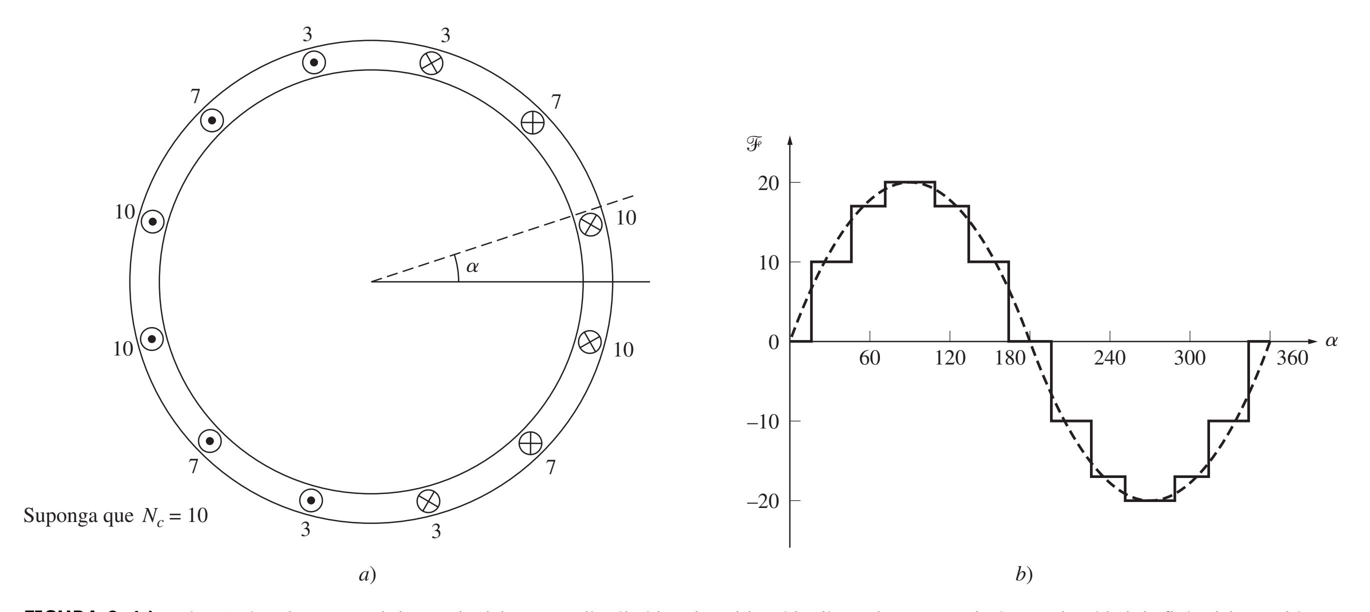


FIGURA 3-14 *a*) Máquina de ca con el devanado del estator distribuido, el cual ha sido diseñado para producir una densidad de flujo del entrehierro que varíe senoidalmente. El número de conductores en cada ranura se indica en el diagrama. *b*) Distribución de fuerza magnetomotriz resultante del devanado, comparada con una distribución ideal.

dice B.2 se describen los devanados de este tipo, cuyos componentes de armónicas de orden superior son mayores que los componentes de los devanados diseñados con base en la ecuación (3-36). Las técnicas de supresión de armónicas del apéndice B.1 son especialmente importantes en este tipo de devanados.

3.4 VOLTAJE INDUCIDO EN MÁQUINAS DE CA

De la misma manera que un conjunto de corrientes trifásicas en un estator puede producir un campo magnético giratorio, un campo magnético giratorio puede producir un conjunto de voltajes trifásicos en las bobinas de un estator. En esta sección se desarrollan las ecuaciones que rigen el voltaje inducido en un estator trifásico. Para facilitar este desarrollo, se comenzará por estudiar una sola bobina de una sola vuelta y los resultados que se obtengan se extenderán a un estator trifásico más general.

Voltaje inducido en la bobina de un estator bipolar

La figura 3-15 muestra un rotor *giratorio* con un campo magnético distribuido senoidalmente en el centro de una bobina *estacionaria*. Nótese que ésta es la situación opuesta a la que se estudió en la sección 3.1, la cual involucraba un campo magnético estacionario con una espira giratoria.

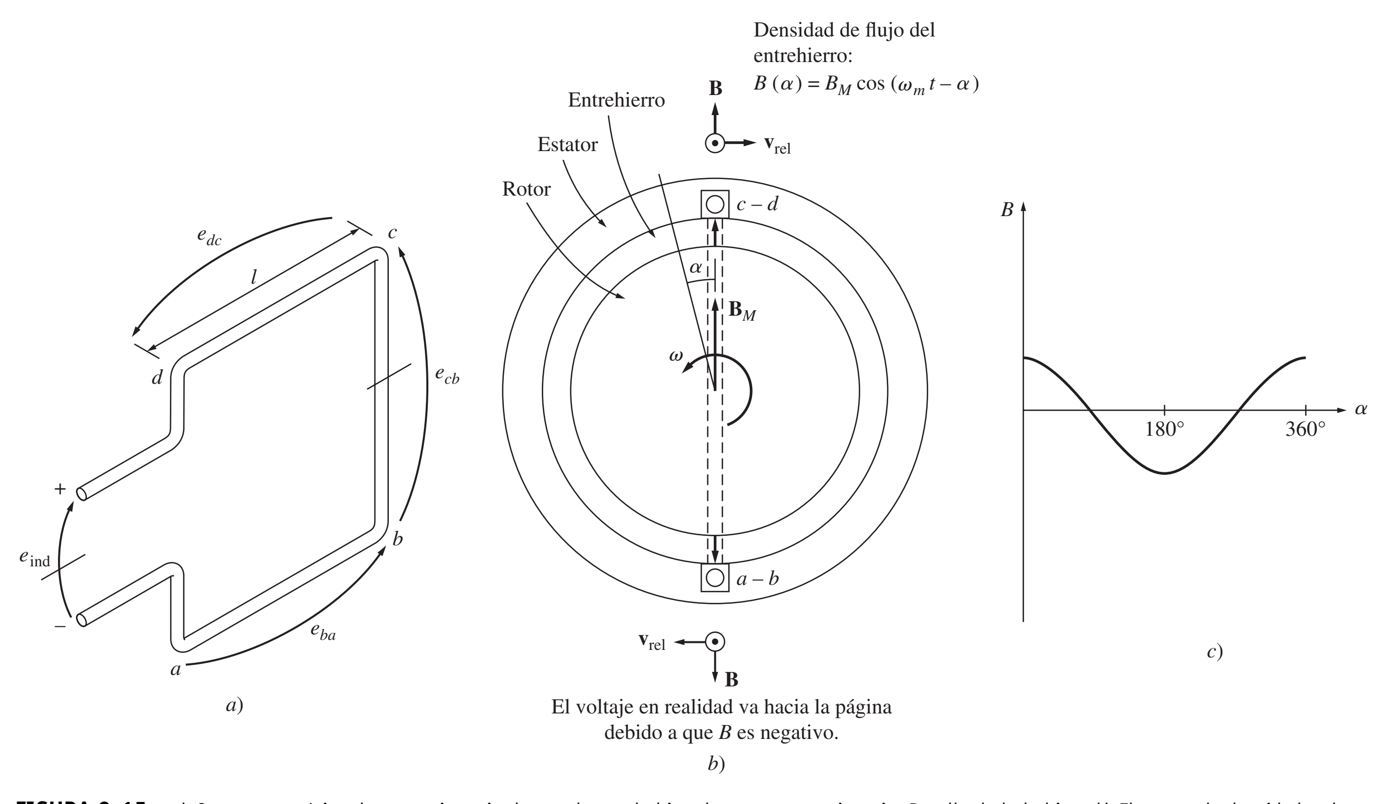


FIGURA 3-15 *a*) Campo magnético de rotor giratorio dentro de una bobina de estator estacionaria. Detalle de la bobina. *b*) El vector de densidades de flujo magnético y velocidades en los lados de la bobina. Las velocidades que se muestran tienen un marco de referencia en el que el campo magnético es estacionario. *c*) La distribución de densidad de flujo en el entrehierro.

Se supondrá que la magnitud del vector de densidad de flujo **B** en el entrehierro entre el rotor y el estator varía senoidalmente con un ángulo mecánico, mientras que la dirección de **B** siempre se dirige de manera radial hacia afuera. Este tipo de distribución de flujo es el ideal al que aspiran los diseñadores de máquinas. (En el apéndice B.2 se describe lo que sucede si no logran el ideal.) Si α es el ángulo medido desde la dirección de la densidad de flujo pico del rotor, entonces la magnitud del vector de densidad de flujo **B** en un punto alrededor del *rotor* es

$$B = B_M \cos \alpha \qquad \textbf{(3-37}\textbf{\textit{a}}\textbf{)}$$

Nótese que en algunos lugares alrededor del entrehierro, el vector de densidad de flujo en realidad apuntará hacia adentro del rotor; en estos lugares el signo de la ecuación (3-37*a*) es negativo. Debido a que el rotor gira dentro del estator con una velocidad angular de ω_m, la magnitud del vector de densidad de flujo **B** en cualquier ángulo α alrededor del *estator* será

$$B = B_M \cos(\omega t - \alpha) \tag{3-37b}$$

La ecuación para obtener el voltaje inducido en un alambre es

$$e = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \bullet \mathbf{l} \tag{1-45}$$

donde

$\mathbf{v}$ = velocidad del alambre *en relación con el campo magnético*
$\mathbf{B}$ = vector de densidad de flujo magnético
$\mathbf{l}$ = longitud del conductor en el campo magnético

Sin embargo, esta ecuación se dedujo para el caso de un *alambre en movimiento* en un *campo magnético estacionario*. Pero para este otro caso, el alambre es estacionario y el campo magnético está en movimiento, por lo que la ecuación no se puede aplicar directamente. Para utilizarla, se debe tener un marco de referencia en donde el campo magnético parezca estacionario. "Situándose" en el campo magnético de manera que el campo parezca estacionario, parecerá que los lados de la bobina tienen una velocidad aparente $\mathbf{v}_{\text{rel}}$ y se puede aplicar la fórmula. La figura 3-15*b*) muestra el vector del campo magnético y las velocidades desde el punto de vista de un campo magnético estacionario y un alambre en movimiento.

El voltaje total inducido en la bobina es la suma de los voltajes inducidos en cada uno de sus cuatro lados. A continuación se determinan estos voltajes:

1. *Segmento ab*. En el segmento *ab*, $\alpha = 180°$. Suponiendo que **B** está dirigido radialmente hacia afuera del rotor, el ángulo entre **v** y **B** en el segmento *ab* es de 90°, mientras que la cantidad $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ sigue la dirección de **l**, por lo que

$$\begin{aligned} e_{ba} &= (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \bullet \mathbf{l} \\ &= vBl \qquad \text{dirigido hacia fuera de la página} \\ &= -v[B_M \cos(\omega_m t - 180°)]l \\ &= -vB_M l \cos(\omega_m t - 180°) \end{aligned} \tag{3-38}$$

donde el signo menos se debe a que el voltaje se acumula con una polaridad opuesta a la polaridad supuesta.

2. *Segmento bc*. El voltaje en el segmento *bc* es cero, debido a que la cantidad vectorial $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ es perpendicular a **l**, por lo que

$$e_{cb} = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \bullet \mathbf{l} = 0 \tag{3-39}$$

3. *Segmento cd*. En el segmento *cd*, el ángulo $\alpha = 0°$. Suponiendo que **B** está dirigida radialmente hacia afuera del rotor, el ángulo entre **v** y **B** en el segmento *cd* es de 90°, mientras que la cantidad $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ sigue la dirección de **l**, por lo que

$$\begin{aligned} e_{dc} &= (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \bullet \mathbf{l} \\ &= vBl \qquad \text{dirigido hacia afuera de la página} \\ &= v(B_M \cos \omega_m t)l \\ &= vB_M l \cos \omega_m t \end{aligned} \tag{3-40}$$

4. *Segmento da*. El voltaje en el segmento *da* es cero, debido a que la cantidad vectorial **v** × **B** es perpendicular a **l**, por lo que

$$e_{ad} = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \bullet \mathbf{l} = 0 \qquad \textbf{(3-41)}$$

Por lo tanto, el voltaje total en la bobina será de

$$\begin{aligned} e_{\text{ind}} &= e_{ba} + e_{dc} \\ &= -vB_M l \cos(\omega_m t - 180°) + vB_M l \cos \omega_m t \end{aligned} \qquad \textbf{(3-42)}$$

Debido a que $\cos \theta = -\cos(\theta - 180°)$,

$$\begin{aligned} e_{\text{ind}} &= vB_M l \cos \omega_m t + vB_M l \cos \omega_m t \\ &= 2vB_M l \cos \omega_m t \end{aligned} \qquad \textbf{(3-43)}$$

Debido a que la velocidad de los conductores de los extremos es $v = r\omega_m$, la ecuación (3-43) se puede escribir como

$$\begin{aligned} e_{\text{ind}} &= 2(r\omega_m)B_M l \cos \omega_m t \\ &= 2rlB_M\omega_m \cos \omega_m t \end{aligned}$$

Por último, el flujo que pasa a través de la bobina se puede expresar como $\phi = 2rlB_m$ (véase problema 3-9), mientras que $\omega_m = \omega_e = \omega$ en un estator bipolar, por lo que el voltaje se puede expresar como

$$e_{\text{ind}} = \phi\omega \cos \omega t \qquad \textbf{(3-44)}$$

La ecuación (3-44) describe el voltaje inducido en una bobina de una sola vuelta. Si la bobina en el estator tiene N_C vueltas de alambre, entonces el voltaje inducido total en ella es

$$e_{\text{ind}} = N_C\phi\omega \cos \omega t \qquad \textbf{(3-45)}$$

Nótese que el voltaje producido en el estator del devanado de esta máquina de ca sencilla es senoidal con una amplitud que depende del flujo ϕ en la máquina, de la velocidad angular ω del rotor y de una constante que depende de la construcción de la máquina (N_C en este caso sencillo). Este resultado es igual al que se obtuvo en el caso de la espira giratoria sencilla en la sección 3.1.

Nótese que la ecuación (3-45) contiene el término cos ωt en lugar del término sen ωt, el cual se encuentra en otras ecuaciones de este capítulo. El término del coseno no tiene ningún significado especial si se compara con el término del seno, sino que es resultado de nuestra elección en cuanto a la dirección de referencia para α en este desarrollo. Si la dirección de referencia de α girara 90°, se hubiera utilizado el término sen ωt.

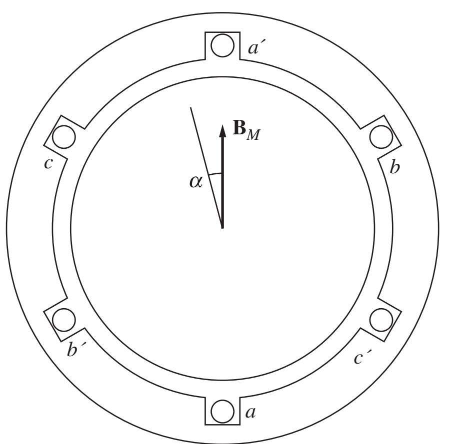


FIGURA 3-16 Producción de voltajes trifásicos con tres bobinas separadas por 120°.

Voltaje inducido en un grupo de bobinas trifásico

Si se colocan *tres bobinas*, cada una con N_C vueltas, alrededor del campo magnético del rotor, como se muestra en la figura 3-16, entonces los voltajes inducidos en cada una de ellas serán iguales en magnitud pero la diferencia de fase será de 120°. Los voltajes resultantes en cada una de estas tres bobinas son

$$e_{aa'}(t) = N_C\,\phi\omega\,\text{sen}\,\omega t \qquad \text{V} \qquad \textbf{(3-46a)}$$

$$e_{bb'}(t) = N_C\,\phi\omega\,\text{sen}\,(\omega t - 120°) \qquad \text{V} \qquad \textbf{(3-46b)}$$

$$e_{cc'}(t) = N_C\,\phi\omega\,\text{sen}\,(\omega t - 240°) \qquad \text{V} \qquad \textbf{(3-46c)}$$

Por lo tanto, un conjunto de bobinas trifásico puede generar un campo magnético giratorio uniforme en el estator de una máquina y un campo magnético giratorio uniforme puede producir un conjunto de voltajes trifásicos en tal estator.

Voltaje RMS en un estator trifásico

El voltaje pico en cualquier fase de un estator trifásico de este tipo es

$$E_{máx} = N_C \phi\omega \tag{3-47}$$

Debido a que $\omega = 2\pi f$, esta ecuación también se puede escribir así

$$E_{máx} = 2\pi N_C \phi f \tag{3-48}$$

Por lo tanto, el voltaje rms en cualquier fase de este estator trifásico es

$$E_A = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} N_C \phi f \tag{3-49}$$

$$E_A = \sqrt{2}\pi N_C \phi f \tag{3-50}$$

El voltaje rms en los *terminales* de la máquina depende de si el estator tiene una conexión en Y o en Δ. Si la máquina tiene una conexión en Y, entonces el voltaje del terminal será $\sqrt{3}$ veces E_A; si la tiene en Δ, entonces el voltaje del terminal será igual a E_A.

EJEMPLO 3-2

Sobre el generador sencillo bipolar de la figura 3-16 se conoce la siguiente información: la densidad de flujo pico del campo magnético del rotor es de 0.2 T; la tasa mecánica de rotación del eje es de 3 600 r/min; el diámetro del estator de la máquina es de 0.5 m; la longitud de su bobina es de 0.3 m y tiene 15 vueltas en cada bobina. La máquina está conectada en Y.

a) ¿Cuáles son los voltajes trifásicos del generador en función del tiempo?
b) ¿Cuál es el voltaje rms de fase del generador?
c) ¿Cuál es el voltaje rms del terminal del generador?

Solución

El flujo en esta máquina está dado por

$$\phi = 2rlB = dlB$$

donde d es el diámetro y l es la longitud de la bobina. Entonces, el flujo en la máquina está dado por

$$\phi = (0.5 \text{ m})(0.3 \text{ m})(0.2 \text{ T}) = 0.03 \text{ Wb}$$

La velocidad del rotor está dada por

$$\omega = (3\,600 \text{ r/min})(2\,\pi \text{ rad})(1 \text{ min}/60 \text{ s}) = 377 \text{ rad/s}$$

a) Las magnitudes de los voltajes de fase pico son

$$\begin{aligned} E_{máx} &= N_C\phi\omega \\ &= (15 \text{ vueltas})(0.03 \text{ Wb})(377 \text{ rad/s}) = 169.7 \text{ V} \end{aligned}$$

y los voltajes trifásicos son

$$\begin{aligned} e_{aa'}(t) &= 169.7 \text{ sen } 377t \quad \text{V} \\ e_{bb'}(t) &= 169.7 \text{ sen } (377t - 120°) \quad \text{V} \\ e_{cc'}(t) &= 169.7 \text{ sen } (377t - 240°) \quad \text{V} \end{aligned}$$

b) Y el voltaje de fase rms del generador es

$$E_A = \frac{E_{máx}}{\sqrt{2}} = \frac{169.7\ \text{V}}{\sqrt{2}} = 120\ \text{V}$$

c) Debido a que el generador está conectado en Y,

$$V_T = \sqrt{3}E_A = \sqrt{3}(120\ \text{V}) = 208\ \text{V}$$

3.5 PAR INDUCIDO EN UNA MÁQUINA DE CA

En las máquinas de ca, bajo condiciones normales de operación, hay dos campos magnéticos: uno por el circuito del rotor y otro por el circuito del estator. La interacción entre estos dos campos magnéticos produce un par en la máquina, de la misma manera que la cercanía de dos imanes permanentes generan un par que los alinea.

La figura 3-17 muestra una máquina de ca simplificada con una distribución senoidal de flujo del estator que tiene su pico en la dirección que apunta hacia arriba y una bobina de alambre simple montada sobre el rotor. La distribución del flujo del estator en esta máquina es

$$B_S(\alpha) = B_S \text{ sen } \alpha \tag{3-51}$$

donde B_S es la magnitud de la densidad de flujo pico; $B_S(\alpha)$ es positivo cuando el vector de densidad de flujo apunta radialmente hacia afuera de la superficie del rotor hacia la superficie del estator. ¿Cuál es el valor del par producido en el rotor de esta máquina de ca simplificada? Para encontrar la respuesta se deben analizar la fuerza y el par en cada uno de los conductores por separado.

La fuerza inducida en el conductor 1 es

$$\mathbf{F} = i(\mathbf{l} \times \mathbf{B}) \tag{1-43}$$

$$= ilB_S \text{ sen } \alpha \qquad \text{en el sentido que se muestra}$$

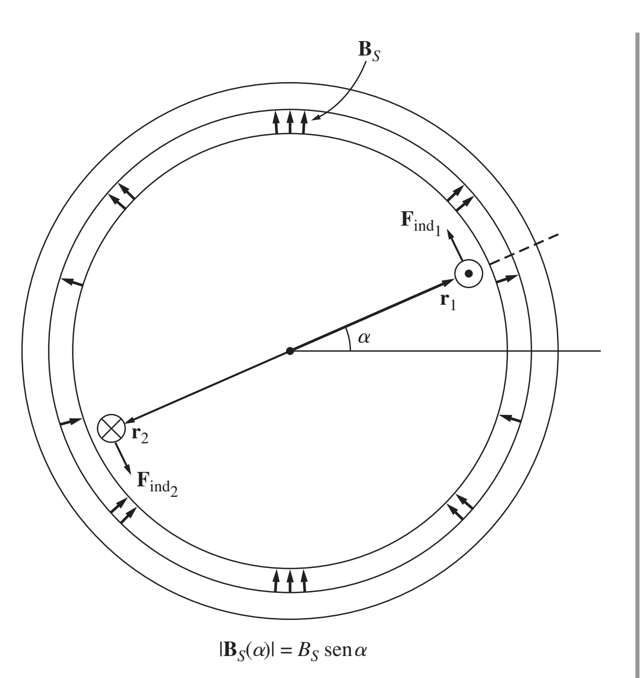


FIGURA 3-17 Máquina de ca simplificada con una distribución de flujo del estator senoidal y una sola bobina de alambre montada en el rotor.

El par en el conductor es

$$\tau_{\text{ind},1} = (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$$

$$= rilB_S \text{ sen } \alpha \qquad \text{en sentido contrario a las manecillas del reloj}$$

La fuerza inducida en el conductor 2 es

$$\mathbf{F} = i(\mathbf{l} \times \mathbf{B}) \tag{1-43}$$

$$= ilB_S \text{ sen } \alpha \qquad \text{en el sentido que se muestra}$$

El par en el conductor es

$$\tau_{\text{ind},1} = (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$$

$$= rilB_S \text{ sen } \alpha \qquad \text{en sentido contrario a las manecillas del reloj}$$

Por lo tanto, el par en la espira del rotor es

$$\tau_{\text{ind}} = 2rilB_S \text{ sen } \alpha \qquad \text{en sentido contrario a las manecillas del reloj} \tag{3-52}$$

La ecuación (3-52) se puede expresar de manera más conveniente si se examina la figura 3-18 y se resaltan dos aspectos:

1. La corriente i que fluye en la bobina del rotor produce su propio campo magnético. La dirección del pico de este campo magnético se obtiene por medio de la regla de la mano derecha y la magnitud de su intensidad de magnetización $\mathbf{H}_R$ es directamente proporcional a la corriente que fluye en el rotor:

$$H_R = Ci \tag{3-53}$$

donde C es una constante de proporcionalidad.

2. El ángulo entre el pico de la densidad de flujo del estator $\mathbf{B}_S$ y el pico de la intensidad de magnetización del rotor $\mathbf{H}_R$ es γ. Además,

$$\gamma = 180° - \alpha \tag{3-54}$$

$$\text{sen } \gamma = \text{sen } (180° - \alpha) = \text{sen } \alpha \tag{3-55}$$

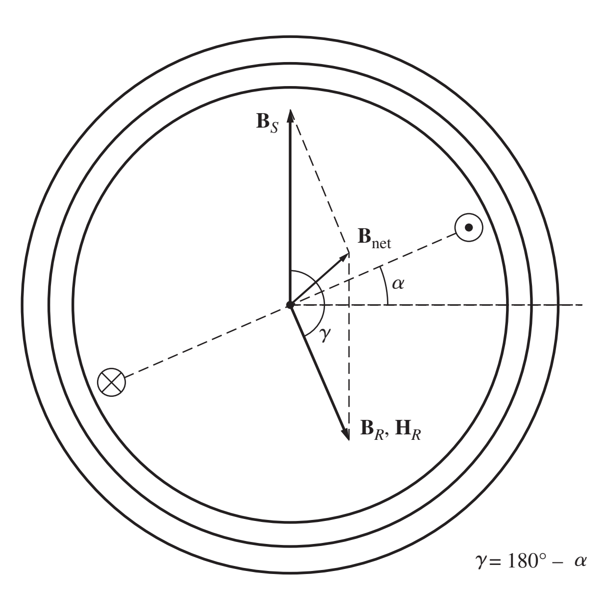


FIGURA 3-18 Los componentes de densidad de flujo magnético dentro de la máquina de la figura 3-17.

Al combinar estas dos observaciones, el par en la espira se puede expresar como

$$\tau_{\text{ind}} = KH_RB_S \text{ sen } \alpha \qquad \text{en sentido contrario a las manecillas del reloj} \tag{3-56}$$

donde K es una constante que depende de la construcción de la máquina. Nótese que tanto la magnitud como la dirección del par se pueden expresar por medio de la ecuación

$$\tau_{\text{ind}} = K\, \mathbf{H}_R \times \mathbf{B}_S \tag{3-57}$$

Por último, debido a que $B_R = \mu H_R$, esta ecuación también se puede expresar como

$$\tau_{\text{ind}} = k\mathbf{B}_R \times \mathbf{B}_S \tag{3-58}$$

donde $k = K/\mu$. Nótese que en general k no será constante debido a que la permeabilidad magnética μ varía de acuerdo con la cantidad de saturación magnética en la máquina.

La ecuación (3-58) es igual a la ecuación (3-20) que se dedujo para el caso de una espira sencilla en un campo magnético uniforme. Se puede aplicar a una máquina de ca y no sólo al rotor sencillo de una sola espira que se describió. Únicamente la constante k diferirá de una máquina a otra. Esta ecuación sólo se utilizará para el estudio *cualitativo* del par en las máquinas de ca, por lo que el valor real de k no tiene importancia en este caso.

El campo magnético neto en esta máquina es la suma vectorial de los campos del rotor y del estator (si no hay saturación):

$$\mathbf{B}_{\text{net}} = \mathbf{B}_R + \mathbf{B}_S \tag{3-59}$$

Este hecho se puede utilizar para producir una expresión equivalente (y a menudo más útil) del par inducido en la máquina. De la ecuación (3-58)

$$\tau_{\text{ind}} = k\mathbf{B}_R \times \mathbf{B}_S \tag{3-58}$$

Pero, de la ecuación (3-59), $\mathbf{B}_S = \mathbf{B}_{\text{net}} - \mathbf{B}_R$, por lo que

$$\begin{aligned}\tau_{\text{ind}} &= k\mathbf{B}_R \times (\mathbf{B}_{\text{net}} - \mathbf{B}_R)\\ &= k(\mathbf{B}_R \times \mathbf{B}_{\text{net}}) - k(\mathbf{B}_R \times \mathbf{B}_R)\end{aligned}$$

Debido a que el producto cruz de cualquier vector consigo mismo es cero, esta ecuación se reduce a

$$\tau_{\text{ind}} = k\mathbf{B}_R \times \mathbf{B}_{\text{net}} \tag{3-60}$$

por lo que el par inducido también se puede expresar como el producto cruz de $\mathbf{B}_R$ y $\mathbf{B}_{\text{net}}$ con la misma constante k. La magnitud de esta expresión es

$$\tau_{\text{ind}} = kB_R B_{\text{net}} \operatorname{sen} \delta \tag{3-61}$$

donde δ es el ángulo entre $\mathbf{B}_R$ y $\mathbf{B}_{\text{net}}$.

Las ecuaciones (3-58) y (3-61) se utilizarán para desarrollar la comprensión cualitativa del par en las máquinas de ca. Por ejemplo, observando la máquina síncrona simple de la figura 3-19, en la cual los campos magnéticos giran en sentido contrario a las manecillas del reloj. ¿Cuál es la dirección del par sobre el eje del rotor de la máquina? Si se aplica la regla de la mano derecha a la ecuación (3-58) o (3-60), se encuentra que el par inducido tiene la dirección de las manecillas del reloj o la dirección opuesta a la rotación del rotor. Por lo tanto, esta máquina debe estar actuando como un generador.

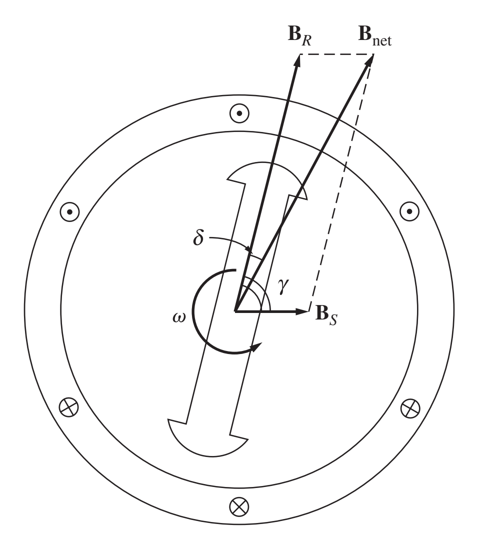


FIGURA 3-19 Máquina síncrona simplificada que muestra los campos magnéticos de su rotor y de su estator.

3.6 AISLAMIENTO DEL DEVANADO EN UNA MÁQUINA DE CA

Una de las etapas más críticas del diseño de máquinas de ca es el aislamiento de sus devanados. Si falla el aislamiento de un motor o generador, la máquina entra en cortocircuito. Una reparación de este tipo es muy costosa, si es que es posible. Para prevenir la falla del aislamiento del devanado por sobrecalentamiento es necesario limitar la temperatura en los devanados. Esto se puede lograr parcialmente mediante la circulación de aire frío sobre los devanados, pero a fin de cuentas la temperatura máxima del devanado limita la potencia máxima que la máquina puede suministrar de manera continua.

El aislamiento raras veces falla como consecuencia inmediata de una temperatura crítica. En cambio, el incremento de temperatura produce un deterioro gradual del aislamiento, haciéndolo susceptible de fallar por otras causas como golpes, vibraciones o fatiga eléctrica. Una vieja regla práctica dice que la esperanza de vida de un motor con determinado tipo de aislamiento se reduce a la mitad por cada 10% de aumento de temperatura sobre la temperatura nominal del devanado. Hasta cierto punto, esta regla aún es válida.

En Estados Unidos, para establecer un estándar de los límites de temperatura del aislamiento de la máquina, la National Electrical Manufacturers Association (NEMA) definió una serie de *clases de sistemas de aislamiento*. Cada una de ellas especifica el aumento de temperatura máximo para esa clase de aislamiento. Hay tres clases comunes de aislamiento de NEMA para motores de ca de caballaje entero B, F y H. Cada una de ellas representa una temperatura permisible en el devanado más alta que la clase anterior. Por ejemplo, el aumento de temperatura en el devanado del inducido a temperatura ambiente de un tipo de motor de inducción de ca que opera continuamente debe estar limitado a 80°C para el aislamiento clase B, a 105°C para clase F y a 125°C para clase H.

El efecto de la temperatura de operación en la vida del aislamiento de una máquina regular puede ser realmente perjudicial. En la figura 3-20 se observa (para varias clases de aislamiento) una curva típica de la vida promedio de una máquina en miles de horas contra la temperatura de los devanados.

Las especificaciones de temperaturas particulares para cada tipo de motores y generadores de ca se muestran con detalle en la norma NEMA Standard MG1-1993, *Motors and Generators*. La International Electrotechnical Commission (IEC) ha definido varias normas similares, así como también lo han hecho varias organizaciones de regulación nacional en otros países.

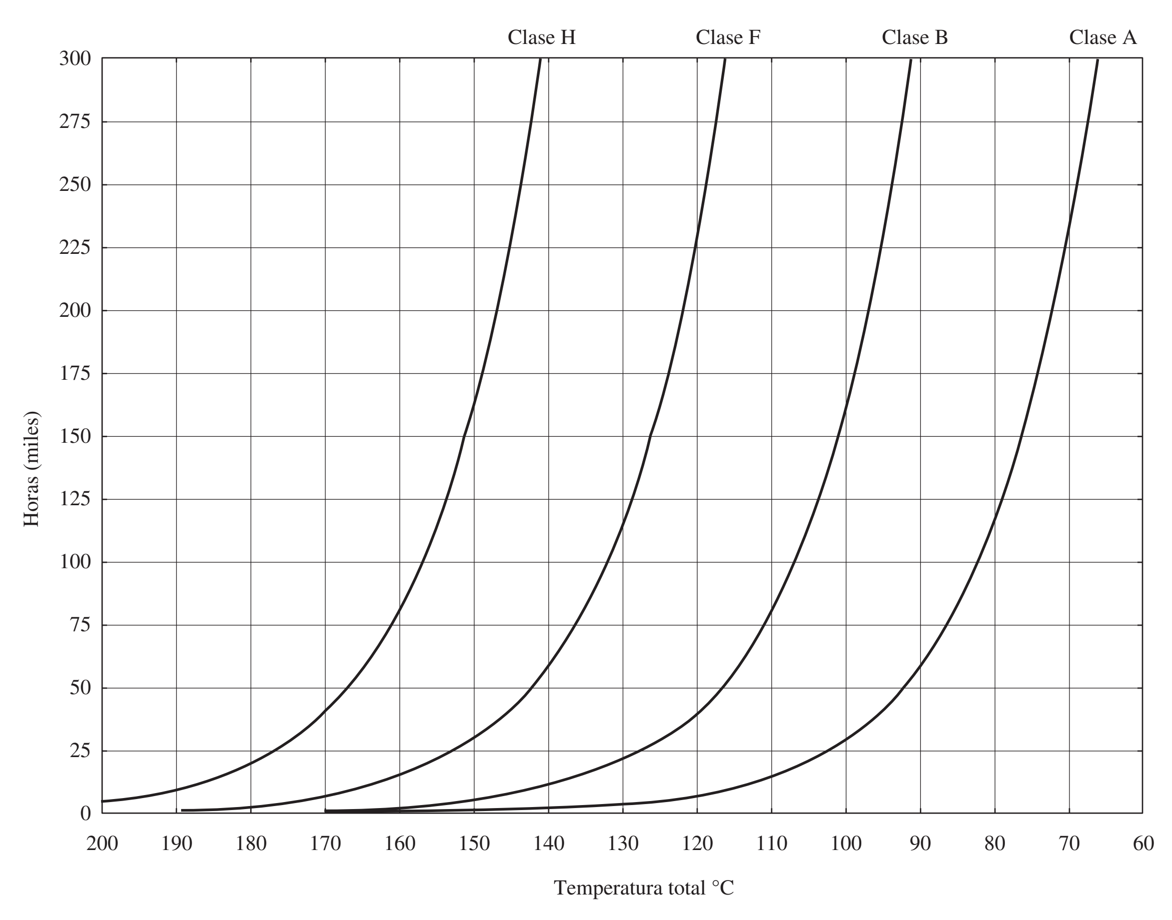


FIGURA 3-20 Gráfica de la vida promedio del aislamiento contra la temperatura del devanado de varias clases de aislamiento. (*Cortesía de Marathon Electric Company*.)

3.7 FLUJO DE POTENCIA Y PÉRDIDAS EN MÁQUINAS DE CA

Los generadores de ca toman potencia mecánica y producen potencia eléctrica, mientras que los motores de ca toman potencia eléctrica y producen potencia mecánica. En ambos casos, no toda la potencia de entrada a las máquinas se transforma en forma útil en el otro extremo; *siempre* hay pérdidas asociadas con el proceso.

La eficiencia de una máquina de ca se define por medio de la ecuación

$$\eta = \frac{P_{\text{sal}}}{P_{\text{entr}}} \times 100\% \tag{3-62}$$

La diferencia entre la potencia de entrada y la potencia de salida de una máquina son las pérdidas que se presentan dentro de ella. Por lo tanto,

$$\eta = \frac{P_{\text{entr}} - P_{\text{pérd}}}{P_{\text{entr}}} \times 100\% \tag{3-63}$$

Pérdidas en máquinas de ca

Las pérdidas que se presentan en las máquinas de ca se pueden dividir en cuatro categorías básicas:

1. Pérdidas eléctricas o pérdidas en el cobre (pérdidas I^2R).
2. Pérdidas en el núcleo.

3. Pérdidas mecánicas.
4. Pérdidas dispersas o adicionales.

PÉRDIDAS ELÉCTRICAS O PÉRDIDAS EN EL COBRE Las pérdidas en el cobre son producidas por el calentamiento resistivo que se presenta en los devanados del estator (inducido) y del rotor (campo) de la máquina. Las pérdidas de cobre en el estator (PCE) en una máquina de ca trifásica están dadas por la ecuación

$$P_{\text{PCE}} = 3I_A^2 R_A \tag{3-64}$$

donde I_A es la corriente que fluye en cada fase del inducido y R_A es la resistencia de cada fase del inducido.

Las pérdidas de cobre en el rotor (PCR) de una máquina de ca síncrona (las máquinas de inducción se estudiarán por separado en el capítulo 6) están dadas por

$$P_{\text{PCR}} = I_F^2 R_F \tag{3-65}$$

donde I_F es la corriente que fluye en el devanado de campo en el rotor y R_F es la resistencia del devanado de campo. Normalmente, la resistencia que se utiliza en estos cálculos es la resistencia del devanado a una temperatura normal de operación.

PÉRDIDAS EN EL NÚCLEO Las pérdidas en el núcleo son las pérdidas por histéresis y por corrientes parásitas que se presentan en el material magnético del motor. Estas pérdidas, que se describieron en el capítulo 1, varían conforme al cuadrado de la densidad de flujo (B^2) y, en el estator, conforme a la 1.5ava potencia de la velocidad de rotación de los campos magnéticos ($n^{1.5}$).

PÉRDIDAS MECÁNICAS Las pérdidas mecánicas en una máquina de ca son las pérdidas asociadas con los efectos mecánicos. Hay dos tipos básicos de pérdidas mecánicas: *fricción* y *rozamiento con el aire*. Las pérdidas por fricción son causadas por la fricción en los cojinetes de las máquinas, mientras que las pérdidas por rozamiento con el aire son causadas por la fricción entre las partes móviles de la máquina y el aire dentro de la caja del motor. Estas pérdidas varían conforme al cubo de la velocidad de rotación de la máquina.

A menudo, las pérdidas mecánicas y las pérdidas en el núcleo de una máquina se agrupan bajo el nombre de *pérdidas rotacionales* sin carga de la máquina. En vacío toda la potencia de entrada se debe utilizar para superar estas pérdidas. Por lo tanto, la medida de la potencia de entrada al estator de una máquina de ca que actúa como motor en vacío representa el valor aproximado de estas pérdidas.

PÉRDIDAS DISPERSAS (O PÉRDIDAS MISCELÁNEAS) Las pérdidas dispersas son aquellas que no se pueden ubicar en ninguna de las categorías anteriores. Sin importar qué tanta precisión se tenga para considerar las pérdidas, siempre hay algunas que se escapan de las categorías anteriores. Todas estas pérdidas se agrupan en las pérdidas dispersas. Convencionalmente, en la mayoría de las máquinas, las pérdidas dispersas se toman como 1% de la plena carga.

Diagrama de flujo de potencia

Una de las técnicas más convenientes para considerar las pérdidas de potencia en una máquina es el *diagrama de flujo de potencia*. En la figura 3-21*a*) se muestra el diagrama de flujo de potencia de un generador de ca. En esta figura se suministra potencia mecánica a la máquina y luego se restan las pérdidas dispersas, las pérdidas mecánicas y las pérdidas en el núcleo. Una vez que se han restado estas pérdidas, en situaciones ideales, la potencia restante se convierte de potencia mecánica a eléctrica en el punto llamado P_{conv}. La potencia mecánica que se convierte es igual a

$$P_{\text{conv}} = \tau_{\text{ind}}\omega_m \tag{3-66}$$

y se produce la misma cantidad de potencia eléctrica. Sin embargo, ésta no es la potencia que está presente en los terminales de la máquina. Antes de llegar a los terminales, se deben restar las pérdidas eléctricas I^2R.

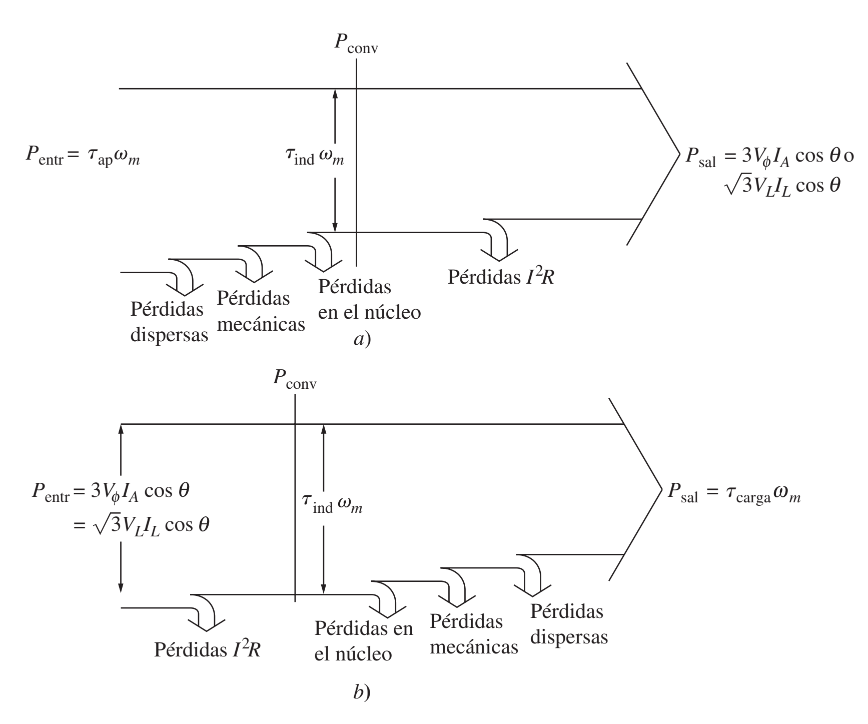


FIGURA 3-21 *a*) Diagrama de flujo de potencia de un generador de ca trifásico. *b*) Diagrama de flujo de potencia de un motor de ca trifásico.

En el caso de los motores de ca, este diagrama de flujo de potencia simplemente se invierte. En la figura 3-21*b*) se muestra el diagrama de flujo de potencia de un motor.

En los siguientes tres capítulos se plantearán ejercicios de ejemplo con cálculos de eficiencia para motores y generadores de ca.

3.8 REGULACIÓN DE VOLTAJE Y REGULACIÓN DE VELOCIDAD

A menudo los generadores se comparan entre sí mediante una cifra o factor de mérito llamada *regulación de voltaje*. La regulación de voltaje (VR, por sus siglas en inglés) es una medida de la habilidad del generador para mantener un voltaje constante en sus terminales cuando la carga varía. Se define con la ecuación

$$\text{VR} = \frac{V_{sc} - V_{pc}}{V_{pc}} \times 100\% \tag{3-67}$$

donde V_{sc} es el voltaje de vacío (sin carga) en los terminales del generador y V_{pc} es el voltaje a plena carga en los terminales del generador. Es una medida aproximada de la forma de la característica de voltaje-corriente del generador; una regulación de voltaje positiva significa una característica descendente, una regulación de voltaje negativa significa una característica ascendente. Una VR pequeña es "mejor" en el sentido de que el voltaje en los terminales del generador será más constante ante las variaciones en la carga.

De manera similar, los motores se comparan entre sí mediante una cifra o factor de mérito llamada *regulación de velocidad*. La regulación de velocidad (SR, por sus siglas en inglés) es la

medida de la capacidad de un motor para mantener constante la velocidad del eje cuando varía la carga. Se define con la ecuación

$$SR = \frac{n_{sc} - n_{pc}}{n_{pc}} \times 100\% \qquad \textbf{(3-68)}$$

o

$$SR = \frac{\omega_{sc} - \omega_{pc}}{\omega_{pc}} \times 100\% \qquad \textbf{(3-69)}$$

Es una medida aproximada de la forma de la característica par-velocidad de un motor; una regulación de velocidad positiva significa que la velocidad del motor cae cuando se incrementa la carga, mientras que una regulación de velocidad negativa significa que la velocidad del motor se incrementa cuando disminuye la carga. La magnitud de la regulación de velocidad dicta aproximadamente la inclinación de la pendiente de la curva de par-velocidad.

3.9 RESUMEN

Hay dos tipos principales de máquinas de ca: síncronas y de inducción. La principal diferencia entre los dos tipos es que las máquinas síncronas requieren que se les suministre una corriente de campo de cd a sus rotores, mientras que las máquinas de inducción (también llamadas máquinas asíncronas) inducen una corriente de campo a sus rotores por medio de una acción transformadora. Estas máquinas se estudiarán con detalle en los siguientes tres capítulos.

Si se suministra un sistema de corrientes trifásico a un sistema de tres bobinas espaciadas 120 grados eléctricos en un estator se producirá un campo magnético giratorio uniforme dentro del estator. La *dirección de rotación* del campo magnético se puede *invertir* simplemente conmutando las conexiones de dos de las tres fases. De manera inversa, un campo magnético giratorio producirá un conjunto de voltajes trifásicos dentro del grupo de bobinas.

En los estatores con más de dos polos, una rotación mecánica completa de los campos magnéticos produce más de un ciclo eléctrico completo. En tal estator, una rotación mecánica produce $P/2$ ciclos eléctricos. Por lo tanto, el ángulo eléctrico de los voltajes y corrientes en una máquina así está relacionado con el ángulo mecánico de los campos magnéticos por medio de

$$\theta_e = \frac{P}{2}\theta_m$$

La relación entre la frecuencia eléctrica del estator y la tasa mecánica de rotación de los campos magnéticos es

$$f_e = \frac{n_m P}{120}$$

Los tipos de pérdidas que se presentan en las máquinas de ca son las pérdidas eléctricas o en el cobre (pérdidas I^2R), pérdidas en el núcleo, pérdidas mecánicas y pérdidas dispersas. Cada una de ellas se describe en el capítulo junto con la definición de eficiencia general de la máquina. Por último, la regulación de voltaje en un generador se define como

$$VR = \frac{V_{sc} - V_{pc}}{V_{pc}} \times 100\%$$

y la regulación de voltaje en un motor se define como

$$SR = \frac{n_{sc} - n_{pc}}{n_{pc}} \times 100\%$$

PREGUNTAS

3-1. ¿Cuál es la principal diferencia entre una máquina síncrona y una máquina de inducción?

3-2. ¿Por qué la conmutación del flujo de corriente en dos fases invierte la dirección de rotación del campo magnético del estator?

3-3. ¿Cuál es la relación entre la frecuencia eléctrica y la velocidad del campo magnético en una máquina de ca?

3-4. ¿Cuál es la ecuación que define el par inducido en una máquina de ca?

PROBLEMAS

3-1. La espira sencilla que gira en un campo magnético, la cual puede observarse en la figura 3-1, tiene las siguientes características:

$\mathbf{B} = 0.5$ T a la derecha $r = 0.1$ m

$l = 0.3$ m $\omega = 103$ rad/s

a) Calcule el voltaje $e_{\text{tot}}(t)$ inducido en esta espira giratoria.
b) ¿Cuál es la frecuencia del voltaje que se produce en esta espira?
c) Suponga que se conecta un resistor de 10 Ω como carga a través de los terminales de la espira. Calcule la corriente que fluirá a través del resistor.
d) Calcule la magnitud y dirección del par inducido en la espira bajo las condiciones del inciso *c*).
e) Calcule la potencia eléctrica generada por la espira bajo las condiciones del inciso *c*).
f) Calcule la potencia mecánica que consume la espira bajo las condiciones del inciso *c*). Compare este resultado con la cantidad de potencia eléctrica generada por la espira.

3-2. Elabore una tabla que muestre la velocidad de rotación del campo magnético en las máquinas de ca de 2, 4, 6, 8, 10, 12 y 14 polos que operan a frecuencias de 50, 60 y 400 Hz.

3-3. El primer sistema de potencia de ca en Estados Unidos operaba a una frecuencia de 133 Hz. Si la potencia de ca para este sistema la produjera un generador de cuatro polos, ¿con qué rapidez tendría que girar el eje del generador?

3.4. Se instala un devanado trifásico, conectado en Y, de cuatro polos en 24 ranuras del estator. Tiene 40 vueltas de alambre en cada ranura de los devanados. Todas las bobinas en cada fase están conectadas en serie. El flujo por polo en la máquina es de 0.060 Wb y la velocidad de rotación del campo magnético es de 1 800 r/min.

a) ¿Cuál es la frecuencia del voltaje producido en el devanado?
b) ¿Cuáles son los voltajes resultantes de fase y terminal en el estator?

3-5. Se instala un devanado trifásico, conectado en Δ, de seis polos, en 36 ranuras de un estator. Hay 150 vueltas de alambre en cada ranura de los devanados. Todas las bobinas en cada fase están conectadas en serie. El flujo magnético por polo en la máquina es de 0.060 Wb, y la rapidez de rotación del campo magnético es de 1 000 r/min.

a) ¿Cuál es la frecuencia del voltaje producido en este devanado?
b) ¿Cuáles los voltajes de fase y terminal resultantes de este estator?

3.6. Una máquina síncrona trifásica de dos polos conectada en Y de 60 Hz tiene un estator con 5 000 vueltas de alambre en cada fase. ¿Qué flujo se requiere en el rotor para producir un voltaje (línea-línea) de 13.2 kV en sus terminales?

3-7. Modifique el problema de MATLAB del ejemplo 3-1 conmutando las corrientes que fluyen en dos de las fases. ¿Qué ocurre con el campo magnético neto resultante?

3-8. Si una máquina de ca tiene los campos magnéticos del rotor y del estator que se muestran en la figura P3-1, ¿cuál es la dirección del par inducido en la máquina? ¿La máquina actúa como motor o como generador?

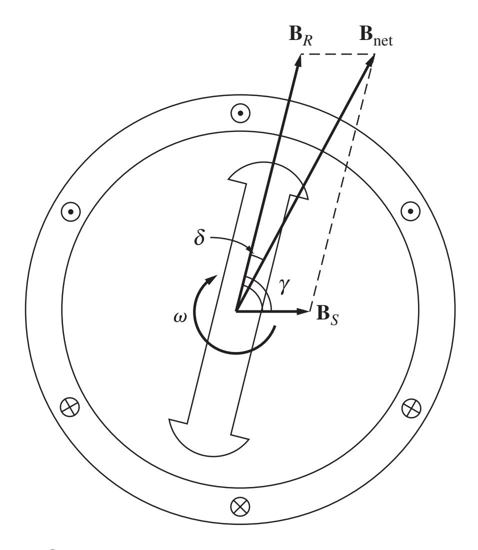


FIGURA P3-1 Máquina de ca del problema 3-8.

3-9. La distribución de densidad de flujo sobre la superficie de un estator bipolar de radio r y longitud l está dada por

$$B = B_M \cos(\omega_m t - \alpha) \tag{3-37b}$$

Demuestre que el flujo total bajo cada cara polar es

$$\phi = 2rlB_M$$

3-10. En las primeras etapas de desarrollo de los motores de ca, los diseñadores de las máquinas tenían muchas dificultades para controlar las pérdidas en el núcleo (por histéresis y por corrientes parásitas). No se habían desarrollado los aceros con baja histéresis y no se producían láminas tan delgadas como las que se usan ahora. Para ayudar a controlar estas pérdidas, los primeros motores de ca en Estados Unidos tenían una fuente de potencia de 25 Hz, mientras que los sistemas

de alumbrado tenían una fuente de potencia separada de 60 Hz.

a) Elabore una tabla que muestre la velocidad de rotación del campo magnético en las máquinas de ca de 2, 4, 6, 8, 10, 12 y 14 polos que operan a 25 Hz. ¿Cuál era la mayor velocidad de rotación disponible en esos primeros motores?
b) En un motor dado que opera con una densidad de flujo constante *B*, ¿cómo se comparan las pérdidas en el núcleo del motor que opera a 25 Hz con las pérdidas en el núcleo de un motor que opera a 60 Hz?
c) ¿Por qué los ingenieros de las primeras máquinas suministraron un sistema de potencia separado de 60 Hz para el alumbrado?

3-11. En años recientes mejoraron los motores y se pueden operar directamente con un suministro de potencia de 60 Hz. Como resultado, los sistemas de potencia de suministro de 25 Hz se redujeron y desaparecieron. Sin embargo, había muchos motores de 25 Hz en perfecto estado en fábricas en todo Estados Unidos, y sus dueños no estaban dispuestos a descartarlos. Para mantenerlos en operación, algunos usuarios crearon su propio suministro de 25 Hz en la planta usando *conjuntos motor-generadores*. Un conjunto motor-generador consiste en dos máquinas conectadas con un eje común. Una de ellas actúa como motor y la otra como generador. Si las dos máquinas tienen diferentes números de polos pero exactamente la misma rapidez de giro del eje, entonces la frecuencia eléctrica de las dos máquinas será diferente debido a la ecuación (3-34). ¿Qué combinación de polos en las dos máquinas podría convertir un suministro de 60 Hz en uno de 25 Hz?

$$f_e = \frac{n_m P}{120} \qquad \textbf{(3-34)}$$

BIBLIOGRAFÍA

1. Del Toro, Vincent, *Electric Machines and Power Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1985.
2. Fitzgerald, A.E. y Charles Kingsley, *Electric Machinery*, McGraw-Hill, Nueva York, 1952.
3. Fitzgerald, A.E., Charles Kingsley y S.D. Umans, *Electric Machinery*, 5a. ed., McGraw-Hill, Nueva York, 1990.
4. International Electrotechnical Commission, *Rotating Electrical Machines Part 1: Rating and Performance*, IEC 33-1 (R 1994), 1994.
5. Liwschitz-Garik, Michael y Clyde Whipple, *Alternating-Current Machinery*, Van Nostrand, Princeton, N.J., 1961.
6. McPherson, George, *An Introduction to Electrical Machines and Transformers*, Wiley, Nueva York, 1981.
7. National Electrical Manufacturers Association, *Motors and Generators*, Publication MG1-1993, Washington, D.C., 1993.
8. Werninck, E.H. (ed.), *Electric Motor Handbook*, McGraw-Hill Book Company, Londres, 1978.

CAPÍTULO

4 Generadores síncronos

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

- Entender el circuito equivalente de un generador síncrono.
- Poder trazar diagramas fasoriales para un generador síncrono.
- Conocer las ecuaciones de potencia y par de un generador síncrono.
- Saber cómo deducir las características de una máquina síncrona a partir de mediciones (Características de Circuito Abierto, OCC, y Características de Corto Circuito, SCC).
- Entender cómo el voltaje terminal varía con la carga en un generador síncrono que opera solo. Poder calcular el voltaje terminal en varias condiciones de carga.
- Comprender las condiciones necesarias para poner en paralelo dos o más generadores síncronos.
- Entender el procedimiento para poner en paralelo generadores síncronos.
- Comprender la operación de generadores síncronos en paralelo con un sistema de potencia muy grande (o bus infinito).
- Entender el límite de estabilidad estática de un generador síncrono, y por qué el límite de estabilidad transitoria es menor que el límite de estabilidad estática.
- Comprender las corrientes transitorias que fluyen en condiciones de falla (cortocircuito).
- Entender valores nominales síncronos y qué condición limita cada uno de ellos.

Los *generadores síncronos* o *alternadores* son máquinas síncronas que se utilizan para convertir potencia mecánica en potencia eléctrica de ca. En este capítulo se estudia la operación de los generadores síncronos, tanto cuando operan solos como cuando lo hacen junto con otros generadores.

4.1 CONSTRUCCIÓN DE GENERADORES SÍNCRONOS

En un generador síncrono se produce un campo magnético en el rotor ya sea mediante el diseño de éste como un imán permanente o mediante la aplicación de una corriente de cd a su devanado para crear un electroimán. En seguida, el rotor del generador gira mediante un motor primario, y produce un campo magnético giratorio dentro de la máquina. Este campo magnético giratorio induce un conjunto de voltajes trifásicos dentro de los devanados del estator del generador.

Dos términos que por lo general se utilizan para describir los devanados de una máquina son *devanados de campo* y *devanados del inducido*. En general, el primer término se aplica a los devanados que producen el campo magnético principal en la máquina, mientras que el segundo se aplica a los devanados donde se induce el voltaje principal. En las máquinas síncronas, los devanados de campo están en el rotor, por lo que los términos *devanados del rotor* y *devanados de campo* se utilizan indistintamente. De manera similar, los términos *devanados del estator* y *devanados del inducido* se utilizan de manera indistinta.

El rotor de un generador síncrono es en esencia un electroimán grande. Los polos magnéticos del rotor pueden ser tanto salientes como no salientes. El término *saliente* significa proyectado hacia “afuera” o “prominente” y un *polo saliente* es un polo magnético proyectado hacia afuera del eje del rotor. Por otro lado, un *polo no saliente* es un polo magnético construido al mismo nivel de la superficie del rotor. En la figura 4-1 se muestra un rotor de polos no salientes. Observe que los devanados del electroimán están incrustados en muescas sobre la superficie del rotor. En la figura 4-2 se puede ver un rotor de polos salientes. Note que los devanados del electroimán están cubiertos alrededor del polo mismo, en lugar de estar incrustados en muescas sobre la superficie del rotor. Por lo regular, los rotores de polos no salientes se utilizan para rotores de dos o cuatro polos, mientras que los rotores de polos salientes normalmente se usan para rotores con cuatro o más polos.

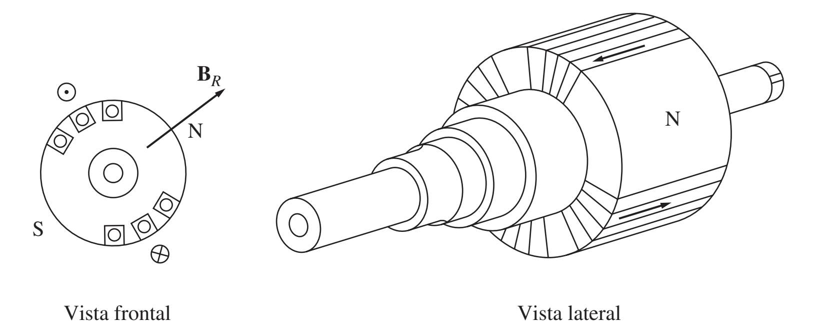


FIGURA 4-1 Rotor de dos polos no salientes de una máquina síncrona.

Debido a que el rotor está sujeto a campos magnéticos variables, se construye con láminas delgadas para reducir las pérdidas por corrientes parásitas.

Se debe suministrar una corriente de cd al circuito de campo del rotor. Puesto que éste gira, se requiere de un arreglo especial para que la potencia de cd llegue a los devanados de campo. Existen dos formas comunes de suministrar esta potencia de cd:

1. Suministrar al rotor la potencia de cd desde una fuente externa de cd por medio de *anillos rozantes* y *escobillas*.
2. Suministrar la potencia de cd desde una fuente de potencia de cd especial montada directamente en el eje del generador síncrono.

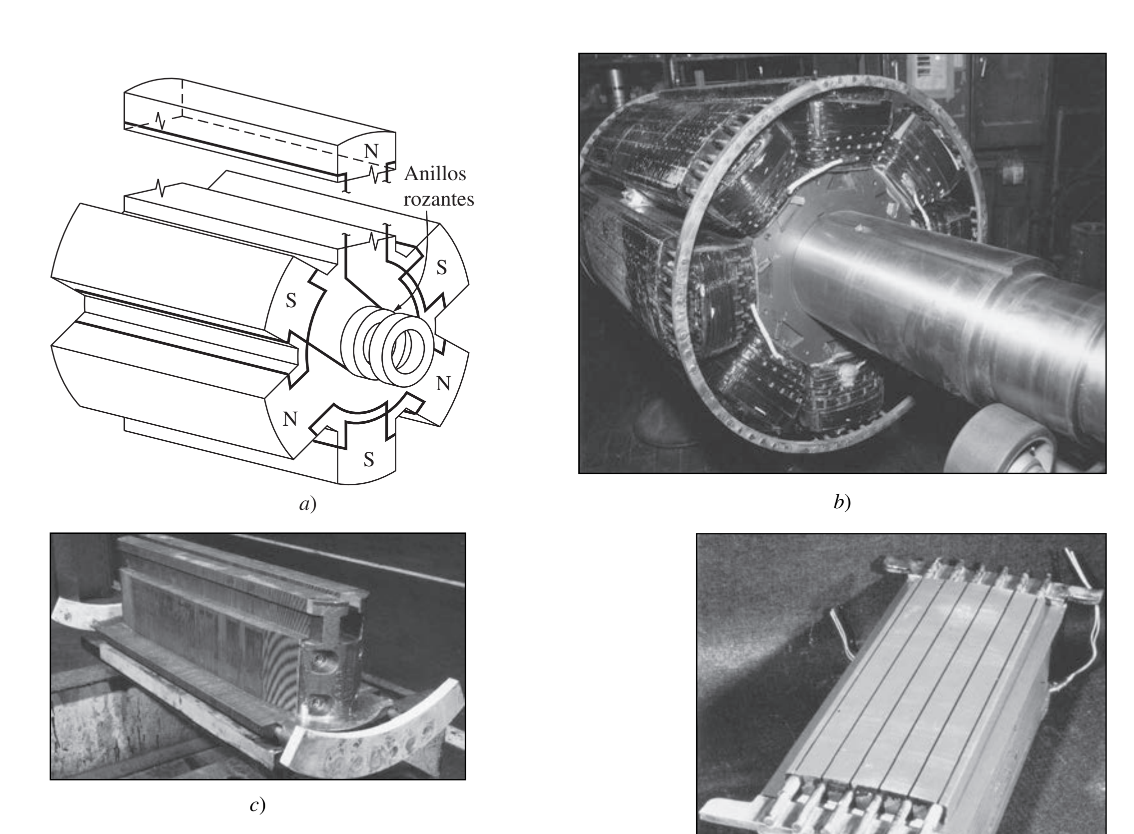


FIGURA 4-2 *a*) Un rotor de seis polos salientes de una máquina síncrona. *b*) Fotografía del rotor de una máquina síncrona con ocho polos salientes que muestra los devanados de los polos del rotor individuales. (*Cortesía de General Electric Company*.) *c*) Fotografía de un solo polo saliente de un rotor sin los devanados de campo instalados. (*Cortesía de General Electric Company*.) *d*) Un solo polo saliente después de que se han instalado los devanados de campo, pero antes de que se monte en el rotor. (*Cortesía de Westinghouse Company*.)

Los anillos rozantes son anillos de metal que circundan por completo al eje de una máquina, pero se encuentran aislados de él. Un extremo del devanado del rotor de cd está unido a cada uno de los dos anillos rozantes del eje de la máquina síncrona y una escobilla estacionaria se desliza sobre cada anillo rozante. Una "escobilla" es un bloque de un compuesto de carbón parecido al grafito que conduce electricidad libremente pero tiene una fricción muy baja, por lo que no desgasta al anillo rozante. Si el extremo positivo de una fuente de voltaje de cd se conecta a una escobilla y el extremo negativo se conecta a la otra, entonces se aplicará el mismo voltaje de cd al devanado de campo en todo momento, sin importar la posición angular o velocidad del rotor.

Los anillos rozantes y las escobillas causan ciertos problemas cuando se utilizan para suministrar potencia de cd a los devanados de campo de una máquina síncrona: incrementan la cantidad de mantenimiento que requiere la máquina debido a que el desgaste de las escobillas debe ser revisado con regularidad. Además, la caída de voltaje en las escobillas puede ser la causa de pérdidas significativas de potencia en las máquinas que tienen corrientes de campo más grandes. A pesar de estos problemas, los anillos rozantes y las escobillas se utilizan en todas las máquinas síncronas pequeñas, ya que no hay otro método para suministrar corriente de campo de cd que sea tan eficiente en términos de costo.

En los generadores y motores más grandes se utilizan *excitadores* o *excitatrices sin escobillas* para suministrar a la máquina corriente de campo de cd. Un excitador sin escobilla es un generador de ca pequeño con un circuito de campo montado en el estator y un circuito de armadura acoplado en el eje del rotor. La salida trifásica del generador excitador se rectifica a corriente directa por medio de un circuito rectificador trifásico (que también está montado en el eje del generador) y luego se alimenta al circuito de campo de cd principal. Por medio del control de la pequeña corriente de campo de cd del generador excitador (localizado en el estator) es posible ajustar la corriente de campo en la máquina principal *sin anillos rozantes ni escobillas*. Este arreglo se muestra esquemáticamente en la figura 4-3 mientras que en la figura 4-4 se observa el rotor de una máquina síncrona con un excitador sin escobilla montado en el mismo eje. Debido a que no se presenta ningún contacto mecánico entre el rotor y el estator, los excitadores sin escobilla requieren mucho menos mantenimiento que los anillos rozantes y las escobillas.

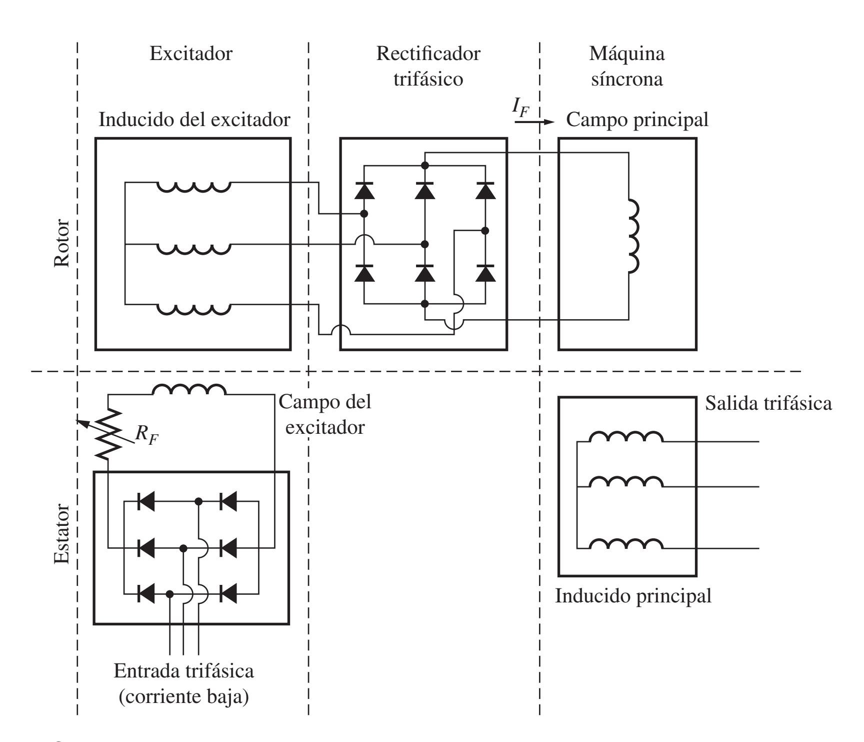


FIGURA 4-3 Circuito de excitador sin escobillas. Se rectifica una pequeña corriente trifásica y se utiliza para suministrar el circuito de campo del excitador que se encuentra en el estator. Entonces se rectifica la salida del circuito del inducido del excitador (en el rotor) y se utiliza para suministrar la corriente de campo de la máquina principal.

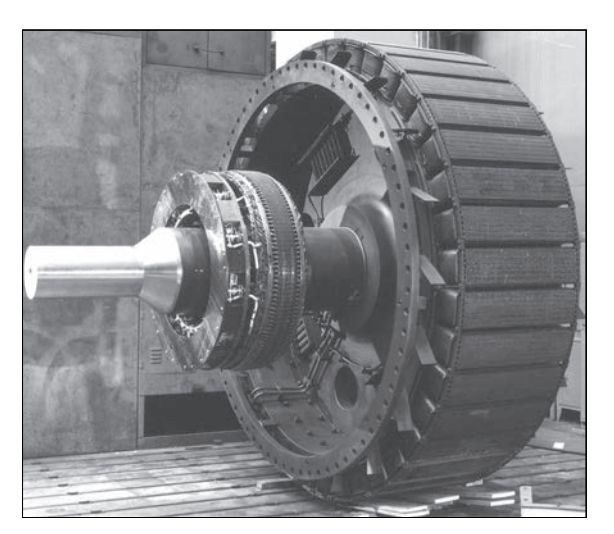


FIGURA 4-4 Fotografía del rotor de una máquina síncrona con un excitador sin escobillas montado en el mismo eje. Obsérvese la parte electrónica de rectificación visible junto al inducido del excitador. (*Cortesía de Westinghouse Electric Company*.)

Para que la excitación de un generador sea *completamente* independiente de cualquier fuente de potencia externa, a menudo se incluye un pequeño excitador piloto en el sistema. Un *excitador piloto* es un pequeño generador de ca con *imanes permanentes* montados en el eje del rotor y un devanado trifásico en el estator. Produce la potencia para el circuito de campo del excitador, que a su vez controla el circuito de campo de la máquina principal. Si se incluye un excitador piloto en el eje del generador, *no se requiere de potencia eléctrica externa* para accionar el generador (véase figura 4-5).

Muchos de los generadores síncronos que incluyen excitadores sin escobillas también tienen anillos rozantes y escobillas, por lo que hay una fuente auxiliar de corriente de campo de cd en caso de emergencia.

El estator de un generador síncrono ya se describió en el capítulo 3 y se pueden encontrar más detalles sobre la construcción de un estator en el apéndice B. Por lo general, los estatores de los generadores síncronos están hechos de bobinas de estator preformadas en un devanado de doble capa. El devanado se distribuye y encuerda de manera que se reduzca el contenido de armónicas en las corrientes y voltajes de salida, tal como se describe en el apéndice B.

En la figura 4-6 puede observarse un diagrama en corte de una gran máquina síncrona completa. Este dibujo muestra un rotor de ocho polos salientes, un estator con devanados de doble capa distribuidos y un excitador sin escobillas.

4.2 LA VELOCIDAD DE ROTACIÓN DE UN GENERADOR SÍNCRONO

Los generadores síncronos son por definición *síncronos*, lo que quiere decir que la frecuencia eléctrica se produce y entrelaza o sincroniza con la tasa mecánica de rotación del generador. El rotor

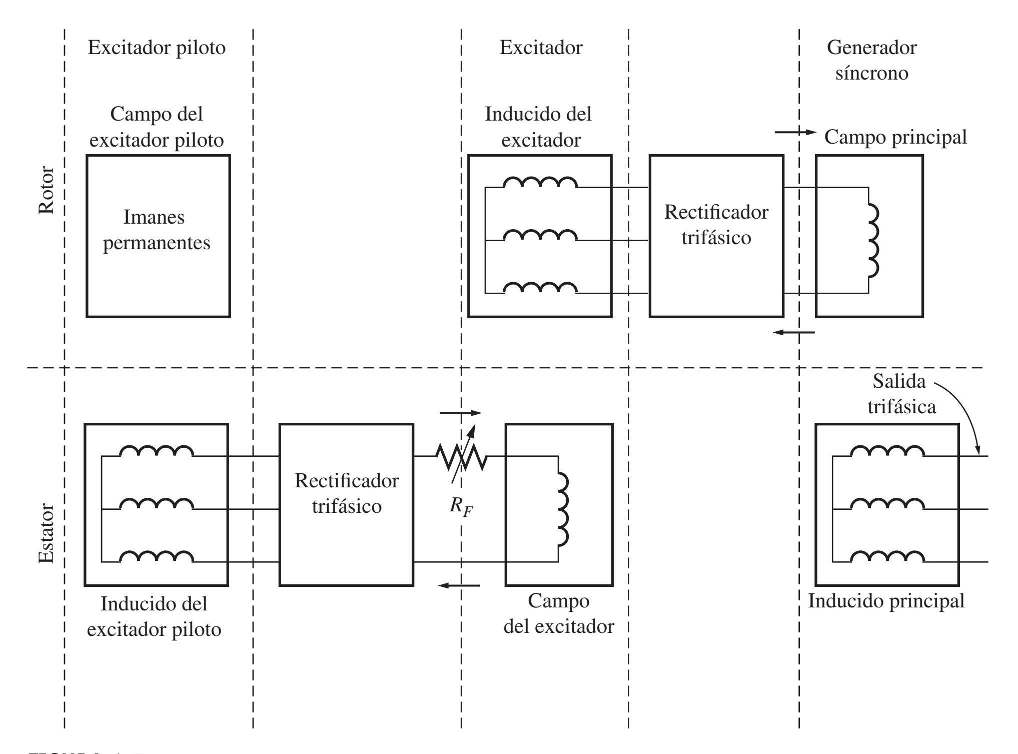


FIGURA 4-5 Esquema de excitación sin escobillas que incluye un excitador piloto. Los imanes permanentes del excitador piloto producen la corriente de campo del excitador, que a su vez produce la corriente de campo de la máquina principal.

de un generador síncrono consta de un electroimán al que se le suministra corriente directa. El campo magnético del rotor apunta en la dirección en que gira el rotor. Ahora, la tasa de rotación de los campos magnéticos en la máquina está relacionada con la frecuencia eléctrica del estator por medio de la ecuación (3-34):

$$f_e = \frac{n_m P}{120} \qquad \textbf{(3-34)}$$

donde

f_e = frecuencia eléctrica en Hz
n_m = velocidad mecánica del campo magnético en r/min (igual a la velocidad del rotor de una máquina síncrona)
P = número de polos

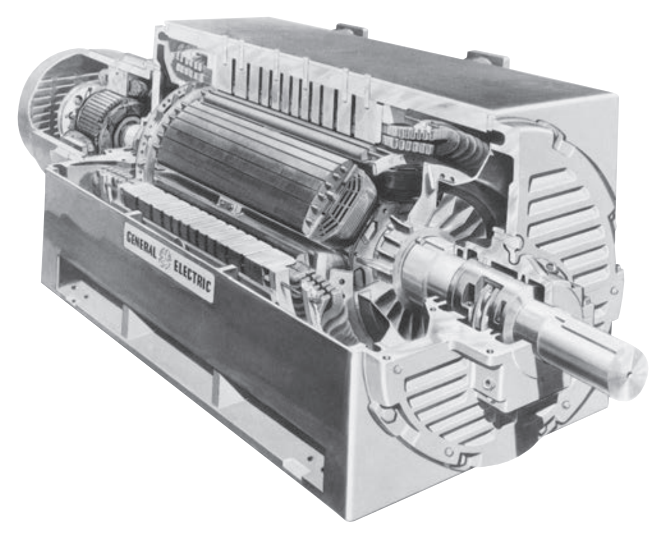


FIGURA 4-6 Diagrama en corte de una máquina síncrona grande. Nótese la construcción de los polos salientes y el excitador en el eje. (*Cortesía de General Electric Company*.)

Debido a que el rotor gira a la misma velocidad que el campo magnético, *esta ecuación relaciona la velocidad de rotación del rotor con la frecuencia eléctrica resultante*. La potencia eléctrica se genera a 50 o 60 Hz, por lo que el generador debe girar a una velocidad fija que dependerá del número de polos de la máquina. Por ejemplo, para generar una potencia de 60 Hz en una máquina de dos polos, el rotor *debe* girar a 3 600 r/min. Para generar una potencia de 50 Hz en una máquina de cuatro polos, el rotor *debe* girar a 1 500 r/min. La tasa de rotación que se requiere para cierta frecuencia siempre se puede calcular a partir de la ecuación (3-34).

4.3 VOLTAJE INTERNO GENERADO POR UN GENERADOR SÍNCRONO

En el capítulo 3 se dedujo que la magnitud del voltaje inducido en cierta fase de un estator era

$$E_A = \sqrt{2}\pi N_C \phi f \qquad \textbf{(3-50)}$$

Este voltaje depende del flujo ϕ en la máquina, de la frecuencia o velocidad de rotación y de la construcción de la máquina. Para resolver problemas de máquinas síncronas, a menudo esta ecuación se escribe de una forma más simple que destaca las cantidades que varían durante la operación de la máquina. Esta forma más simple es

$$E_A = K\phi\omega \qquad \textbf{(4-1)}$$

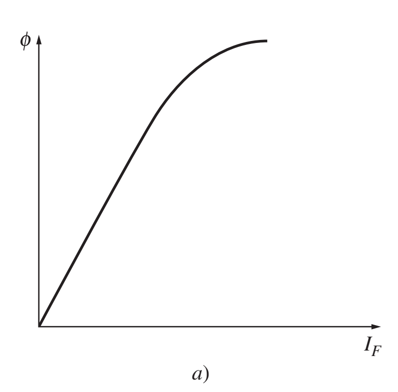
donde K es una constante que representa la construcción de la máquina. Si ω se expresa en radianes *eléctricos* por segundo, entonces

$$K = \frac{N_c}{\sqrt{2}} \qquad \textbf{(4-2)}$$

mientras que si ω se expresa en radianes *mecánicos* por segundo, entonces

$$K = \frac{N_c P}{\sqrt{2}} \qquad \textbf{(4-3)}$$

El voltaje interno generado E_A es directamente proporcional al flujo y a la velocidad, pero el flujo en sí depende de la corriente que fluye por el circuito de campo del rotor. En la figura 4-7*a*) se muestra la manera en que se relacionan el circuito de campo I_F y el flujo ϕ. Debido a que E_A es directamente proporcional al flujo, el voltaje



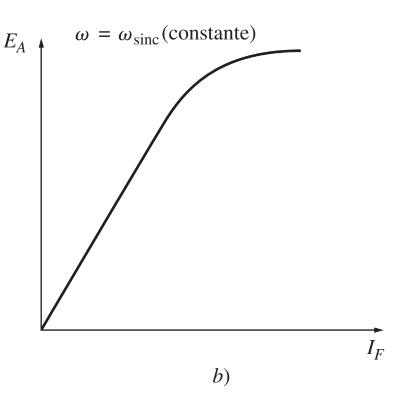


FIGURA 4-7 *a*) Gráfica del flujo contra la corriente de campo en un generador síncrono. *b*) Curva de magnetización de un generador síncrono.

interno generado E_A está relacionado con la corriente de campo, como se observa en la figura 4-7*b*). Esta gráfica se llama *curva de magnetización* o *característica de circuito abierto* de la máquina.

4.4 CIRCUITO EQUIVALENTE DE UN GENERADOR SÍNCRONO

El voltaje $\mathbf{E}_A$ es el voltaje interno que se genera y produce en una fase de un generador síncrono. Sin embargo, por lo general este voltaje $\mathbf{E}_A$ *no* es el voltaje que se presenta en las terminales del generador. De hecho, el único momento en que el voltaje interno $\mathbf{E}_A$ es igual al voltaje de salida $\mathbf{V}_\phi$ de una fase es cuando no fluye corriente de armadura en la máquina. ¿Por qué el voltaje de salida $\mathbf{V}_\phi$ de una fase no es igual a $\mathbf{E}_A$ y cuál es la relación entre estos dos voltajes? La respuesta a esta pregunta lleva al modelo de circuito equivalente de un generador síncrono.

Hay varios factores que ocasionan la diferencia que hay entre $\mathbf{E}_A$ y $\mathbf{V}_\phi$:

1. La distorsión del campo magnético del entrehierro debida a la corriente que fluye en el estator, llamada *reacción del inducido*.
2. La autoinductancia de las bobinas del inducido (o armadura).
3. La resistencia de las bobinas del inducido.
4. El efecto de la forma del rotor de polos salientes.

Se estudiarán los efectos de los primeros tres factores y se desarrollará un modelo de la máquina a partir de ellos. En este capítulo se despreciarán los efectos de la forma de los polos salientes en la operación de una máquina síncrona; en otras palabras, se supone que todas las máquinas que se analizan en este capítulo tienen rotores de polos no salientes o cilíndricos. Con base en este supuesto, las respuestas que se obtengan serán un poco inexactas si la máquina tiene rotores de polos salientes, pero los errores son relativamente pequeños. En el apéndice C se presenta una explicación de los efectos de la proyección de los polos.

El primer efecto mencionado, y normalmente el más grande, es la reacción del inducido. Cuando el rotor de un generador síncrono gira, se induce un voltaje $\mathbf{E}_A$ en los devanados del estator del generador. Si se añade una carga a las terminales del generador, la corriente fluye. Pero el flujo de corriente de un estator trifásico produce su propio campo magnético en la máquina. Este campo magnético del *estator* distorsiona el campo magnético original del rotor y altera el voltaje de fase resultante. A este efecto se le llama *reacción del inducido* porque la corriente del inducido (estator) afecta el campo magnético que lo produjo en primera instancia.

Para entender la reacción del inducido, remítase a la figura 4-8. La figura 4-8*a*) muestra un rotor bipolar que gira dentro de un estator trifásico. No hay ninguna carga conectada al estator. El campo magnético del rotor $\mathbf{B}_R$ produce un voltaje interno generado $\mathbf{E}_A$ cuyo valor pico coincide con la dirección de $\mathbf{B}_R$. Como se demostró en el capítulo anterior, el voltaje será positivo hacia afuera de los conductores en la parte superior de la figura y negativo hacia adentro de los conductores en la parte inferior. Si el generador no tiene carga, no hay flujo de corriente en el inducido y, por lo tanto, $\mathbf{E}_A$ será igual al voltaje de fase $\mathbf{V}_\phi$.

Ahora supóngase que el generador se conecta a una carga con un factor de potencia en retraso. Debido a que la carga está en retraso, la corriente pico se presentará en un ángulo *detrás* del voltaje pico. En la figura 4-8*b*) se muestra este efecto.

La corriente que fluye en los devanados del estator produce su propio campo magnético. A este campo magnético del estator se le llama $\mathbf{B}_S$ y su dirección se obtiene por medio de la regla de la mano derecha como se observa en la figura 4-8*c*). El campo magnético del estator $\mathbf{B}_S$ produce su propio voltaje en el estator, al cual se le llama $\mathbf{E}_{\text{estat}}$ en la figura.

Con dos voltajes presentes en los devanados del estator, el voltaje total en una fase es simplemente la *suma* del voltaje interno generado $\mathbf{E}_A$ más el voltaje de reacción del inducido $\mathbf{E}_{\text{estat}}$:

$$\mathbf{V}_\phi = \mathbf{E}_A + \mathbf{E}_{\text{estat}} \tag{4-4}$$

El campo magnético neto $\mathbf{B}_{\text{net}}$ es simplemente la suma de los campos magnéticos del rotor y del estator:

$$\mathbf{B}_{\text{net}} = \mathbf{B}_R + \mathbf{B}_S \tag{4-5}$$

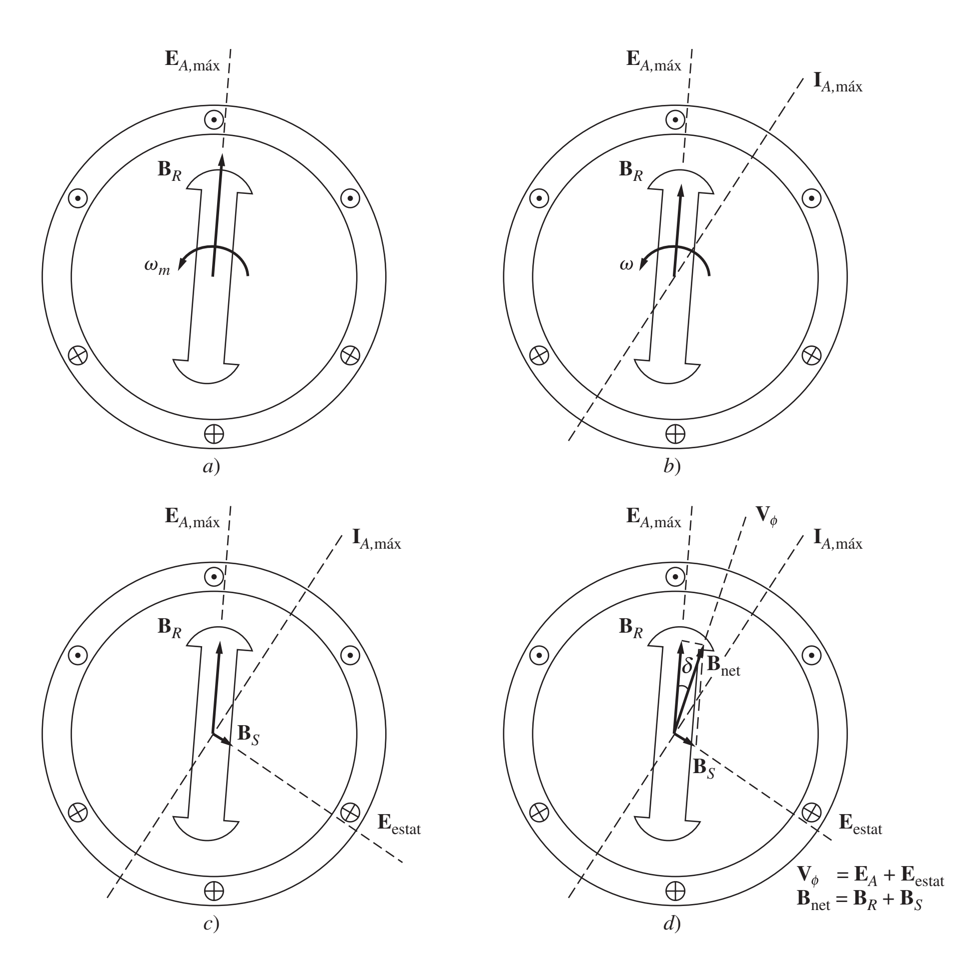


FIGURA 4-8 Desarrollo de un modelo de la reacción de inducido: *a*) Un campo magnético giratorio produce el voltaje interno generado $\mathbf{E}_A$. *b*) El voltaje resultante produce un *flujo de corriente* en retraso cuando se conecta a una carga en retraso. *c*) La corriente en el estator produce su propio campo magnético $\mathbf{B}_S$, que produce su propio voltaje $\mathbf{E}_{\text{estat}}$ en los devanados del estator de la máquina. *d*) El campo magnético $\mathbf{B}_S$ se suma a $\mathbf{B}_R$ y se transforma en $\mathbf{B}_{\text{net}}$. El voltaje $\mathbf{E}_{\text{estat}}$ se suma a $\mathbf{E}_A$ y produce $\mathbf{V}_\phi$ en la salida de la fase.

Debido a que los ángulos de $\mathbf{E}_A$ y $\mathbf{B}_R$ son iguales y los ángulos de $\mathbf{E}_{\text{estat}}$ y $\mathbf{B}_S$ también son iguales, el campo magnético resultante $\mathbf{B}_{\text{net}}$ coincidirá con el voltaje neto $\mathbf{V}_\phi$. Los voltajes y corrientes resultantes se muestran en la figura 4-8*d*).

El ángulo entre $\mathbf{B}_R$ y $\mathbf{B}_{\text{net}}$ se conoce como *ángulo interno* o *ángulo de par* Δ (gr Δ) de la máquina. Este ángulo es proporcional a la cantidad de potencia que suministra el generador, como veremos en la sección 4.6.

¿Cómo se pueden modelar los efectos de la reacción del inducido en el voltaje de fase? Primero, nótese que el voltaje $\mathbf{E}_{\text{estat}}$ tiene un ángulo de 90° atrás del plano de corriente máxima $\mathbf{I}_A$. Segundo, el voltaje $\mathbf{E}_{\text{estat}}$ es directamente proporcional a la corriente $\mathbf{I}_A$. Si X es una constante de proporcionalidad, entonces *el voltaje de reacción del inducido se puede expresar como*

$$\mathbf{E}_{\text{estat}} = -\,jX\mathbf{I}_A \quad \textbf{(4-6)}$$

Por lo tanto, el voltaje en una fase es

$$\mathbf{V}_\phi = \mathbf{E}_A - jX\mathbf{I}_A \quad \textbf{(4-7)}$$

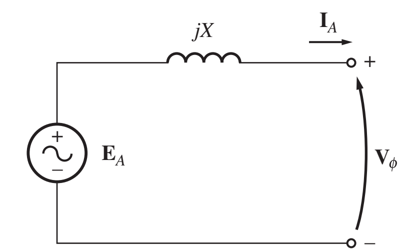


FIGURA 4-9 Circuito simple (véase texto).

Obsérvese el circuito que se muestra en la figura 4-9. La ecuación de la ley de voltaje de Kirchhoff de este circuito es

$$\mathbf{V}_\phi = \mathbf{E}_A - jX\mathbf{I}_A \quad \textbf{(4-8)}$$

Ésta es exactamente la misma ecuación que la que describe el voltaje de reacción del inducido. Por lo tanto, se puede modelar el voltaje de reacción del inducido como un inductor en serie con un voltaje interno generado.

Además de los efectos de la reacción del inducido, las bobinas del estator tienen una autoinductancia y una resistencia. Si se llama L_A a la autoinductancia del estator (y se llama X_A a su reactancia correspondiente), mientras que a la resistencia del estator se le llama R_A, entonces la diferencia total entre $\mathbf{E}_A$ y $\mathbf{V}_\phi$ está dada por

$$\mathbf{V}_\phi = \mathbf{E}_A - jX\mathbf{I}_A - jX_A\mathbf{I}_A - R_A\mathbf{I}_A \tag{4-9}$$

Tanto los efectos de la reacción del inducido como la autoinductancia de la máquina se representan por medio de reactancias y se acostumbra combinarlas en una sola llamada *reactancia síncrona* de la máquina:

$$X_S = X + X_A \tag{4-10}$$

Por lo tanto, la ecuación final que describe $\mathbf{V}_\phi$ es

$$\mathbf{V}_\phi = \mathbf{E}_A - jX_S\mathbf{I}_A - R_A\mathbf{I}_A \tag{4-11}$$

Ahora es posible dibujar el circuito equivalente de un generador síncrono trifásico. En la figura 4-10 se puede apreciar el circuito equivalente completo de un generador de este tipo. Esta figura muestra una fuente de potencia de cd que suministra potencia al circuito de campo del rotor, que se modela por medio de la inductancia y resistencia en serie de la bobina. Un resistor ajustable R_{ajus} está conectado en serie con R_F y este resistor controla el flujo de corriente de campo. El resto del circuito equivalente consta de los modelos de cada fase. Cada fase tiene un voltaje interno generado

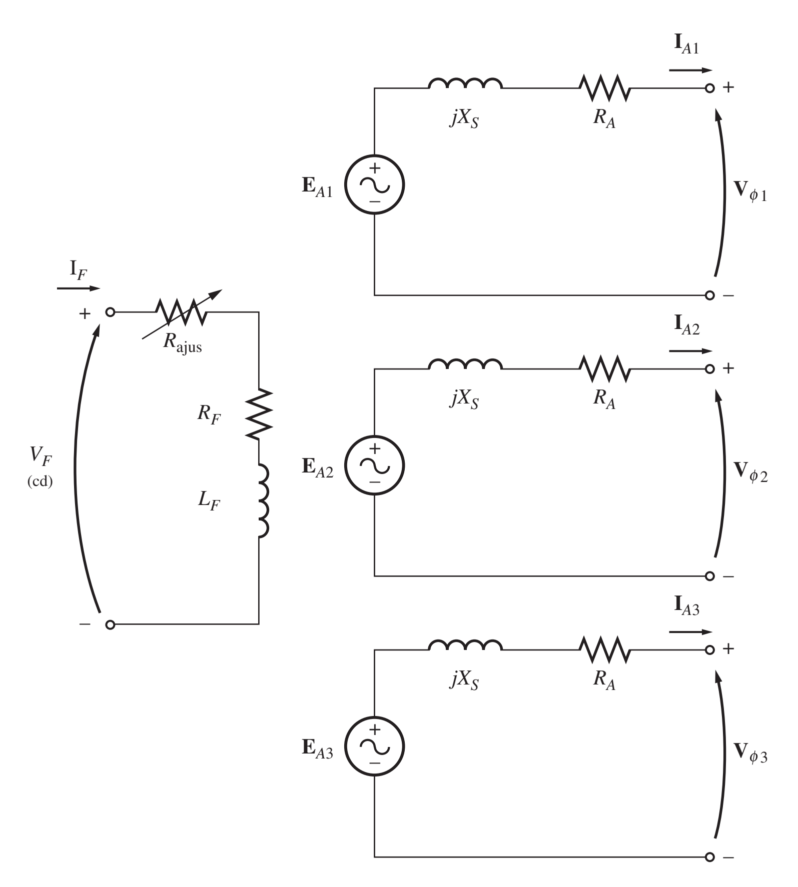


FIGURA 4-10 Circuito equivalente completo de un generador síncrono trifásico.

con una inductancia en serie X_S (que consta de la suma de la reactancia del inducido y la autoinductancia de la bobina) y una resistencia en serie R_A. Los voltajes y corrientes de las tres fases están separados por 120°, pero en todo lo demás son idénticos.

Como se muestra en la figura 4-11, estas tres fases se pueden conectar en Y o en Δ. Si se conectan en Y, entonces el voltaje del terminal V_T está relacionado con el voltaje de fase por

$$V_T = V_L = \sqrt{3}V_\phi \tag{4-12}$$

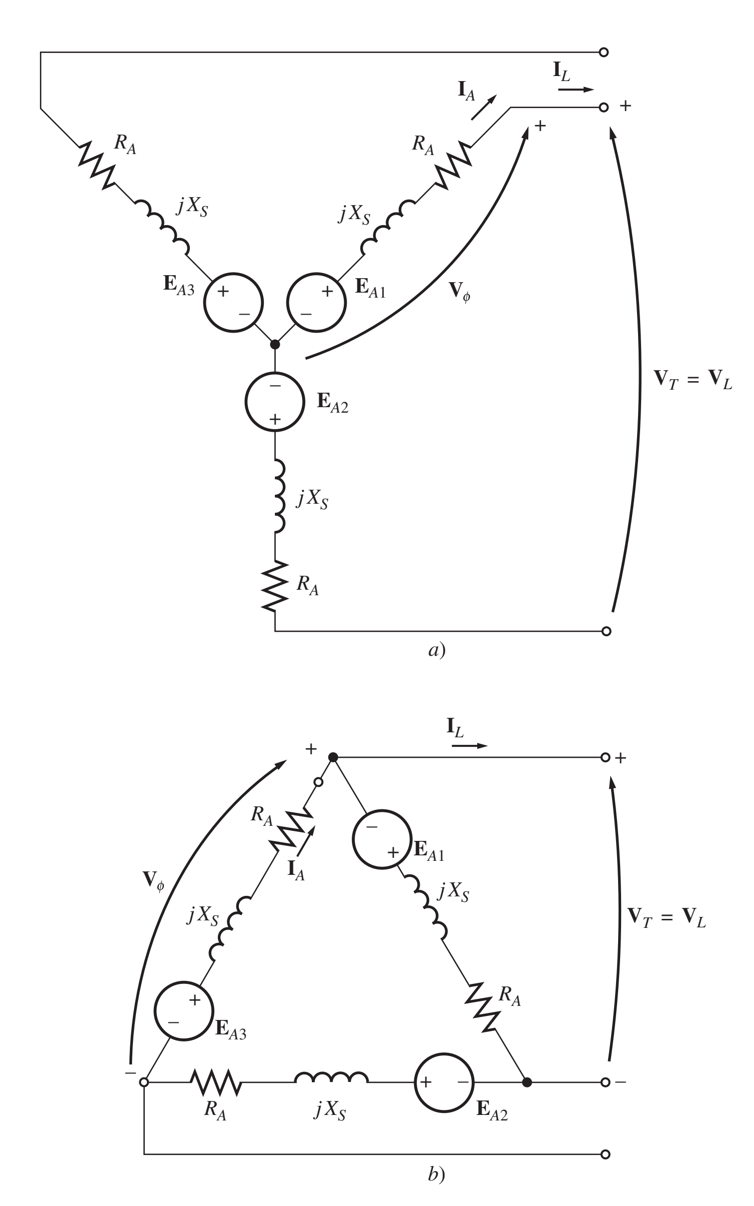


FIGURA 4-11 Circuito equivalente de un generador conectado en *a*) Y y *b*) Δ.

Si se conectan en Δ, entonces

$$V_T = V_\phi \tag{4-13}$$

Normalmente, el hecho de que las tres fases de un generador síncrono sean idénticas en todos aspectos menos en el ángulo de fase lleva a utilizar de un *circuito equivalente por fase*. El circuito equivalente por fase de esta máquina se puede apreciar en la figura 4-12. Se debe tener presente un

factor importante cuando se utiliza un circuito equivalente por fase: las tres fases tienen los mismos voltajes y corrientes *sólo* cuando las cargas conectadas a ellas están *balanceadas*. Si las cargas del generador no están balanceadas, se requieren técnicas de análisis más complicadas, las cuales están fuera del alcance de este libro.

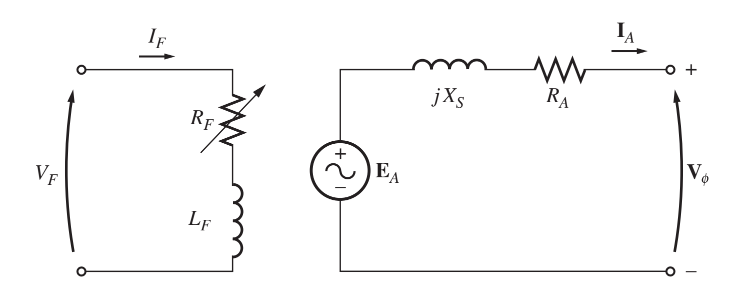


FIGURA 4-12 Circuito equivalente por fase de un generador síncrono. La resistencia del circuito de campo interno y la resistencia variable externa se combinan en un solo resistor R_F.

4.5 DIAGRAMA FASORIAL DE UN GENERADOR SÍNCRONO

Debido a que los voltajes en un generador síncrono son voltajes de ca, por lo general se expresan como fasores. Y puesto que los fasores tienen tanto magnitud como ángulo, la relación entre ellos se debe expresar en una gráfica bidimensional. Cuando se hace una gráfica de los voltajes dentro de una fase ($\mathbf{E}_A$, $\mathbf{V}_\phi$, $jX_S\mathbf{I}_A$ y $R_A\mathbf{I}_A$) y la corriente $\mathbf{I}_A$ en la fase de tal forma que se muestren las relaciones entre ellos, la gráfica resultante se llama *diagrama fasorial*.

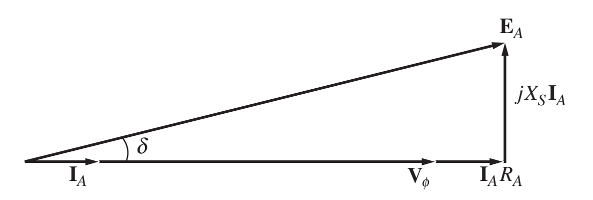


FIGURA 4-13 Diagrama fasorial de un generador síncrono con un factor de potencia unitario.

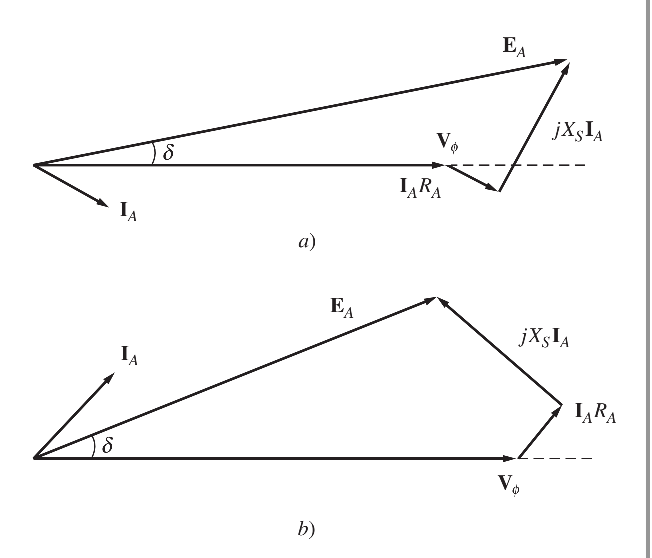


FIGURA 4-14 Diagrama fasorial de un generador síncrono con un factor de potencia *a*) en retraso y *b*) en adelanto.

Por ejemplo, la figura 4-13 muestra estas relaciones cuando el generador alimenta una carga con un factor de potencia unitario (una carga puramente resistiva). De la ecuación (4-11) se obtiene que el voltaje total $\mathbf{E}_A$ difiere del voltaje en las terminales de la fase $\mathbf{V}_\phi$, por las caídas de voltaje resistivo e inductivo. Todas las corrientes y voltajes están referenciados a $\mathbf{V}_\phi$, y se supone arbitrariamente que tienen un ángulo de 0°.

Este diagrama fasorial se puede comparar con los diagramas fasoriales de los generadores que operan con factores de potencia en retraso o en adelanto. En la figura 4-14 se pueden observar estos diagramas fasoriales. Nótese que *para cierto voltaje de fase y cierta corriente* del inducido se necesita un voltaje interno generado $\mathbf{E}_A$ más grande para las cargas en atraso que para las cargas en adelanto. Por lo tanto, se requiere una corriente de campo más grande para obtener el mismo voltaje en las terminales en las cargas en retraso debido a que

$$E_A = K\phi\omega \tag{4-1}$$

y ω debe ser constante para mantener una frecuencia constante.

Alternativamente, *para cierta corriente de campo y cierta magnitud de corriente de carga, el voltaje en las terminales es menor en el caso de cargas en retraso y mayor en el de cargas en adelanto*.

En las máquinas síncronas reales, por lo regular la reactancia síncrona es mucho más grande que la resistencia del devanado R_A, por lo que a menudo se desprecia R_A en el estudio *cualitativo* de las variaciones de voltaje. Obviamente, para obtener resultados numéricos exactos se debe considerar R_A.

4.6 POTENCIA Y PAR EN LOS GENERADORES SÍNCRONOS

Un generador síncrono es una máquina síncrona que se utiliza como generador. Convierte potencia mecánica en potencia eléctrica trifásica. La fuente de la potencia mecánica, el *motor primario*, puede ser un motor diesel, una turbina de vapor, una turbina hidráulica u otro equipo similar. Cualquiera que sea la fuente, debe tener la propiedad básica de mantener su velocidad constante sin importar la demanda de potencia. Si esto no se cumple, entonces la frecuencia resultante del sistema de potencia podría presentar fallas (variar).

No toda la potencia mecánica que entra en un generador síncrono se convierte en potencia eléctrica que sale de la máquina. La diferencia entre la potencia de entrada y la potencia de salida representa las pérdidas en la máquina. En la figura 4-15 se muestra el diagrama de flujo de potencia de un generador síncrono. La potencia mecánica de entrada es la potencia eje en el generador $P_{\text{entr}} = \tau_{\text{ap}}\omega_m$, mientras que la potencia mecánica convertida a potencia eléctrica internamente está dada por

$$P_{\text{conv}} = \tau_{\text{ind}}\omega_m \tag{4-14}$$

$$= 3\boldsymbol{E}_A\boldsymbol{I}_A \cos \gamma \tag{4-15}$$

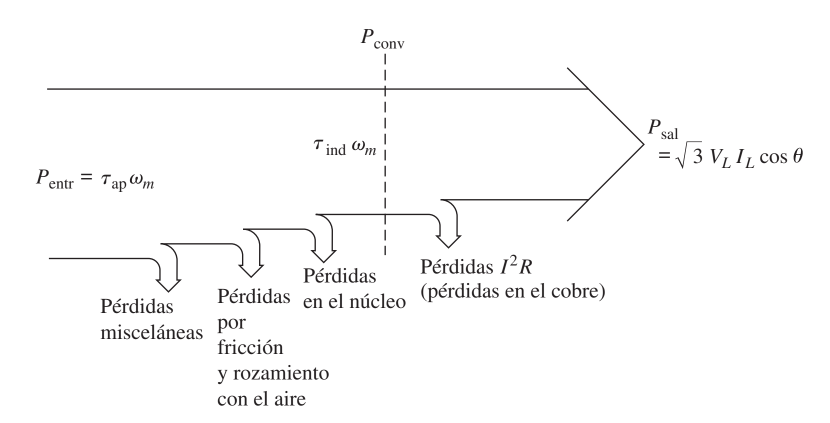


FIGURA 4-15 Diagrama de flujo de potencia de un generador síncrono.

donde γ es el ángulo entre $\boldsymbol{E}_A$ e $\boldsymbol{I}_A$. La diferencia entre la potencia que entra en el generador y la potencia que se convierte en él representa las pérdidas mecánicas, del núcleo y misceláneas de la máquina.

La potencia eléctrica de salida real de un generador síncrono se puede expresar en cantidades de línea a línea como

$$P_{\text{sal}} = \sqrt{3}V_L I_L \cos \theta \tag{4-16}$$

y en cantidades fasoriales como

$$P_{\text{sal}} = 3V_\phi I_A \cos \theta \tag{4-17}$$

La potencia reactiva de salida se puede expresar en cantidades de línea a línea como

$$Q_{\text{sal}} = \sqrt{3}V_L I_L \operatorname{sen}\theta \tag{4-18}$$

o en cantidades fasoriales como

$$Q_{\text{sal}} = 3V_\phi I_A \operatorname{sen}\theta \tag{4-19}$$

Si se desprecia la resistencia del inducido R_A (debido a que $X_S \gg R_A$), entonces se puede deducir una ecuación muy útil para obtener una aproximación de la potencia de salida del generador. Para deducir esta ecuación se debe examinar el diagrama fasorial de la figura 4-16, que muestra el diagrama fasorial simplificado de un generador en el que se desprecia la resistencia del estator. Nótese que se puede expresar el segmento vertical *bc* como E_A sen δ o $X_S I_A$ cos θ. Por lo que

$$I_A \cos \theta = \frac{E_A \operatorname{sen} \delta}{X_S}$$

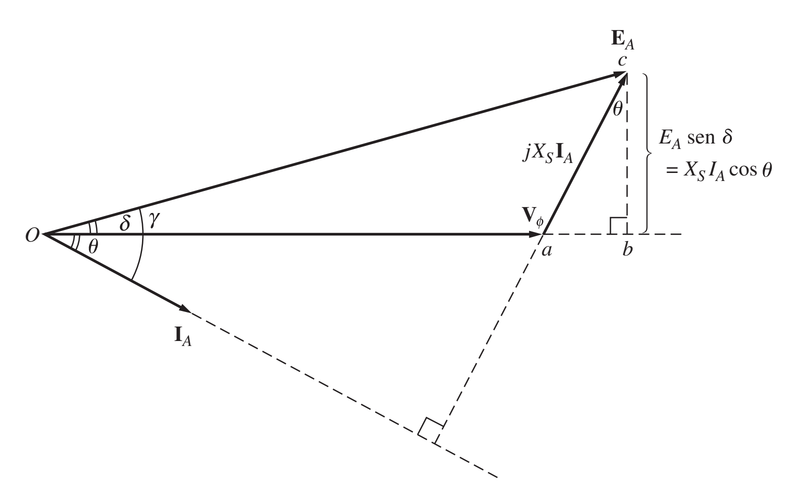


FIGURA 4-16 Diagrama fasorial simplificado, donde se ha despreciado la resistencia del inducido.

y sustituyendo esta expresión en la ecuación (4-17) se tiene

$$P_{\text{conv}} = \frac{3V_\phi E_A}{X_S} \operatorname{sen} \delta \qquad \textbf{(4-20)}$$

Debido a que se supone que las resistencias son cero en la ecuación (4-20), no hay pérdidas eléctricas en el generador y la ecuación es igual para P_{conv} y P_{sal}.

La ecuación (4-20) muestra que la potencia producida por un generador síncrono depende del ángulo δ entre $\mathbf{V}_\phi$ y $\mathbf{E}_A$. El ángulo δ se conoce como el *ángulo interno* o *ángulo de par* de la máquina. Nótese también que la potencia máxima que puede suministrar un generador se presenta cuando $\delta = 90°$. A un ángulo de $\delta = 90°$, sen $\delta = 1$ y

$$P_{\text{máx}} = \frac{3V_\phi E_A}{X_S} \qquad \textbf{(4-21)}$$

La potencia máxima que indica esta ecuación se llama *límite de estabilidad estática* del generador. Por lo general, los generadores nunca llegan a estar demasiado cerca de este límite. En las máquinas reales los ángulos más comunes del par a plena carga son de 20 a 30°.

Ahora analícense de nuevo las ecuaciones (4-17), (4-19) y (4-20). Si se supone que $\mathbf{V}_\phi$ es constante, entonces la *potencia real de salida es directamente proporcional* a las cantidades I_A cos θ y $\mathbf{E}_A$ sen δ y la potencia reactiva de salida es directamente proporcional a la cantidad I_A sen θ. Estos datos son útiles para dibujar el diagrama fasorial de un generador síncrono cuando las cargas varían.

Del capítulo 3 se sabe que el par inducido en este generador se puede expresar como

$$\tau_{\text{ind}} = k\mathbf{B}_R \times \mathbf{B}_S \qquad \textbf{(3-58)}$$

o como

$$\tau_{\text{ind}} = k\mathbf{B}_R \times \mathbf{B}_{\text{net}} \qquad \textbf{(3-60)}$$

La magnitud de la ecuación (3-60) se puede expresar como

$$\tau_{\text{ind}} = kB_R B_{\text{net}} \text{ sen } \delta \tag{3-61}$$

donde δ es el ángulo entre el rotor y los campos magnéticos netos (también llamado *ángulo de par*). Debido a que $\mathbf{B}_R$ produce el voltaje $\mathbf{E}_A$ y $\mathbf{B}_{\text{net}}$ produce el voltaje $\mathbf{V}_\phi$, el ángulo δ entre $\mathbf{E}_A$ y $\mathbf{V}_\phi$, es el mismo que el ángulo δ entre $\mathbf{B}_R$ y $\mathbf{B}_{\text{net}}$.

De la ecuación (4-20) se puede derivar una expresión alternativa para el par inducido en un generador síncrono. Debido a que $P_{\text{conv}} = \tau_{\text{ind}}\omega_m$, el par inducido se puede expresar como

$$\tau_{\text{ind}} = \frac{3V_\phi E_A}{\omega_m X_S} \text{sen}\,\delta \tag{4-22}$$

Esta expresión describe el par inducido en términos de cantidades eléctricas, mientras que la ecuación (3-60) proporciona la misma información en términos de cantidades magnéticas.

Observe que tanto la potencia convertida de la forma mecánica a la forma eléctrica P_{conv} en un generador síncrono y el par inducido τ_{ind} en el rotor del generador dependen del ángulo del par δ.

$$P_{\text{conv}} = \frac{3V_\phi E_A}{X_S} \text{sen}\,\delta \tag{4-20}$$

$$\tau_{\text{ind}} = \frac{3V_\phi E_A}{\omega_m X_S} \text{sen}\,\delta \tag{4-22}$$

Estas dos cantidades alcanzan sus valores máximos cuando el ángulo de par δ llega a 90°. El generador no es capaz de exceder dichos límites ni siquiera por un instante. Los generadores reales típicamente tienen ángulos de par de plena carga de 20 a 30°, de modo que la potencia instantánea máxima y el par máximo instantáneo que pueden suministrar son por lo menos el doble de sus valores a plena carga. Esta reserva de potencia y de par es esencial para la estabilidad de sistemas de potencia que contengan estos generadores, como veremos en la sección 4.10.

4.7 MEDICIÓN DE LOS PARÁMETROS DEL MODELO DE GENERADOR SÍNCRONO

El circuito equivalente de un generador síncrono que se ha obtenido consta de tres cantidades que se deben determinar para describir completamente el comportamiento de un generador síncrono real:

1. La relación entre la corriente de campo y el flujo (y, por lo tanto, entre la corriente de campo y E_A)
2. La reactancia síncrona
3. La resistencia del inducido

Esta sección describe una técnica muy simple para determinar estas cantidades en un generador síncrono.

El primer paso del proceso es la realización de la prueba de *circuito abierto* en el generador. Para realizar esta prueba, el generador se hace girar a velocidad nominal, se desconectan las terminales de cualquier carga y se establece la corriente de campo como cero. Entonces se incrementa gradualmente por etapas la corriente de campo y se mide el voltaje en las terminales en cada etapa. Con las terminales abiertos $I_A = 0$, por lo que E_A es igual a V_ϕ. A partir de esta información es posible dibujar una gráfica de E_A o V_T *vs*. I_F. A esta gráfica también se le llama *característica de circuito abierto* (OCC, por sus siglas en inglés) de un generador. Con esta característica es posible encontrar el voltaje generado interno del generador dada cualquier corriente de campo. En la figura 4-17*a*) se

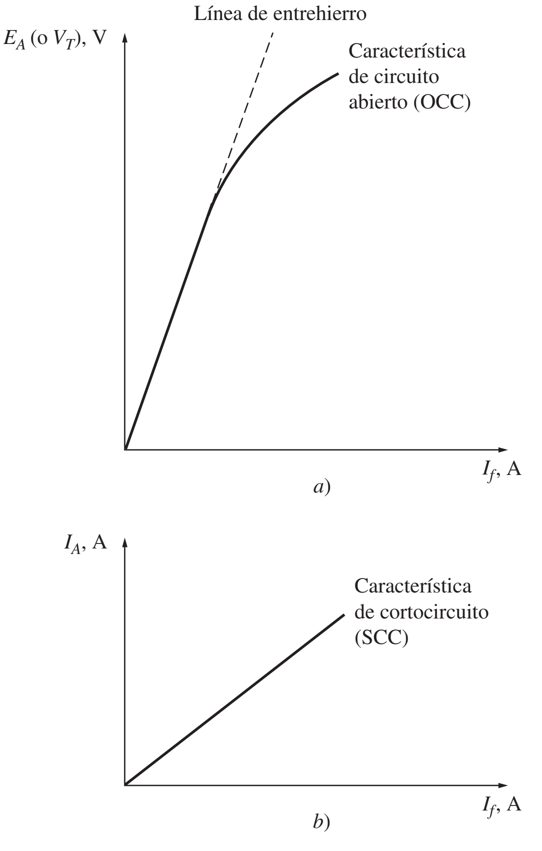


FIGURA 4-17 *a*) Característica de circuito abierto (OCC) de un generador síncrono. *b*) Característica de cortocircuito (SCC) de un generador síncrono.

muestra una característica de circuito abierto típica. Nótese que al principio la curva es casi perfectamente lineal, hasta que se observa cierta saturación con corrientes de campo más altas. El hierro no saturado en el marco de la máquina síncrona tiene una reluctancia muchos miles de veces menor a la reluctancia en el entrehierro, por lo que al principio casi *toda* la fuerza magnetomotriz pasa a través del entrehierro y el incremento del flujo resultante es lineal. Cuando finalmente se satura el hierro, la reluctancia en éste se incrementa de manera notoria y el flujo se incrementa mucho más despacio con el incremento en la fuerza magnetomotriz. La porción lineal de una OCC se llama *línea de entrehierro* de la curva característica.

El segundo paso del proceso es la realización de una *prueba de cortocircuito*. Para realizar una prueba de cortocircuito se establece la corriente de campo igual a cero y se hace cortocircuito en las terminales del generador por medio de un conjunto de amperímetros. Entonces se mide la corriente en el inducido I_A o la corriente de línea I_L conforme se incrementa la corriente de campo. Una gráfica como ésta se llama *característica de cortocircuito* (SCC, por sus siglas en inglés) y se muestra en la figura 4-17*b*). Es esencialmente una línea recta. Para entender por qué esta curva característica es una línea recta se debe analizar el circuito equivalente de la figura 4-12 cuando las terminales de la máquina están en cortocircuito. En la figura 4-18*a*) se aprecia un circuito con estas características. Nótese que cuando las terminales están en cortocircuito, la corriente en el inducido $\mathbf{I}_A$ está dada por

$$\mathbf{I}_A = \frac{\mathbf{E}_A}{R_A + jX_S} \tag{4-23}$$

y su magnitud está dada por

$$I_A = \frac{E_A}{\sqrt{R_A^2 + X_S^2}} \tag{4-24}$$

El diagrama fasorial resultante puede observarse en la figura 4-18*b)* y los campos magnéticos correspondientes se muestran en la figura 4-18*c)*. Debido a que $\mathbf{B}_S$ casi cancela $\mathbf{B}_R$, el campo magnético neto $\mathbf{B}_{\text{net}}$ es *muy* pequeño (corresponde únicamente a las caídas resistivas e inductivas internas). Debido a que el campo magnético neto en la máquina es tan pequeño, la máquina no está saturada y la SCC es lineal.

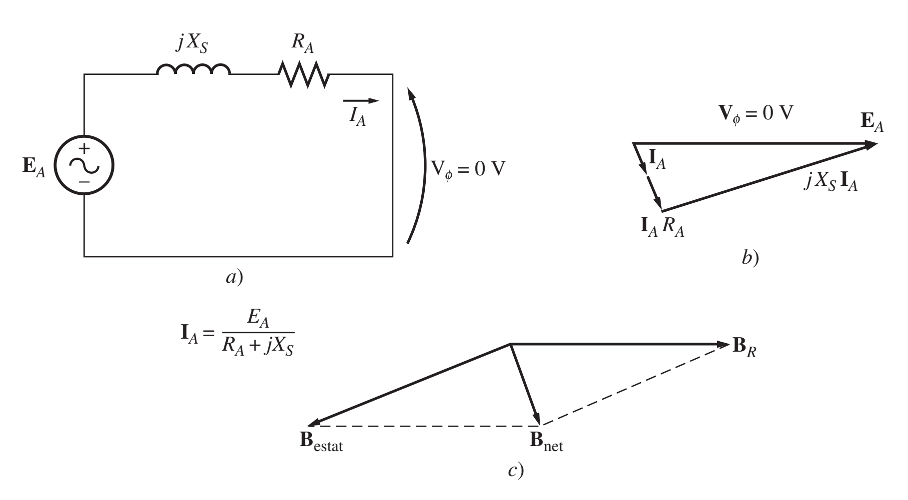


FIGURA 4-18 *a*) Circuito equivalente de un generador síncrono durante la prueba de cortocircuito. *b*) Diagrama fasorial resultante. *c*) Campos magnéticos durante la prueba de cortocircuito.

Para entender la información que proporcionan ambas características, nótese que si $\mathbf{V}_\phi$ es igual a cero en la figura 4-18, la *impedancia interna de la máquina* está dada por

$$Z_S = \sqrt{R_A^2 + X_S^2} = \frac{E_A}{I_A} \tag{4-25}$$

Debido a que $X_S \gg R_A$, esta ecuación se reduce a

$$X_S \approx \frac{E_A}{I_A} = \frac{V_{\phi,oc}}{I_A} \tag{4-26}$$

Si se conocen E_A e I_A para cierta situación, entonces se puede encontrar la reactancia síncrona X_S.

Por lo tanto, el método *aproximado* para determinar la reactancia síncrona X_S de una corriente de campo dada es:

1. Obtener el voltaje interno generado E_A de la OCC de esa corriente de campo.
2. Obtener el flujo de corriente en cortocircuito $I_{A,SC}$ de esa corriente de campo de la SCC.
3. Encontrar X_S por medio de la ecuación (4-26).

Sin embargo, este método presenta una dificultad: el voltaje interno generado E_A se obtiene de la OCC, donde la máquina está parcialmente *saturada* de grandes corrientes de campo, mientras que I_A se obtiene de la SCC, donde la máquina *no está saturada* a ningún nivel de corriente de campo. Por lo tanto, mientras más altas son las corrientes de campo, el E_A que se obtuvo de la OCC dada cierta corriente de campo *no* es el mismo que el E_A con la misma corriente de campo en condiciones de cortocircuito, diferencia que causa que el valor que se obtuvo de X_S sea sólo una aproximación.

Sin embargo, la respuesta que brinda este método es exacta hasta el punto de saturación, por lo que la *reactancia síncrona no saturada* $X_{S,ns}$ de la máquina se puede encontrar por medio de la ecuación (4-26) para cualquier corriente de campo en la porción lineal (en la línea del entrehierro) de la curva OCC.

El valor aproximado de la reactancia síncrona varía con el grado de saturación de la OCC, por lo que el valor de la reactancia síncrona que se utiliza para resolver un problema debe ser el que se calcule con el valor aproximado de la carga sobre la máquina. En la figura 4-19 se muestra una gráfica de la reactancia síncrona aproximada en función de la corriente de campo.

Para obtener una estimación más exacta de la reactancia síncrona saturada, véase la sección 5-3 del libro registrado en la bibliografía con el número 2.

Si es importante saber la resistencia del devanado, así como la reactancia síncrona, se puede obtener un valor aproximado de la resistencia por medio de la aplicación de un voltaje de cd a los devanados mientras la máquina está estacionaria y midiendo el flujo de corriente resultante. La utilización de un voltaje de cd significa que la reactancia de los devanados será igual a cero durante el proceso de medición.

Esta técnica no es del todo exacta, debido a que la resistencia de ca será un poco más grande que la resistencia de cd (como resultado del efecto pelicular a altas frecuencias). Si se desea, se puede introducir el valor medido de la resistencia en la ecuación (4-26) para mejorar el valor estimado de X_S. (Esta mejora no es de mucha ayuda en el método de aproximación; la saturación provoca un error mucho más grande en el cálculo de X_S que el error provocado por despreciar R_A.)

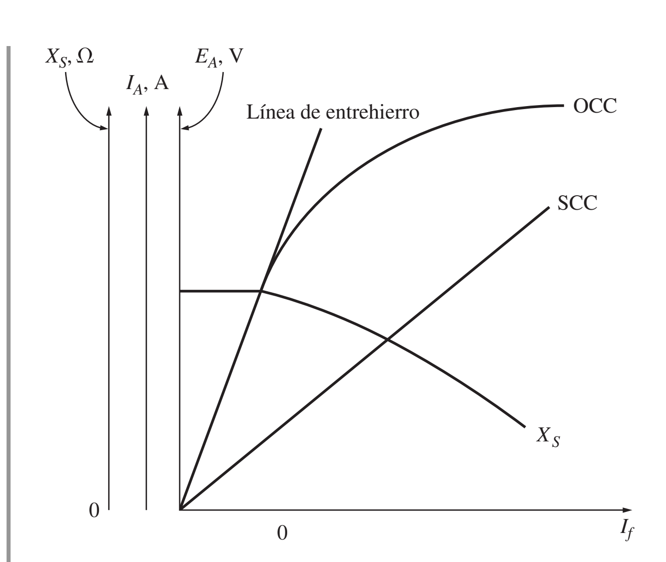


FIGURA 4-19 Gráfica de la reactancia síncrona aproximada de un generador síncrono en función de la corriente de campo en la máquina. El valor constante de la reactancia que se encuentra en los valores bajos de la corriente de campo es la reactancia síncrona *no saturada* de la máquina.

Relación de cortocircuito

Otro parámetro que se utiliza para describir los generadores síncronos es la relación de cortocircuito. La *relación de cortocircuito de un generador se define como la relación entre la corriente de campo que se requiere para el voltaje nominal en circuito abierto y la que se requiere para la corriente del inducido nominal en cortocircuito*. Se puede demostrar que esta cantidad es simplemente el valor inverso del valor aproximado por unidad de la reactancia síncrona saturada que se obtiene con la ecuación (4-26).

A pesar de que la relación de cortocircuito no añade información adicional sobre el generador a la que ya se tenía con la reactancia síncrona saturada, es importante saber qué es, ya que ocasionalmente se utiliza este término en la industria.

EJEMPLO 4-1

Se realiza una prueba a un generador síncrono de 200 kVA, 480 V, 50 Hz, conectado en Y con una corriente de campo nominal de 5 A y se obtiene la siguiente información:

1. $V_{T,\,CA}$ es igual a 540 V con una corriente nominal I_F.
2. $I_{L,\,SC}$ es igual a 300 A con una corriente nominal I_F.
3. Cuando se aplica un voltaje de 10 V de cd en dos terminales, el valor de la corriente es de 25 A.

Encuentre los valores de la resistencia del inducido y la reactancia síncrona aproximada en ohms que se utilizaría en el modelo del generador en condiciones nominales.

Solución

El generador que se describe tiene una conexión en Y, por lo que la corriente directa en la prueba de resistencia fluye a través de dos devanados. Por lo tanto, la resistencia está dada por

$$2R_A = \frac{V_{\text{CD}}}{I_{\text{CD}}}$$

$$R_A = \frac{V_{\text{CD}}}{2I_{\text{CD}}} = \frac{10\text{ V}}{(2)(25\text{ A})} = 0.2\ \Omega$$

El voltaje interno generado con la corriente de campo nominal es igual a

$$E_A = V_{\phi,\text{CA}} = \frac{V_T}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{540\text{ V}}{\sqrt{3}} = 311.8\text{ V}$$

La corriente de cortocircuito I_A es igual a la corriente de línea puesto que el generador está conectado en Y:

$$I_{A,\,CC} = I_{L,\,CC} = 300\text{ A}$$

Por lo tanto, la reactancia síncrona dada la corriente de campo nominal se puede obtener por medio de la ecuación (4-25):

$$\sqrt{R_A^2 + X_S^2} = \frac{E_A}{I_A} \tag{4-25}$$

$$\sqrt{(0.2\ \Omega)^2 + X_S^2} = \frac{311.8\text{ V}}{300\text{ A}}$$

$$\sqrt{(0.2\ \Omega)^2 + X_S^2} = 1.039\ \Omega$$

$$0.04 + X_S^2 = 1.08$$

$$X_S^2 = 1.04$$

$$X_S = 1.02\ \Omega$$

¿Qué efecto produce la inclusión de R_A en el valor estimado de X_S? No mucho. Si se evalúa X_S por medio de la ecuación (4-26), el resultado es

$$X_S = \frac{E_A}{I_A} = \frac{311.8 \text{ V}}{300 \text{ A}} = 1.04 \ \Omega$$

Debido a que el error en X_S por despreciar R_A es mucho menor que el error debido a los efectos de saturación, normalmente los cálculos de aproximación se realizan con la ecuación (4-26).

En la figura 4-20 se muestra el circuito equivalente por fase resultante.

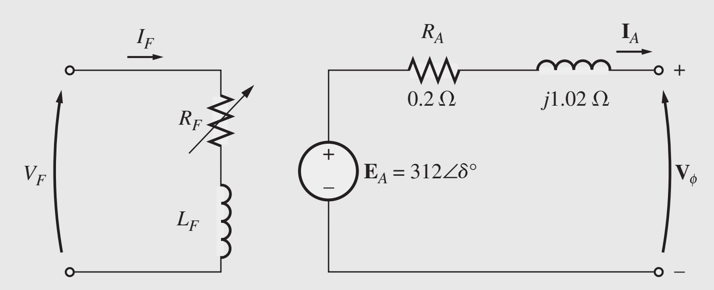


FIGURA 4-20 Circuito equivalente por fase del generador del ejemplo 4-l.

4.8 GENERADOR SÍNCRONO QUE OPERA SOLO

El comportamiento de un generador síncrono con una carga varía mucho, lo cual depende del factor de potencia de la carga y de que el generador opere solo o en paralelo con otros generadores síncronos. En esta sección se estudiará el comportamiento de los generadores síncronos que operan solos. En la sección 4.9 se estudiará el comportamiento de los generadores síncronos que operan en paralelo.

En esta sección se ilustrarán conceptos con diagramas fasoriales simplificados que desprecian el efecto de R_A. En algunos de los ejemplos numéricos se incluirá la resistencia R_A.

A menos que se indique lo contrario, en esta sección se supondrá que la velocidad de los generadores es constante y todas las características de las terminales se dibujan de acuerdo con esta suposición. También, se supone que el flujo del rotor del generador es constante a menos que se cambie explícitamente la corriente de campo.

Efecto de los cambios en la carga en un generador síncrono que opera solo

Para entender las características de funcionamiento de un generador síncrono que opera solo, examínese un generador que alimenta una carga. En la figura 4-21 se muestra un diagrama de un solo generador que alimenta una carga. ¿Qué pasa cuando se incrementa la carga de este generador?

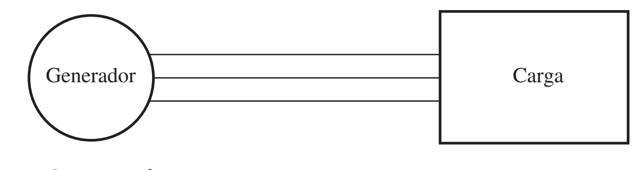


FIGURA 4-2l Un solo generador que alimenta una carga.

Un incremento de la carga es un aumento de la potencia real, reactiva, o ambas, que se obtiene del generador. Un incremento de la carga aumenta la corriente de la carga que se obtiene del generador. Debido a que no se ha cambiado el resistor de campo, la corriente de campo es constante y, por lo tanto, el flujo ϕ es constante. Debido a que el motor principal también tiene una velocidad constante ω, la *magnitud del voltaje interno generado* $E_A = K\phi\omega$ *es constante*.

Si E_A es constante, ¿qué cambia con una variación en la carga? La manera de encontrar la respuesta a esta pregunta es dibujar diagramas fasoriales que muestren el incremento de la carga manteniendo en mente las restricciones sobre el generador.

Primero, examínese un generador que opera con un factor de potencia en retraso. Si se añade más carga con el *mismo factor de potencia*, entonces $|\mathbf{I}_A|$ se incrementa pero mantiene el mismo

ángulo θ con respecto a $\mathbf{V}_\phi$. Por lo tanto, el voltaje de reacción en el inducido $jX_S\mathbf{I}_A$ es mayor que antes, pero tiene el mismo ángulo. Ahora, puesto que

$$\mathbf{E}_A = \mathbf{V}_\phi + jX_S\mathbf{I}_A$$

$jX_S\mathbf{I}_A$ debe extenderse entre $\mathbf{V}_\phi$ a un ángulo de 0° y $\mathbf{E}_A$ que tiene la restricción de mantener la misma magnitud que antes del incremento en la carga. Si se dibujan estas restricciones en el diagrama fasorial, hay un solo punto en el que el voltaje de reacción del inducido es paralelo a su posición original mientras se incrementa su tamaño. En la figura 4-22*a*) se muestra la gráfica resultante.

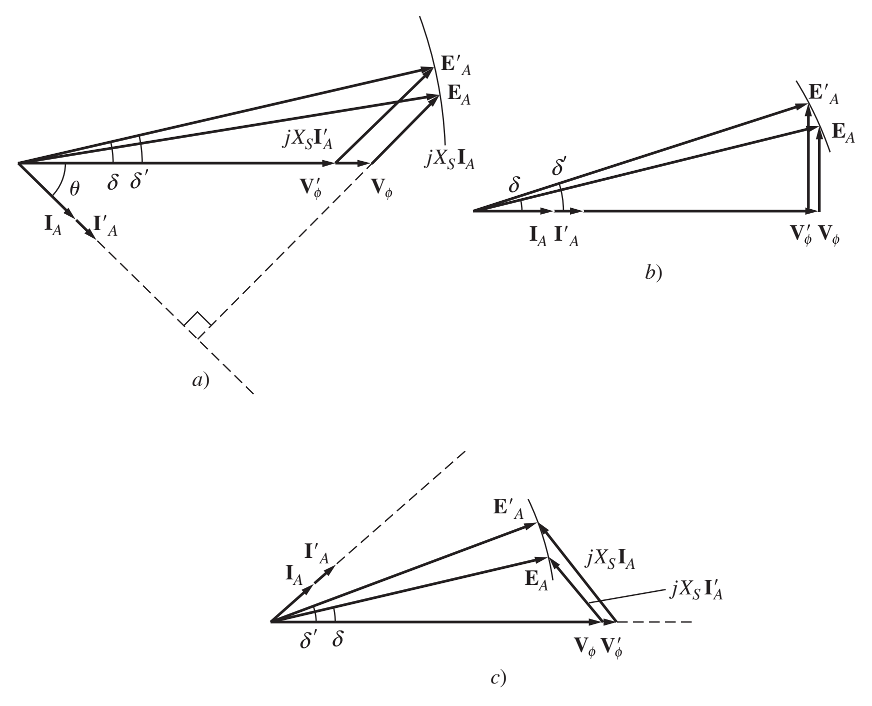


FIGURA 4-22 Efecto del incremento de carga sobre un generador a factor de potencia constante en el voltaje en sus terminales. *a*) Factor de potencia en retraso; *b*) factor de potencia unitario; *c*) factor de potencia en adelanto.

Si se cumplen las restricciones, se observa que conforme se incrementa la carga, el voltaje $\mathbf{V}_\phi$ decrece abruptamente.

Ahora supóngase que se carga el generador con cargas con factores de potencia unitarios. ¿Qué pasa si se añaden más cargas con el mismo factor de potencia? Con las mismas restricciones que antes, ahora se puede observar que $\mathbf{V}_\phi$ decrece tan sólo ligeramente (véase figura 4-22*b*).

Por último, supóngase que el generador se carga con cargas con factores de potencia en adelanto. Si ahora se añaden nuevas cargas con el mismo factor de potencia, el valor del voltaje de reacción del inducido es mayor a su valor previo y $\mathbf{V}_\phi$ aumenta (véase figura 4-22*c*). En este último caso, un incremento de la carga en el generador produjo un incremento del voltaje en las terminales. Este resultado no es el que se esperaría si nos basáramos únicamente en la intuición.

Las conclusiones generales de la discusión sobre el comportamiento de los generadores síncronos son:

1. Si se añaden cargas en retraso ($+Q$ o cargas de potencia reactiva inductivas) a un generador, $\mathbf{V}_\phi$ y el voltaje en las terminales V_T decrecen de manera significativa.
2. Si se añaden cargas con factores de potencia unitarios (no potencia reactiva) a un generador, se produce una pequeña disminución de $\mathbf{V}_\phi$ y del voltaje en las terminales.
3. Si se añaden cargas en adelanto ($-Q$ o cargas de potencia reactiva capacitivas) a un generador, $\mathbf{V}_\phi$ y el voltaje terminal aumentarán.

Una forma conveniente de comparar el comportamiento del voltaje de dos generadores es su *regulación de voltaje*. La regulación de voltaje (VR) de un generador se define por medio de la ecuación

$$VR = \frac{V_{sc} - V_{pc}}{V_{pc}} \times 100\% \tag{4-67}$$

donde V_{sc} es el voltaje sin carga del generador y V_{pc} es el voltaje a plena carga del generador. Un generador síncrono que opera con un factor de potencia en retraso tiene una regulación de voltaje positiva bastante grande, un generador síncrono que opera con un factor de potencia unitario tiene una regulación de voltaje positiva pequeña y un generador síncrono que opera con un factor de potencia en adelanto a menudo tiene una regulación de voltaje negativa.

Por lo general, se desea mantener constante el voltaje suministrado a una carga, incluso cuando la carga misma varía. ¿Cómo se pueden corregir las variaciones de voltaje en las terminales? El método más obvio es variar la magnitud de $\mathbf{E}_A$ para compensar los cambios en la carga. Recuérdese que $E_A = K\phi\omega$. Debido a que en un sistema normal la frecuencia no debe variar, se debe controlar E_A por medio de la variación del flujo en la máquina.

Por ejemplo, supóngase que se añade una carga en retraso al generador. En este caso, el voltaje en las terminales disminuirá, como se demostró previamente. Para regresar el voltaje a su nivel anterior se debe disminuir el resistor de campo R_F. Si se disminuye R_F, la corriente de campo aumentará. Un incremento de I_F causa un aumento del flujo, que a su vez incrementa E_A y un aumento de E_A causa un incremento del voltaje de fase y del voltaje en las terminales. Esta idea se puede resumir de la siguiente manera:

1. Un decremento en la resistencia de campo del generador incrementa su corriente de campo.
2. Un incremento en la corriente de campo causa un aumento del flujo en la máquina.
3. Un incremento en el flujo causa un aumento del voltaje interno generado $E_A = K\phi\omega$.
4. Un incremento en E_A causa un incremento en V_ϕ y en el voltaje en las terminales en el generador.

Se puede invertir el proceso para disminuir el voltaje en las terminales. Es posible regular el voltaje en las terminales de un generador a través de una serie de cambios en la carga simplemente ajustando la corriente de campo.

Problemas de ejemplo

Los siguientes tres problemas ejemplifican cálculos sencillos que incluyen voltajes, corrientes y flujos de potencia en los generadores síncronos. El primer problema es un ejemplo que incluye la resistencia del inducido en sus cálculos, mientras que los siguientes dos desprecian R_A. Parte del primer ejemplo plantea la pregunta: *¿cómo se debe ajustar la corriente de campo de un generador para mantener constante V_T conforme cambia la carga?* Por otro lado, parte del segundo ejemplo plantea la pregunta: *si la carga cambia y el campo permanece constante, ¿qué le pasa al voltaje en las terminales?* Se debe comparar el comportamiento calculado de los generadores en estos dos problemas para saber si están de acuerdo con los argumentos cualitativos de esta sección. El tercer ejemplo ilustra la utilización del programa MATLAB para encontrar las características de las terminales de un generador síncrono.

EJEMPLO 4-2

Un generador síncrono con cuatro polos de 480 V, a 60 Hz, conectado en Δ, tiene la OCC que se muestra en la figura 4-23*a*). Este generador tiene una reactancia síncrona de 0.1 Ω, y una resistencia del inducido de 0.015 Ω. A plena carga la máquina suministra 1 200 A con un factor de potencia de 0.8 en retraso.

En condiciones de plena carga, las pérdidas por fricción y por rozamiento con el aire son de 40 kW y las pérdidas en el núcleo son de 30 kW. Desprecie las pérdidas en el circuito de campo.

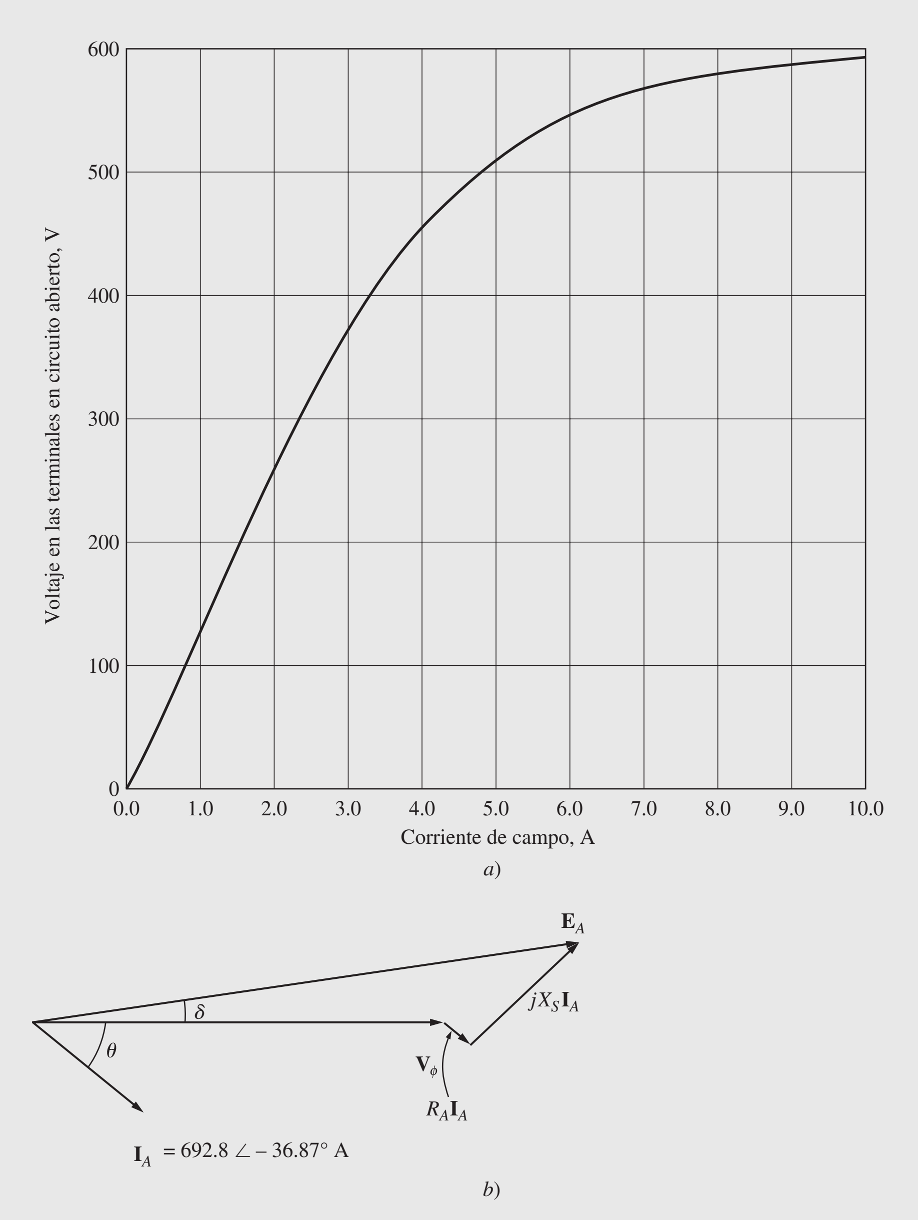


FIGURA 4-23 *a*) Característica de circuito abierto del generador del ejemplo 4-2. *b*) Diagrama fasorial del generador del ejemplo 4-2.

a) ¿Cuál es la velocidad de rotación del generador?
b) ¿Cuánta corriente de campo se debe suministrar al generador para que el voltaje en las terminales sea de 480 V en vacío?
c) Si el generador se conecta a una carga y esta carga toma 1 200 A con un factor de potencia de 0.8 en retraso, ¿cuánta corriente de campo se requiere para mantener el voltaje en las terminales igual a 480 V?
d) ¿Cuánta potencia suministra ahora el generador? ¿Cuánta potencia suministra al generador el motor principal? ¿Cuál es la eficiencia total de la máquina?
e) Si se desconecta repentinamente de la línea la carga del generador, ¿qué le sucedería al voltaje en las terminales?
f) Por último, suponga que el generador se conecta a una carga que toma 1 200 A con un factor de potencia de 0.8 *en adelanto*. ¿Cuánta corriente de campo se requiere para mantener el V_T en 480 V?

Solución

El generador síncrono está conectado en Δ, por lo que su voltaje de fase es igual a su voltaje de línea $V_\phi = V_T$, mientras que su corriente de fase se relaciona con su corriente de línea por medio de la ecuación $I_L = \sqrt{3}I_\phi$.

a) La relación entre la frecuencia eléctrica producida por un generador síncrono y la velocidad mecánica de rotación del eje está dada por la ecuación (3-34):

$$f_e = \frac{n_m P}{120} \tag{3-34}$$

Por lo tanto,

$$n_m = \frac{120 f_e}{P}$$
$$= \frac{120(60 \text{ Hz})}{4 \text{ polos}} = 1\,800 \text{ r/min}$$

b) En esta máquina, $V_T = V_\phi$. Debido a que el generador no tiene carga, $\mathbf{I}_A = 0$ y $\mathbf{E}_A = \mathbf{V}_\phi$. Por lo tanto, $V_T = V_\phi = E_A = 480$ V y, por la característica de circuito abierto, $I_F = 4.5$ A.

c) Si el generador suministra 1 200 A, entonces la corriente del inducido en la máquina es

$$I_A = \frac{1\,200 \text{ A}}{\sqrt{3}} = 692.8 \text{ A}$$

El diagrama fasorial de este generador se muestra en la figura 4-23*b*). Si se ajusta el voltaje en las terminales para que sea igual a 480 V, el tamaño del voltaje interno generado $\mathbf{E}_A$ estará dado por

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_A &= \mathbf{V}_\phi + R_A\mathbf{I}_A + jX_S\mathbf{I}_A \\ &= 480\angle 0° \text{ V} + (0.015\ \Omega)(692.8\angle -36.87° \text{ A}) + (j0.1\ \Omega)(692.8\angle -36.87° \text{ A}) \\ &= 480\angle 0° \text{ V} + 10.39\angle -36.87° \text{ V} + 69.28\angle 53.13° \text{ V} \\ &= 529.9 + j49.2 \text{ V} = 532\angle 5.3° \text{ V}\end{aligned}$$

Para mantener constante el voltaje en las terminales a 480 V, $\mathbf{E}_A$ debe ser de 532 V. Con base en la figura 4-23, la corriente de campo requerida es de 5.7 A.

d) La potencia que el generador suministra se puede encontrar por medio de la ecuación (4-16):

$$\begin{aligned}P_{\text{sal}} &= \sqrt{3}V_L I_L \cos\theta \\ &= \sqrt{3}(480 \text{ V})(1\,200 \text{ A}) \cos 36.87° \\ &= 798 \text{ kW}\end{aligned} \tag{4-16}$$

Para determinar la potencia de entrada al generador, utilice el diagrama de flujo de potencia (figura 4-15). Con base en el diagrama de flujo de potencia, la potencia mecánica de entrada está dada por

$$P_{\text{entr}} = P_{\text{sal}} + P_{\text{pérd eléc}} + P_{\text{pérd núc}} + P_{\text{pérd mec}} + P_{\text{pérd disp}}$$

En este caso no se especifican las pérdidas dispersas, por lo que se despreciarán. En este generador las pérdidas eléctricas son

$$\begin{aligned}P_{\text{pérd eléc}} &= 3I_A^2 R_A \\ &= 3(692.8 \text{ A})^2(0.015\ \Omega) = 21.6 \text{ kW}\end{aligned}$$

Las pérdidas en el núcleo son de 30 kW y las pérdidas por fricción y por rozamiento con el aire son de 40 kW, por lo que la potencia total de entrada al generador es de

$$P_{\text{entr}} = 798 \text{ kW} + 21.6 \text{ kW} + 30 \text{ kW} + 40 \text{ kW} = 889.6 \text{ kW}$$

Por lo tanto, la eficiencia total de la máquina es de

$$\eta = \frac{P_{\text{sal}}}{P_{\text{entr}}} \times 100\% = \frac{798 \text{ kW}}{889.6 \text{ kW}} \times 100\% = 89.75\%$$

e) Si repentinamente se desconecta de la línea la carga del generador, la corriente $\mathbf{I}_A$ bajaría a cero y $\mathbf{E}_A = \mathbf{V}_\phi$. Debido a que la corriente de campo no cambia, $|\mathbf{E}_A|$ no cambia y $\mathbf{V}_\phi$ y V_T deben aumentar para ser iguales a $\mathbf{E}_A$. Por lo tanto, si la carga desapareciera súbitamente, el voltaje en las terminales del generador aumentaría a 532 V.

f) Si se carga el generador con 1 200 A con un factor de potencia de 0.8 en adelanto y el voltaje en las terminales es de 480 V, entonces el voltaje interno generado tendría que ser

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_A &= \mathbf{V}_\phi + R_A\mathbf{I}_A + jX_S\mathbf{I}_A \\ &= 480 \angle 0° \text{ V} + (0.015\ \Omega)(692.8 \angle 36.87° \text{ A}) + (j0.1\ \Omega)(692.8 \angle 36.87° \text{ A}) \\ &= 480 \angle 0° \text{ V} + 10.39 \angle 36.87° \text{ V} + 69.28 \angle 126.87° \text{ V} \\ &= 446.7 + j61.7 \text{ V} = 451 \angle 7.1° \text{ V}\end{aligned}$$

Por lo tanto, se debe ajustar el voltaje interno generado E_A para suministrar 451 V si se quiere que V_T siga siendo igual a 480 V. Con base en la característica de circuito abierto, la corriente de campo tendría que ser ajustada a 4.1 A.

¿Qué tipo de carga (en adelanto o en retraso) requiere una corriente de campo mayor para mantener el voltaje nominal? ¿Qué tipo de carga (en adelanto o en retraso) impondrá mayor esfuerzo térmico al generador? ¿Por qué?

EJEMPLO 4-3

Un generador síncrono con seis polos de 480 V, a 50 Hz, conectado en Y, tiene una reactancia síncrona por fase de 1.0 Ω. Su corriente de inducido a plena carga es de 60 A con un factor de potencia de 0.8 en retraso. Este generador tiene pérdidas por fricción y por rozamiento con el aire por 1.5 kW y pérdidas en el núcleo por 1.0 kW a 60 Hz a plena carga. Debido a que se desprecia la resistencia del inducido, se supone que las pérdidas I^2R son insignificantes. La corriente de campo está ajustada de tal manera que el voltaje en las terminales es igual a 480 V en vacío.

a) ¿Cuál es la velocidad de rotación de este generador?

b) Si se cumplen los siguientes supuestos, ¿cuál es el voltaje en las terminales del generador?

1. Está cargado con una corriente nominal con un factor de potencia de 0.8 en retraso.
2. Está cargado con una corriente nominal con un factor de potencia de 1.0.
3. Está cargado con una corriente nominal con un factor de potencia de 0.8 en adelanto.

c) ¿Cuál es la eficiencia del generador (desprecie las pérdidas eléctricas) cuando opera a corriente nominal con un factor de potencia de 0.8 en retraso?

d) ¿Cuánto par del eje debe aplicar el motor principal a plena carga? ¿Qué tan grande es el par opositor inducido?

e) ¿Cuál es la regulación de voltaje de este generador con un factor de potencia de 0.8 en retraso? ¿Y con un factor de potencia de 1.0? ¿Y con un factor de potencia de 0.8 en adelanto?

Solución

Este generador está conectado en Y, por lo que su voltaje de fase está dado por $V_\phi = V_T/\sqrt{3}$. Esto quiere decir que cuando se ajusta V_T a 480 V, $V_\phi = 277$ V. La corriente de campo se ajustó de tal manera que $V_{T,\,SC} = 480$ V, por lo que $V_\phi = 277$ V. En *el vacío*, la corriente en el inducido es cero, por lo que las caídas del voltaje de reacción del inducido y en I_AR_A son cero. Debido a que $\mathbf{I}_A = 0$, el voltaje interno generado $E_A = V_\phi = 277$ V. El voltaje interno generado $E_A(= K\phi\omega)$ sólo varía cuando cambia la corriente de campo. Puesto que el problema dice que la corriente de campo se ajusta en un principio y luego se deja fija, la magnitud del voltaje interno generado es $E_A = 277$ V y no cambiará en este ejemplo.

a) La velocidad de rotación de un generador síncrono en revoluciones por minuto está dada por la ecuación (3-34):

$$f_e = \frac{n_m P}{120} \tag{3-34}$$

Por lo tanto,

$$n_m = \frac{120 f_e}{P}$$

$$= \frac{120(50\text{ Hz})}{6\text{ polos}} = 1\,000\text{ r/min}$$

Alternativamente, la velocidad expresada en radianes por segundo es

$$\omega_m = (1\,000\text{ r/min})\left(\frac{1\text{ min}}{60\text{ s}}\right)\left(\frac{2\pi\text{ rad}}{1\text{r}}\right)$$

$$= 104.7\text{ rad/s}$$

b) l. Si se carga el generador con corriente nominal con un factor de potencia de 0.8 en retraso, el diagrama fasorial resultante tiene una forma parecida al que se muestra en la figura 4-24*a*). En este diagrama fasorial se sabe que $\mathbf{V}_\phi$ tiene un ángulo de 0°, que la magnitud de $\mathbf{E}_A$ es de 277 V y que la cantidad $jX_S\mathbf{I}_A$ es

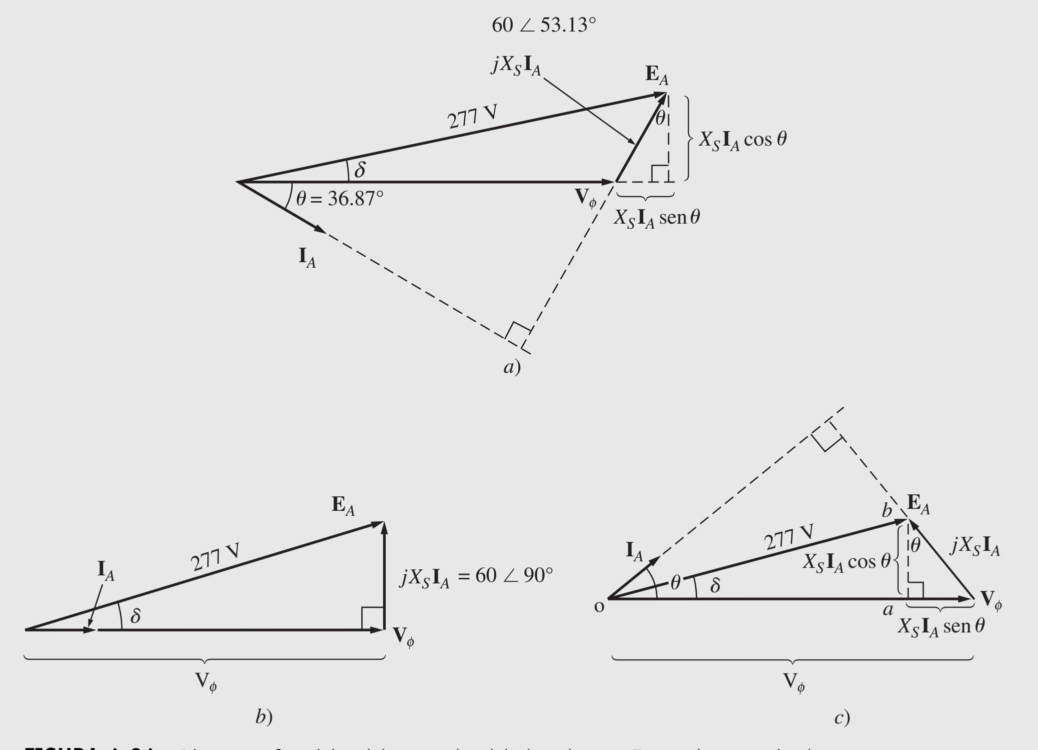


FIGURA 4-24 Diagramas fasoriales del generador del ejemplo 4-3. Factor de potencia *a*) en retraso; *b*) unitario; *c*) en adelanto.

$$jX_S\mathbf{I}_A = j(1.0\ \Omega)(60\angle -36.87°\text{ A}) = 60\angle 53.13°\text{ V}$$

Las dos cantidades que no se conocen en el diagrama de voltaje son la magnitud de $\mathbf{V}_\phi$ y el ángulo δ de $\mathbf{E}_A$. Para encontrar estos valores, el método más fácil consiste en construir un triángulo rectángulo en el diagrama fasorial como se muestra en la figura. Con base en la figura 4-24*a*), del triángulo rectángulo se obtiene

$$E_A^2 = (V_\phi + X_S I_A \operatorname{sen}\theta)^2 + (X_S I_A \cos\theta)^2$$

Por lo tanto, el voltaje de fase a carga nominal y con un factor de potencia de 0.8 en retraso es

$$\begin{aligned}(277\text{ V})^2 &= [V_\phi + (1.0\ \Omega)(60\text{ A})\text{ sen }36.87°]^2 + [(1.0\ \Omega)(60\text{ A})\cos 36.87°]^2\\ 76\,729 &= (V_\phi + 36)^2 + 2\,304\\ 74\,425 &= (V_\phi + 36)^2\\ 272.8 &= V_\phi + 36\\ V_\phi &= 236.8\text{ V}\end{aligned}$$

Debido a que el generador está conectado en Y, $V_T = \sqrt{3}V_\phi = 410$ V.

2. Si se carga el generador a corriente nominal con un factor de potencia unitario, entonces el diagrama fasorial será como el que se muestra en la figura 4-24*b*). Para encontrar $\mathbf{V}_\phi$ el triángulo rectángulo es

$$\begin{aligned}E_A^2 &= V_\phi^2 + (X_S I_A)^2\\ (277\text{ V})^2 &= V_\phi^2 + [(1.0\ \Omega)(60\text{ A})]^2\\ 76\,729 &= V_\phi^2 + 3\,600\\ V_\phi^2 &= 73\,129\\ V_\phi &= 270.4\text{ V}\end{aligned}$$

Por lo tanto, $V_T = \sqrt{3}V_\phi = 468.4$ V.

3. Cuando se carga un generador a corriente nominal con un factor de potencia de 0.8 en adelanto, el diagrama fasorial resultante es igual al que se observa en la figura 4-24*c*). Para encontrar $\mathbf{V}_\phi$ en esta situación, se construye el triángulo *OAB* que se muestra en la figura. La ecuación resultante es

$$E_A^2 = (V_\phi - X_S I_A \text{ sen}\,\theta)^2 + (X_S I_A \cos\theta)$$

Por lo tanto, el voltaje de fase a carga nominal con un factor de potencia de 0.8 en adelanto es

$$\begin{aligned}(277\text{ V})^2 &= [V_\phi - (1.0\ \Omega)(60\text{ A})\text{ sen }36.87°]^2 + [(1.0\ \Omega)(60\text{ A})\cos 36.87°]^2\\ 76\,729 &= (V_\phi - 36)^2 + 2\,304\\ 74\,425 &= (V_\phi - 36)^2\\ 272.8 &= V_\phi - 36\\ V_\phi &= 308.8\text{ V}\end{aligned}$$

Debido a que el generador está conectado en Y, $V_T = \sqrt{3}V_\phi = 535$ V.

c) La potencia de salida de este generador a 60 A con un factor de potencia de 0.8 en retraso es

$$\begin{aligned}P_{\text{sal}} &= 3V_\phi I_A \cos\theta\\ &= 3(236.8\text{ V})(60\text{ A})(0.8) = 34.1\text{ kW}\end{aligned}$$

La potencia mecánica de entrada está dada por

$$\begin{aligned}P_{\text{entr}} &= P_{\text{sal}} + P_{\text{pérd eléc}} + P_{\text{pérd núc}} + P_{\text{pérd mec}}\\ &= 34.1\text{ kW} + 0 + 1.0\text{ kW} + 1.5\text{ kW} = 36.6\text{ kW}\end{aligned}$$

Así, la eficiencia del generador es

$$\eta = \frac{P_{\text{sal}}}{P_{\text{entr}}} \times 100\% = \frac{34.1\text{ kW}}{36.6\text{ kW}} \times 100\% = 93.2\%$$

d) El par de entrada a este generador está dado por la ecuación

$$P_{\text{entr}} = \tau_{\text{ap}}\omega_m$$

por lo que

$$\tau_{\text{ap}} = \frac{P_{\text{entr}}}{\omega_m} = \frac{36.6\text{ kW}}{104.7\,\frac{\text{rad}}{\text{seg}}} = 349.5\text{ N}\cdot\text{m}$$

El par opositor inducido está dado por

$$P_{\text{conv}} = \tau_{\text{ind}}\omega_m$$

por lo que

$$\tau_{\text{ind}} = \frac{P_{\text{conv}}}{\omega_V} = \frac{34.1 \text{ kW}}{104.7 \frac{\text{rad}}{\text{seg}}} = 325.7 \text{ N} \cdot \text{m}$$

e) La regulación de voltaje de un generador se define como

$$\text{VR} = \frac{V_{\text{sc}} - V_{\text{pc}}}{V_{\text{pc}}} \times 100\% \quad \textbf{(3-67)}$$

Por medio de esta definición, la regulación de voltaje para los casos de los factores de potencia en retraso, unitario y en adelanto son:

1. Caso de factor de potencia en retraso: $\text{VR} = \dfrac{480 \text{ V} - 410 \text{ V}}{410 \text{ V}} \times 100\% = 17.1\%$

2. Caso de factor de\potencia unitario: $\text{VR} = \dfrac{480 \text{ V} - 468 \text{ V}}{468 \text{ V}} \times 100\% = 2.6\%$

3. Caso de factor de potencia en adelanto: $\text{VR} = \dfrac{480 \text{ V} - 535 \text{ V}}{535 \text{ V}} \times 100\% = -10.3\%$

En el ejemplo 4-3 las cargas en retraso originaron una caída del voltaje en las terminales, las cargas con factor de potencia unitario originaron un pequeño efecto en V_T y las cargas en adelanto originaron un incremento de voltaje en las terminales.

EJEMPLO 4-4

Suponga que el generador del ejemplo 4-3 opera en vacío con un voltaje en las terminales de 480 V. Haga la gráfica de la característica de las terminales (el voltaje en las terminales y la corriente de línea) de este generador conforme varía la corriente en su inducido desde vacío hasta plena carga con un factor de potencia *a*) de 0.8 en retraso y *b*) de 0.8 en adelanto. Suponga que la corriente de campo permanece constante.

Solución

La característica de las terminales de un generador es una gráfica de su voltaje en las terminales y la corriente de línea. Debido a que este generador está conectado en Y, el voltaje de fase está dado por $V_\phi = V_T / \sqrt{3}$. Si se ajusta V_T a 480 V en condiciones de vacío, entonces $V_\phi = E_A = 277$ V. Puesto que la corriente de campo permanece constante, E_A seguirá siendo 277 V en todo momento. La corriente de salida I_L de este generador será la misma que la corriente del inducido I_A, debido a que está conectado en Y.

a) Si el generador se carga con una corriente con un FP de 0.8 en retraso, el diagrama fasorial resultante es el que se observa en la figura 4-24*a*). En este diagrama fasorial se sabe que $\mathbf{V}_\phi$ tiene un ángulo de 0°, que la magnitud de $\mathbf{E}_A$ es de 277 V y que la cantidad $jX_S\mathbf{I}_A$ se extiende entre $\mathbf{V}_\phi$ y $\mathbf{E}_A$ como se puede ver en la figura. Las dos cantidades desconocidas del diagrama fasorial son la magnitud de $\mathbf{V}_\phi$ y el ángulo δ de $\mathbf{E}_A$. Para encontrar V_ϕ, el método más fácil consiste en construir un triángulo rectángulo en el diagrama fasorial, como se aprecia en la figura. Con base en la figura 4-24*a*), el triángulo rectángulo nos muestra que

$$E_A^2 = (V_\phi + X_S I_A \operatorname{sen} \theta)^2 + (X_S I_A \cos \theta)^2$$

Esta ecuación se puede emplear para calcular V_ϕ en función de la corriente I_A:

$$V_\phi = \sqrt{E_A^2 - (X_S I_A \cos \theta)^2} - X_S I_A \operatorname{sen} \theta$$

Se puede utilizar un archivo M del programa MATLAB para calcular V_ϕ (y por lo tanto V_T) en función de la corriente. Este archivo se muestra a continuación:

```
% Archivo M: term_char_a.m
% Archivo M para hacer la gráfica de la característica en
% terminales del generador del ejemplo 4-4 con una carga con un FP de 0.8 en retraso.

% Primero, inicializar las amplitudes de las corrientes (21
% valores en el rango de 0-60 A)
i_a = (0:1:20) * 3;
% Ahora, inicializar todos los demás valores
v_phase = zeros(1,21);
e_a = 277.0;
x_s = 1.0;
theta = 36.87 * (pi/180);          % Convertido a radianes

% Ahora calcular v_phase para cada nivel de corriente ii = 1:21
v_phase(ii) = sqrt(e_a^2 - (x_s * i_a(ii) * cos(theta))^2) ...
                         - (x_s * i_a(ii) * sin(theta));
end

% Calcular el voltaje en las terminales a partir del voltaje
% de fase
v_t = v_phase * sqrt(3);

% Hacer una gráfica de la característica de las terminales,
% recordar que la corriente de línea es la misma que i_a
plot(i_a, v_t, 'Color', 'k', 'Linewidth', 2.0);
xlabel('Corriente de línea (A)', 'Fontweight', 'Bold');
ylabel('Voltaje de las terminales (V)', 'Fontweight', 'Bold'); title ('Caracte-
rística en terminales para una carga con un FP de
0.8 en retraso', ... ', 'Fontweight', 'Bold');
grid on;
axis([0 60 400 550]);
```

En la figura 4-25*a*) se muestra la gráfica resultante cuando se ejecuta este archivo M.

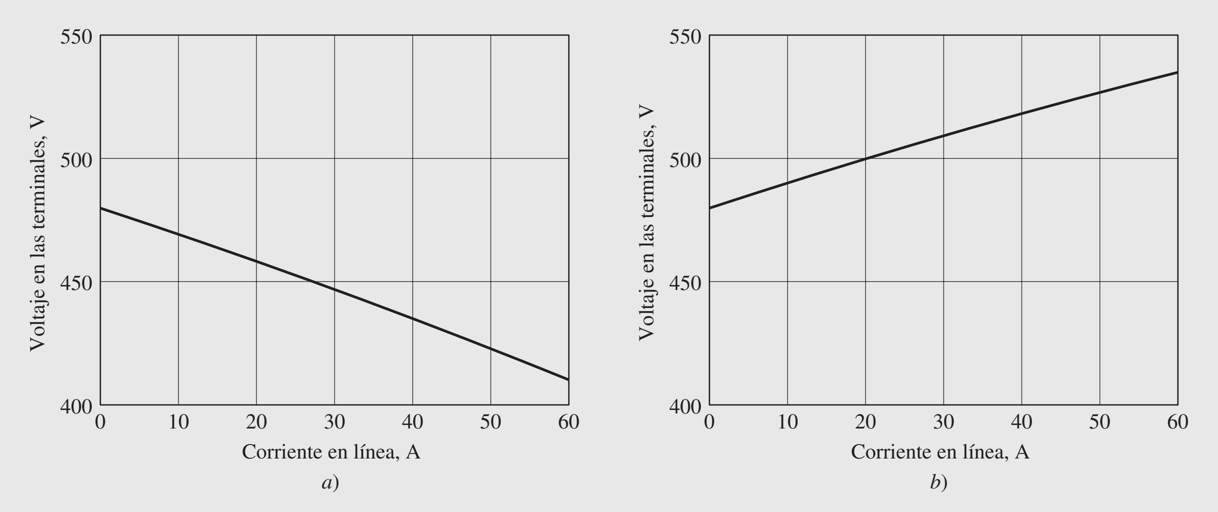


FIGURA 4-25 *a*) Característica de terminales del generador del ejemplo 4-4 cuando se le añade una carga con un FP de 0.8 en retraso. *b*) Característica de terminales del generador cuando se le añade una carga con un FP de 0.8 en adelanto.

b) Si el generador tiene una carga con una corriente con un FP de 0.8 en adelanto, el diagrama fasorial resultante sería el que se observa en la figura 4-24*c*). Para encontrar V_ϕ, el método más fácil consiste en construir un triángulo rectángulo en el diagrama fasorial, como se muestra en la figura. Con base en la figura 4-24*c*), el triángulo rectángulo brinda la siguiente información

$$E_A^2 = (V_\phi - X_S I_A \operatorname{sen} \theta)^2 + (X_S I_A \cos \theta)^2$$

Esta ecuación se puede utilizar para calcular V_ϕ en función de la corriente I_A:

$$V_\phi = \sqrt{E_A^2 - (X_S I_A \cos\theta)^2} + X_S I_A \operatorname{sen}\theta$$

También se puede emplear para calcular y hacer la gráfica de la característica de terminales de manera similar al inciso *a*). En la figura 4-25*b*) se muestra la característica de terminales resultante.

4.9 OPERACIÓN EN PARALELO DE GENERADORES DE CA

En el mundo actual es muy raro encontrar que un generador síncrono suministre independientemente su propia carga. Esta situación sólo se encuentra en algunas aplicaciones que salen de lo normal, tales como los generadores de emergencia. En todas las demás aplicaciones de generadores hay más de uno que opera en paralelo para suministrar la potencia que requieren las cargas. La situación en la red de potencia de Estados Unidos es un ejemplo extremo de esta situación, en la que literalmente miles de generadores comparten la carga del sistema.

¿Por qué se utilizan los generadores síncronos en paralelo? Hay muchas ventajas para ello:

1. Varios generadores pueden alimentar una carga más grande que una sola máquina.
2. Tener varios generadores incrementa la confiabilidad del sistema de potencia, debido a que la falla de cualquiera de ellos no causa la pérdida total de potencia en la carga.
3. Tener varios generadores que operan en paralelo permite la remoción de uno o más de ellos para cortes de potencia y mantenimientos preventivos.
4. Si se utiliza un solo generador y éste no opera cerca de plena carga, entonces será relativamente ineficiente. Con varias máquinas más pequeñas que trabajan en paralelo es posible operar sólo una fracción de ellas. Las que operan lo hacen casi a plena carga y por lo tanto de manera más eficiente.

En esta sección se estudian los requerimientos para tener generadores de ca en paralelo y luego estudia el comportamiento de los generadores síncronos que operan en paralelo.

Condiciones requeridas para operar en paralelo

La figura 4-26 muestra un generador síncrono G_1 que suministra potencia a una carga con otro generador G_2 a punto de conectarse en paralelo con G_1 por medio del cierre del interruptor S_1. ¿Qué condiciones se deben cumplir antes de poder cerrar el interruptor y de conectar los dos generadores?

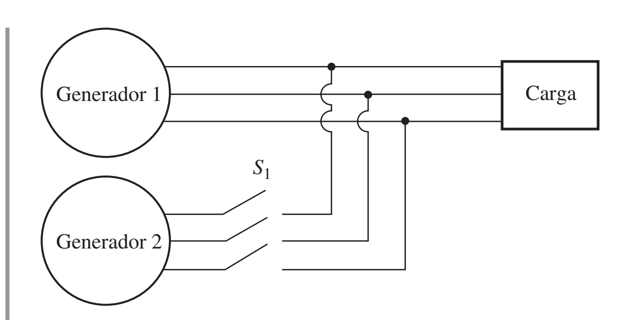


FIGURA 4-26 Generador que se conecta en paralelo con un sistema de potencia en operación.

Si el interruptor se cierra de manera arbitraria en cualquier momento, es posible que los generadores se dañen severamente y que la carga pierda potencia. Si los voltajes no son exactamente iguales en cada uno de los generadores que se conectarán juntos, habrá un flujo de corriente *muy* grande cuando se cierre el interruptor. Para evitar este problema, cada una de las tres fases debe tener *exactamente la misma magnitud de voltaje y ángulo de fase* que el conductor al que se conectará. En otras palabras, el voltaje en la fase *a* debe ser *exactamente* igual al voltaje en la fase *a′* y así en forma sucesiva para las fases *b*-*b′* y *c*-*c′*. Para lograr lo anterior, se deben cumplir las siguientes *condiciones de puesta en paralelo*:

1. Los *voltajes de línea* rms de los dos generadores deben ser iguales.
2. Los dos generadores deben tener la misma *secuencia de fase*.
3. Los ángulos de fase de las dos fases *a* deben ser iguales.
4. La frecuencia del generador nuevo, llamado *generador en aproximación*, debe ser un poco mayor que la frecuencia del sistema en operación.

Estas condiciones de puesta en paralelo requieren ciertas explicaciones. La condición 1 es obvia: para que dos grupos de voltajes sean idénticos, deben tener la misma magnitud de voltaje rms. Los voltajes en las fases *a* y *a′* serán completamente idénticos en todo momento si ambas magnitudes y sus ángulos son iguales, lo que explica la condición 3.

La condición 2 asegura que la secuencia en la que el voltaje de fase llegue a su pico en los dos generadores sea la misma. Si la secuencia de fase es diferente (como se observa en la figura 4-27*a*), entonces aun cuando un par de voltajes (los de fase *a*) estén en fase, los otros dos pares de voltajes estarán desfasados por 120°. Si se conectan los generadores de esta manera, no habrá problema con la fase *a*, pero fluirán enormes corrientes en las fases *b* y *c*, lo que dañará ambas máquinas. Para corregir el problema de secuencia de fase, simplemente se intercambian las conexiones en dos de las tres fases en una de las máquinas.

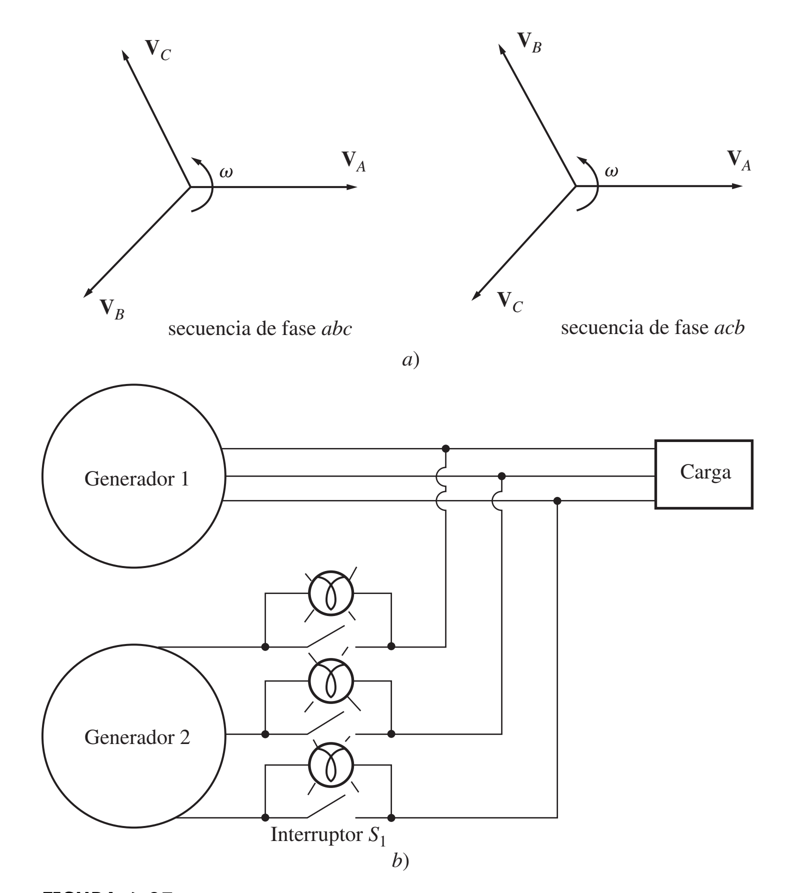


FIGURA 4-27 *a*) Las dos secuencias de fase posibles en un sistema trifásico. *b*) Método de las tres lámparas para encontrar la secuencia de fase.

Si las frecuencias de los generadores no son muy parecidas cuando se conectan juntos, se presentarán grandes potencias transitorias hasta que se estabilicen los generadores en una frecuencia común. Las frecuencias de las dos máquinas deben ser casi iguales, pero no pueden ser exactamente iguales. Deben diferir por una pequeña cantidad para que los ángulos de fase de la máquina en aproximación cambien en forma lenta con respecto a los ángulos de fase del sistema en operación. De esta manera se pueden observar los ángulos entre los voltajes y se puede cerrar el interruptor S_1 cuando los sistemas estén exactamente en fase.

Procedimiento general para conectar generadores en paralelo

Supóngase que se va a conectar el generador G_2 al sistema en operación que se muestra en la figura 4-27. Se deben seguir los siguientes pasos para conectarlos en paralelo.

Primero, por medio de voltímetros se debe ajustar la corriente de campo del generador en aproximación hasta que su voltaje en las terminales sea igual al voltaje en línea del sistema en operación.

Segundo, la secuencia de fase del generador en aproximación se debe comparar con la secuencia de fase del sistema en operación. La secuencia de fase se puede revisar de muchas maneras. Una de ellas es conectar alternativamente un pequeño motor de inducción a las terminales de cada uno de los dos generadores. Si el motor gira en la misma dirección en ambas ocasiones, entonces la secuencia de fase es la misma. Si el motor gira en direcciones opuestas, entonces las secuencias de fase son diferentes y se deben invertir dos de los conductores del generador en aproximación.

Otra manera de revisar la secuencia de fase es el *método de las tres lámparas*. En este método, se conectan tres lámparas a través de las terminales abiertas del interruptor que conecta el generador al sistema, como se muestra en la figura 4-27*b*). Conforme la fase cambia entre los dos sistemas, las lámparas lucirán primero brillantes (una gran diferencia de fase) y luego tendrán una luz tenue (una diferencia de fase pequeña). *Si las tres lámparas lucen brillantes y se apagan al mismo tiempo, los sistemas tienen la misma secuencia de fase*. Si las lámparas lucen brillantes sucesivamente, los sistemas tienen secuencias de fase opuestas y se debe invertir una de las secuencias.

A continuación, la frecuencia del generador en aproximación se ajusta para que sea un poco más alta que la frecuencia del sistema en operación. Esta tarea se lleva a cabo primero observando un medidor de frecuencia hasta que las frecuencias sean similares y entonces se observan los cambios de fase entre los sistemas. Se ajusta el generador en aproximación a una frecuencia un poco más alta para que cuando se conecte a la línea suministre potencia como generador, en lugar de consumirla como lo hace un motor (este punto se explicará más adelante).

Una vez que las frecuencias son casi iguales, los voltajes en los dos sistemas cambian de fase muy lentamente con respecto al otro. Se observan los cambios de fase y cuando los ángulos de fase son iguales, se apaga el interruptor que conecta a los dos sistemas.

¿Cómo se puede saber cuando los dos sistemas están por fin en fase? Una manera sencilla es observar las tres lámparas que se describieron cuando se explicó la secuencia de fase. Cuando se apagan las tres lámparas, la diferencia de voltajes a través de ellas es cero y los sistemas están en fase. Este sencillo esquema funciona, pero no es muy exacto. Un método mejor es la utilización de un sincronoscopio. Un *sincronoscopio* es un medidor que mide la diferencia en los ángulos de fase entre las fases *a* de los dos sistemas. En la figura 4-28 se puede ver el esquema de la parte frontal de un sincronoscopio. El cuadrante muestra la diferencia de fase entre las dos fases *a*: el 0 (que significa en fase) se ubica en la parte superior y el 180° en la parte inferior. Debido a que las frecuencias de los dos sistemas son un poco diferentes, el ángulo de fase en el medidor cambiará lentamente. Si el generador o sistema en aproximación es más rápido que el sistema en operación (situación deseada), el ángulo de fase avanza y la aguja del sincronoscopio gira en el sentido de las manecillas del reloj. Si la máquina en aproximación es más lenta, la aguja gira en sentido contrario a las manecillas del reloj. Cuando la aguja del sincronoscopio está en una posición vertical, los voltajes están en fase y se puede cerrar el interruptor para conectar el sistema.

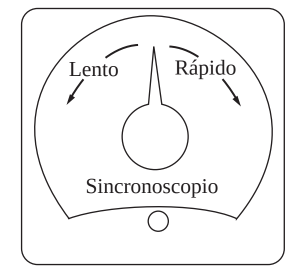


FIGURA 4-28
Sincronoscopio.

Sin embargo, nótese que un *sincronoscopio verifica las relaciones en sólo una fase*. No brinda información sobre la secuencia de fases.

En los generadores más grandes que pertenecen a sistemas de potencia, todo el proceso de conectar un generador nuevo en paralelo está automatizado y una computadora lleva a cabo esta tarea. Sin embargo, en generadores más pequeños el operador ejecuta a mano los pasos antes descritos de conexión en paralelo.

Características de frecuencia-potencia y de voltaje-potencia reactiva de un generador síncrono

Todos los generadores son accionados por un *motor primario*, que es la fuente de potencia mecánica del generador. El tipo más común de motor primario es la turbina de vapor, pero hay otros tipos, que incluyen los motores de diesel, las turbinas de gas, las turbinas hidráulicas e incluso las turbinas de viento.

Sin que importe la fuente original de potencia, todos los motores primarios tienden a comportarse de manera similar; a medida que la potencia que se toma de ellos se incrementa, la velocidad

a la que giran disminuye. Por lo general, este decremento de velocidad es no lineal, pero se incluye algún tipo de mecanismo regulador para que la disminución de la velocidad sea lineal con el incremento de la demanda de potencia.

Cualquiera que sea el mecanismo regulador presente en el motor primario, siempre se ajusta para suministrar una característica de caída suave con el incremento en la carga. La siguiente ecuación define la caída de velocidad (SD, por sus siglas en inglés) en un motor primario

$$\mathrm{SD} = \frac{n_{sc} - n_{pc}}{n_{pc}} \times 100\% \tag{4-27}$$

donde n_{sc} es la velocidad del motor primario en vacío y n_{pc} es la velocidad del motor primario a plena carga. La mayoría de los motores primarios tienen una caída de velocidad de 2 a 4%, como se define en la ecuación (4-27). Además, la mayoría de los mecanismos regulares contienen algún tipo de ajuste del punto fijado para permitir que varíe la velocidad de vacío de la turbina. En la figura 4-29 se muestra una gráfica típica de la velocidad y la potencia.

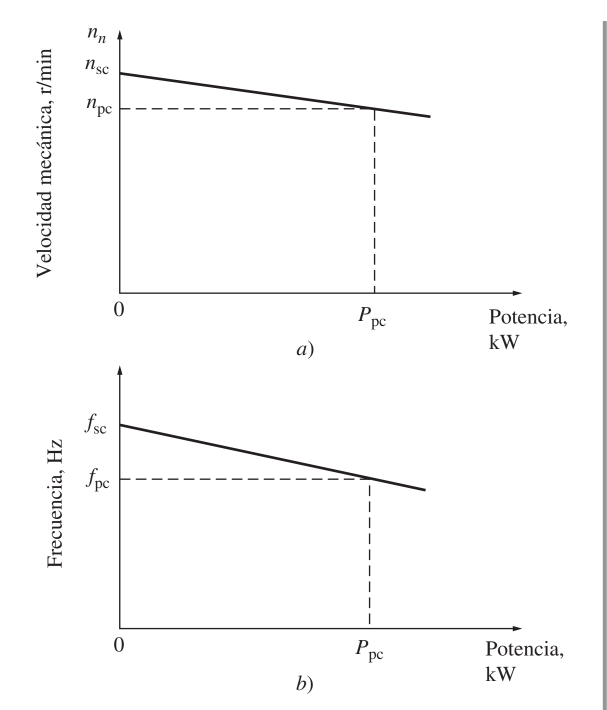


FIGURA 4-29 *a*) Curva de velocidad contra potencia de un motor primario típico. *b*) Curva de frecuencia contra potencia resultante del generador.

Debido a que la velocidad del eje está relacionada con la frecuencia eléctrica resultante por medio de la ecuación (4-34),

$$f_e = \frac{n_m P}{120} \tag{3-34}$$

la potencia de salida de un generador síncrono está relacionada con su frecuencia. En la figura 4-29*b*) se puede ver un ejemplo de una gráfica de la frecuencia y la potencia. Las características de frecuencia-potencia de este tipo desempeñan un papel esencial en la operación en paralelo de los generadores síncronos.

La relación entre la frecuencia y la potencia se puede describir cuantitativamente por medio de la ecuación

$$P = s_P(f_{sc} - f_{sis}) \tag{4-28}$$

donde

P = potencia de salida del generador
f_{sc} = frecuencia en vacío del generador
f_{sis} = frecuencia de operación del sistema
s_P = pendiente de la curva, en kW/Hz o MW/Hz

Se puede deducir una relación similar para la potencia reactiva Q y el voltaje en las terminales V_T. Como ya se explicó, cuando se añade una carga en retraso a un generador síncrono, su voltaje en las terminales disminuye. De manera similar, cuando se añade una carga en adelanto a un generador síncrono, se incrementa su voltaje en las terminales. Es posible hacer una gráfica del voltaje en las terminales y la potencia reactiva, y tal gráfica tiene una característica de caída como la que se observa en la figura 4-30. Esta característica no es intrínsecamente lineal, pero muchos generadores de voltaje incluyen un dispositivo para que sea lineal. La curva de la característica se puede mover hacia arriba o hacia abajo por medio del cambio del punto de ajuste del voltaje de las terminales en vacío del regulador de voltaje. Como con la característica de frecuencia-potencia, esta curva juega un papel importante en la operación de generadores síncronos en paralelo.

La relación entre el voltaje en las terminales y la potencia reactiva se puede expresar por medio de una ecuación similar a la relación de frecuencia-potencia [ecuación (4-28)] si el regulador de voltaje produce una salida lineal con cambios en la potencia reactiva.

Es importante darse cuenta de que cuando un generador opera solo, la potencia real P y la potencia reactiva Q suministradas por el generador será la cantidad demandada por la carga conectada al generador (las P y Q suministradas no pueden ser reguladas con los controles del generador). Por

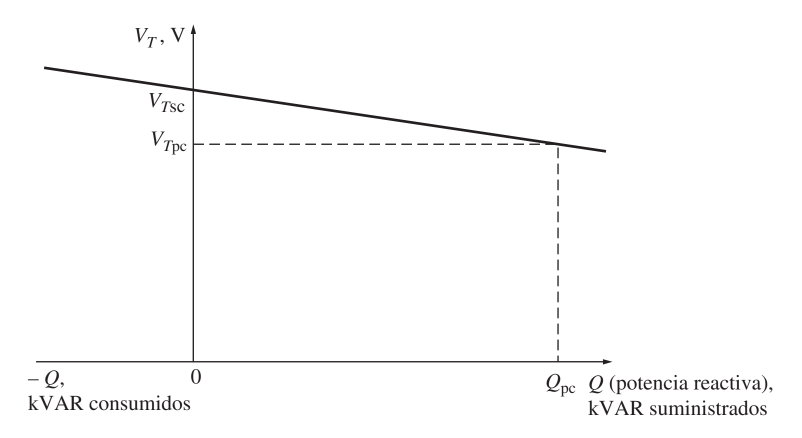


FIGURA 4-30 Curva de voltaje en las terminales (V_T) contra la potencia reactiva (Q) de un generador síncrono.

lo tanto, para cualquier potencia real, los puntos de ajuste del mecanismo regulador controlan la frecuencia de operación f_e, del generador y para cualquier potencia reactiva, la corriente de campo controla el voltaje en las terminales V_T del generador.

EJEMPLO 4-5

La figura 4-31 muestra a un generador que suministra potencia a una carga. Se conecta una segunda carga en paralelo con la primera. El generador tiene una frecuencia en vacío de 61.0 Hz y una pendiente s_P de 1 MW/Hz. La carga 1 consume una potencia real de 1 000 kW con un FP de 0.8 en retraso, mientras que la carga 2 consume una potencia real de 800 kW con un FP de 0.707 en retraso.

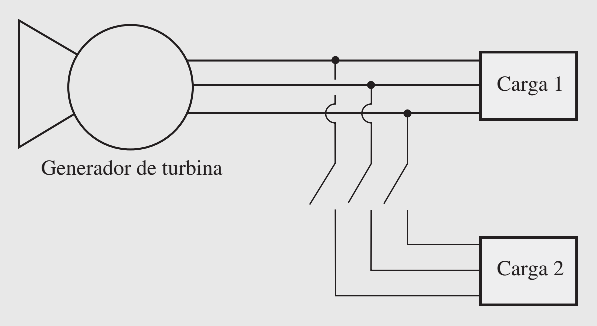


FIGURA 4-31 Sistema de potencia del ejemplo 4-5.

a) Antes de que se cierre el interruptor, ¿cuál es la frecuencia de operación del sistema?
b) Después de conectar la carga 2, ¿cuál es la frecuencia de operación del sistema?
c) Después de conectar la carga 2, ¿qué acciones puede llevar a cabo el operador para restaurar la frecuencia del sistema a 60 Hz?

Solución

Este ejercicio establece que la pendiente de la característica del generador es de 1 MW/Hz y que su frecuencia en vacío es de 61 Hz. Por lo tanto, la potencia que produce está dada por

$$P = s_P(f_{\text{sc}} - f_{\text{sis}}) \qquad \textbf{(4-28)}$$

entonces

$$f_{\text{sis}} = f_{\text{sc}} - \frac{P}{s_P}$$

a) La frecuencia inicial del sistema está dada por

$$f_{\text{sis}} = f_{\text{sc}} - \frac{P}{s_P}$$

$$= 61\ \text{Hz} - \frac{1\,000\ \text{kW}}{1\ \text{MW/Hz}} = 61\ \text{Hz} - 1\ \text{Hz} = 60\ \text{Hz}$$

b) Una vez que se conecta la carga 2,

$$f_{\text{sis}} = f_{\text{sc}} - \frac{P}{s_P}$$

$$= 61\ \text{Hz} - \frac{1\,800\ \text{kW}}{1\ \text{MW/Hz}} = 61\ \text{Hz} - 1.8\ \text{Hz} = 59.2\ \text{Hz}$$

c) Una vez que se conecta la carga, la frecuencia del sistema cae hasta 59.2 Hz. Para restaurar el sistema a su frecuencia de operación adecuada, se deben incrementar los puntos de ajuste del mecanismo regulador en vacío en 0.8 Hz, a 61.8 Hz. Esta acción restaurará la frecuencia del sistema a 60 Hz.

Para resumir, cuando un solo generador alimenta las cargas del sistema, entonces

1. Las potencias real y reactiva que suministra el generador serán la cantidad que demanda la carga conectada.
2. Los puntos de ajuste del mecanismo regulador controlarán la frecuencia de operación del sistema de potencia.
3. La corriente de campo (o los puntos de ajuste del regulador de campo) controlará el voltaje en las terminales del sistema de potencia.

Ésta es la situación que se presenta en los generadores aislados en ambientes de campo remotos.

Operación de generadores en paralelo con grandes sistemas de potencia

Cuando un generador síncrono se conecta a un sistema de potencia, a menudo el sistema de potencia es tan grande que *ninguna* de las acciones del operador del generador tendrá gran efecto en el sistema de potencia. Un ejemplo de esta situación es la conexión de un solo generador en la red de potencia de Estados Unidos, que es tan grande que ninguna acción razonable por parte del operador podrá causar un cambio observable en la frecuencia total de la red.

Este fenómeno se idealiza en el concepto de bus infinito. Un *bus infinito* es un sistema de potencia tan grande que su voltaje y frecuencia no cambian sin importar qué tanta potencia real y reactiva se le demande o se le suministre. En la figura 4-32*a*) se muestra la característica de potencia-frecuencia de un sistema como éste y en la figura 4-32*b*) se puede ver su característica de potencia reactiva-voltaje.

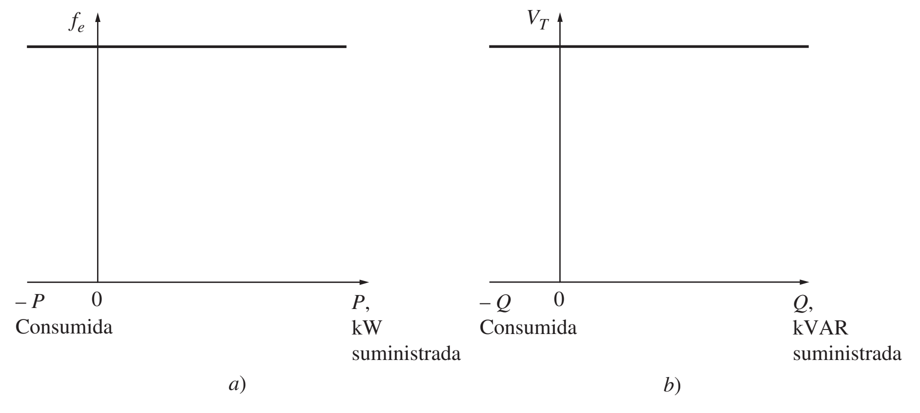


FIGURA 4-32 Curvas de un bus infinito: *a*) frecuencia contra potencia y *b*) voltaje en las terminales contra potencia reactiva.

Para entender el comportamiento de un generador que está conectado a un sistema tan grande, examínese un sistema que conste de un generador y un bus infinito en paralelo que suministre potencia a una carga. Supóngase que el motor primario del generador tiene un mecanismo regulador, pero que el campo se controla manualmente por medio de un resistor. Es más fácil explicar la operación del generador sin considerar el regulador de corriente de campo automático si es que éste se encuentra presente. En la figura 4-33*a*) se muestra un sistema como éste.

Cuando se conecta un generador en paralelo con otro generador o con un sistema grande, *la frecuencia y voltaje en las terminales de todas las máquinas deben ser iguales*, debido a que sus conductores de salida están unidos. Por lo tanto, sus características de frecuencia-potencia real y de potencia reactiva-voltaje se pueden dibujar en una gráfica espalda con espalda, con un eje vertical en común. En la figura 4-33*b*) se aprecia este tipo de gráfica que a menudo se llama *diagrama de casa*.

Supóngase que el generador acaba de ser conectado en paralelo con un bus infinito de acuerdo con el procedimiento descrito con anterioridad. Entonces el generador "flotará" en la línea y suministrará una pequeña cantidad de la potencia real y muy poca o nada de la potencia reactiva. En la figura 4-34 se puede observar esta situación.

Supóngase que el generador está en paralelo con la línea, pero en lugar de tener una frecuencia un poco más elevada que el sistema en operación, tiene una frecuencia un poco más baja. En este caso, cuando se completa la conexión en paralelo, la situación resultante se muestra en la figura 4-35. Nótese que aquí la frecuencia en vacío del generador es menor que la frecuencia de operación del sistema. A esta frecuencia, la potencia que suministra el generador es en realidad negativa. En otras palabras, cuando la frecuencia en vacío del generador es menor que la frecuencia de operación del sistema, el generador en realidad consume potencia eléctrica y funciona como un motor. Para asegurar que un generador se conecta en línea —el cual debe suministrar potencia en lugar de consumirla— se ajusta la frecuencia de la máquina en aproximación a un valor un poco mayor que la frecuencia del sistema en operación. *Muchos generadores reales tienen disparadores de potencia inversa conectados a ellos, por lo que es imperativo que se conecten en paralelo con una frecuencia mayor que la del sistema en operación. Si un generador así comienza a consumir potencia, se desconectará automáticamente de la línea.*

Una vez que se conectó el generador, ¿qué pasará si se incrementan los puntos de ajuste del mecanismo regulador? El efecto de este incremento es un desplazamiento hacia arriba en la frecuencia en vacío del generador. Debido a que la frecuencia del sistema no cambia (la frecuencia de un bus infinito no puede cambiar), se incrementa la potencia suministrada por el generador. Esto se muestra en el diagrama de casa de la figura 4-36*a*) y en el diagrama fasorial de la figura 4-36*b*). Nótese en el diagrama fasorial que E_A sen δ (que es proporcional a la potencia suministrada siempre y cuando V_T permanezca constante) se incrementa, mientras que la magnitud de E_A ($= K\phi\omega$) permanece constante debido a que tanto la corriente de campo I_F como la velocidad de rotación ω no cambian. Conforme los pun-

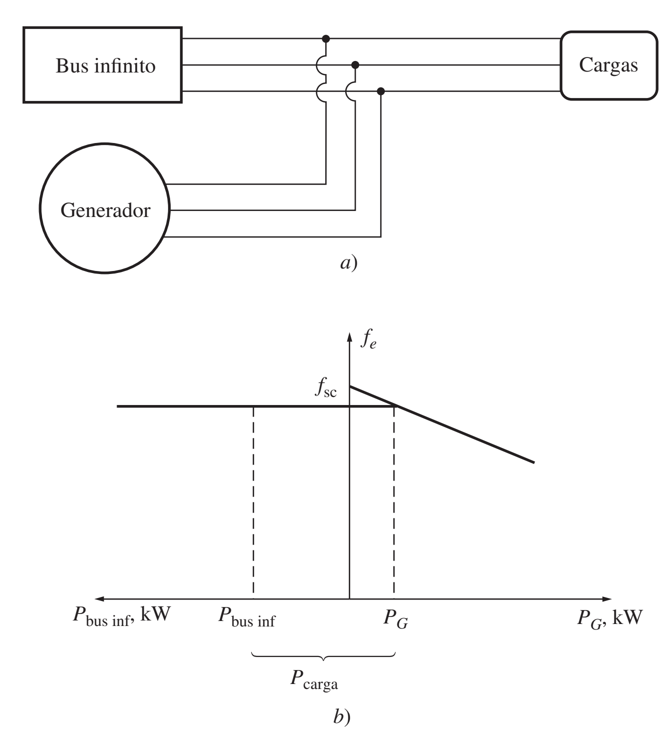


FIGURA 4-33 *a*) Generador síncrono que opera en paralelo con un bus infinito. *b*) Diagrama de frecuencia contra potencia (o *diagrama de casa*) de un generador síncrono en paralelo con un bus infinito.

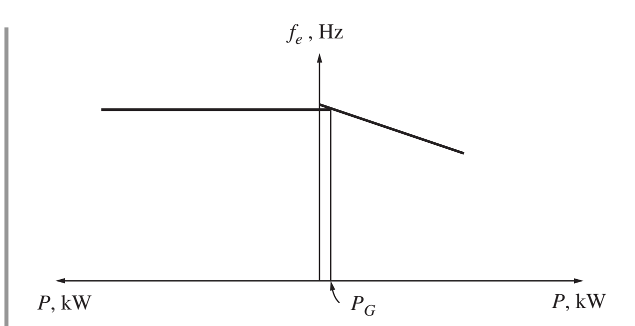


FIGURA 4-34 Diagrama de frecuencia contra potencia justo después de la conexión en paralelo.

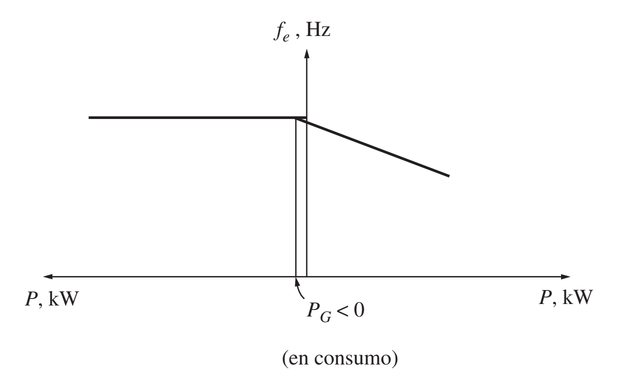


FIGURA 4-35 Diagrama de frecuencia contra potencia si la frecuencia en vacío del generador es un poco menor a la frecuencia del sistema antes de la conexión en paralelo.

tos de ajuste del mecanismo regulador se incrementan aún más, la frecuencia en vacío se incrementa y también la potencia que suministra el generador. Conforme la potencia de salida se incrementa, E_A mantiene una magnitud constante mientras que E_A sen δ sigue incrementándose.

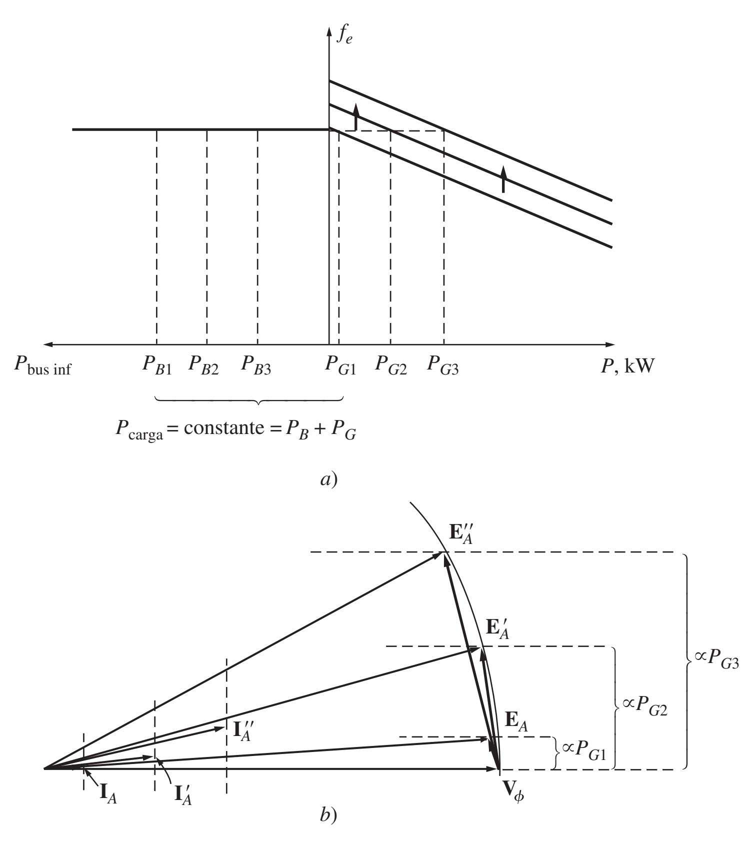


FIGURA 4-36 Efecto del incremento en los puntos de ajuste del mecanismo regulador en *a*) un diagrama de casa; *b*) un diagrama fasorial.

¿Qué sucede en este sistema si la potencia de salida del generador se incrementa hasta que excede la potencia que consume la carga? Si esto sucede, la potencia extra generada fluye de regreso al bus infinito. Un bus infinito, por definición, puede suministrar o consumir cualquier cantidad de potencia sin cambiar la frecuencia, por lo que consume la potencia extra.

Después de ajustar la potencia real del generador al nivel deseado, el diagrama fasorial del generador es como el que se muestra en la figura 4-36*b*). Nótese que en este momento el generador opera con un factor de potencia levemente en adelanto y suministra potencia reactiva negativa. Alternativamente, se puede decir que el generador consume potencia reactiva. ¿Cómo se puede ajustar el generador para que suministre cierta potencia reactiva Q al sistema? Esto se puede lograr por medio del ajuste de la corriente de campo de la máquina. Para entender por qué esta afirmación es cierta, es necesario considerar las restricciones en la operación del generador en estas circunstancias.

La primera restricción en el generador es que *la potencia debe permanecer constante* cuando cambia I_F. La potencia que entra en un generador está dada por la ecuación $P_{\text{entr}} = \tau_{\text{ind}}\omega_m$. Ahora, el motor primario de un generador síncrono tiene una característica de par-velocidad para cualquier punto de ajuste del mecanismo regulador. Esta curva sólo cambia cuando varían los puntos de ajuste del mecanismo regulador. Debido a que el generador está unido a un bus infinito, su velocidad *no puede* cambiar. Si la velocidad del generador no cambia y los puntos de ajuste del mecanismo regulador no se cambian, la potencia que suministra el generador debe permanecer constante.

Si la potencia suministrada se mantiene constante conforme cambia la corriente de campo, entonces las distancias proporcionales a la potencia en el diagrama fasorial (I_A cos θ y E_A sen δ) no pueden cambiar. Cuando se incrementa la corriente de campo, se incrementa el flujo ϕ y, por lo tanto, se incrementa E_A ($= K\phi\uparrow\omega$). Si se incrementa E_A, pero E_A sen δ debe permanecer constante, entonces el fasor $\mathbf{E}_A$ debe "deslizarse" sobre la línea de potencia constante, como se observa en la

figura 4-37. Debido a que $\mathbf{V}_\phi$, es constante, el ángulo $jX_S\mathbf{I}_A$ cambia como se muestra en la figura, y, por lo tanto, cambian el ángulo y la magnitud de $\mathbf{I}_A$. Nótese que como resultado se incrementa la distancia proporcional a Q (I_A sen θ). En otras palabras, *el incremento en la corriente de campo en un generador síncrono que opera en paralelo con un bus infinito causa el incremento de la potencia reactiva de salida del generador*.

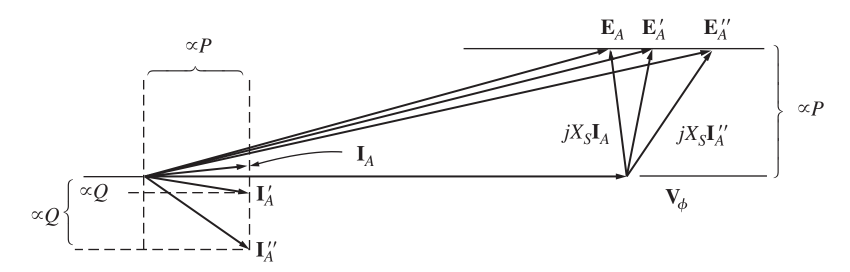


FIGURA 4-37 Efecto del incremento en la corriente de campo del mecanismo regulador en el diagrama fasorial de la máquina.

Para resumir, cuando un generador opera en paralelo con un bus infinito:

1. El sistema al que se conecta el generador controla la frecuencia y voltaje en las terminales del generador.
2. Los puntos de ajuste del mecanismo regulador del generador controlan la potencia real suministrada al sistema por el generador.
3. La corriente de campo en el generador controla la potencia reactiva suministrada al sistema por el generador.

Esta situación es muy parecida a la manera en que operan los generadores reales cuando se conectan a un sistema de potencia muy grande.

Operación de generadores en paralelo con otros generadores del mismo tamaño

Cuando un generador opera solo, las potencias real y reactiva (P y Q) que suministra el generador son fijas, están restringidas a ser iguales a la potencia demandada por el sistema y los puntos de ajuste del mecanismo regulador y la corriente de campo varían la frecuencia y el voltaje en las terminales. Cuando un generador opera en paralelo con un bus infinito, éste restringe la frecuencia y al voltaje en las terminales a ser constantes y los puntos de ajuste del mecanismo regulador y la corriente de campo varían las potencias real y reactiva. ¿Qué sucede cuando un generador síncrono se conecta en paralelo no con un bus infinito, sino con otro generador del mismo tamaño? ¿Cuál será el efecto de cambiar los puntos de ajuste del mecanismo regulador y las corrientes de campo?

En la figura 4-38*a*) se puede ver el sistema resultante si se conecta un generador en paralelo con otro del mismo tamaño. En este sistema la restricción básica es que *la suma de las potencias real y reactiva que suministran los dos generadores deben ser iguales a la P y Q que demanda el sistema*. La frecuencia del sistema no está restringida a ser constante ni tampoco la potencia de un generador lo está. En la figura 4-38*b*) se muestra el diagrama de potencia-frecuencia de un sistema de este tipo inmediatamente después de que G_2 se conecta en paralelo con la línea. En este caso, la potencia total P_{tot} (que es igual a P_{carga}) está dada por

$$P_{\text{tot}} = P_{\text{carga}} = P_{G1} + P_{G2} \tag{4-29a}$$

y la potencia reactiva total está dada por

$$Q_{\text{tot}} = Q_{\text{carga}} = Q_{G1} + Q_{G2} \tag{4-29b}$$

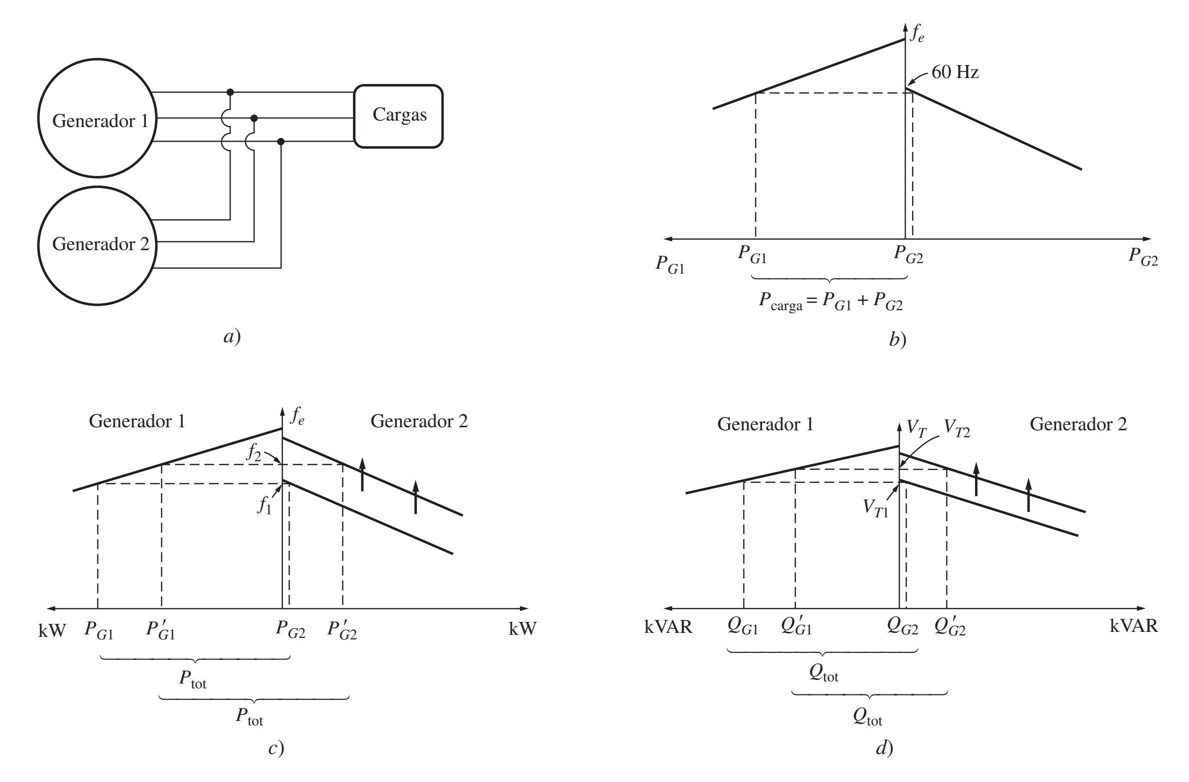


FIGURA 4-38 *a*) Generador conectado en paralelo con otra máquina del mismo tamaño. *b*) Su correspondiente diagrama de casa en el momento en que el generador 2 se conecta en paralelo con el sistema. *c*) Efecto en el sistema debido al incremento de los puntos de ajuste del mecanismo regulador del generador 2 en operación. *d*) Efecto en el sistema debido al incremento de la corriente de campo del generador 2 en operación.

¿Qué sucede si se incrementan los puntos de ajuste del gobernador de G_2? Cuando se incrementan los puntos de ajuste del mecanismo regulador de G_2, la curva de potencia-frecuencia de G_2 se desplaza hacia arriba, como se muestra en la figura 4-38*c*). Recuérdese que la potencia total suministrada a la carga no debe cambiar. A la frecuencia original f_1, la potencia suministrada por G_1 y G_2 será mayor que la demanda de la carga, por lo que el sistema no puede continuar operando a la misma frecuencia que antes. De hecho, sólo hay una frecuencia a la que la suma de la potencia de salida de los dos generadores es igual a P_{carga}. Esa frecuencia f_2 es mayor que la frecuencia original de operación del sistema. A esa frecuencia, G_2 suministra más potencia que antes y G_1 suministra menos potencia que antes.

Por lo tanto, cuando dos generadores operan juntos, un incremento en los puntos de ajuste del mecanismo regulador de uno de ellos

1. *Incrementa la frecuencia del sistema.*
2. *Incrementa la potencia que suministra ese generador, a la vez que reduce la potencia que suministra el otro.*

¿Qué sucede si se incrementa la corriente de campo de G_2? En la figura 4-38*d*) se muestra el comportamiento resultante, que es análogo a la situación de potencia real. Cuando dos generadores operan juntos y se incrementa la corriente de campo de G_2,

1. *Se incrementa el voltaje en las terminales del sistema.*
2. *Se incrementa la potencia reactiva Q suministrada por ese generador, a la vez que disminuye la potencia reactiva suministrada por el otro generador.*

Si se conocen las pendientes y frecuencias en vacío de las curvas de caída de velocidad (frecuencia-potencia) del generador, entonces se pueden determinar cuantitativamente las potencias

suministradas por cada generador y la frecuencia del sistema resultante. En el ejemplo 4-6 se puede apreciar la manera de conseguir lo anteriormente expuesto.

EJEMPLO 4-6

La figura 4-38*a*) muestra dos generadores que alimentan una carga. El generador 1 tiene una frecuencia en vacío de 61.5 Hz y una pendiente s_{P1} de 1 MW/Hz. El generador 2 tiene una frecuencia en vacío de 61.0 Hz y una pendiente s_{P2} de 1 MW/Hz. Los dos generadores alimentan una carga real de 2.5 MW en total con un factor de potencia de 0.8 en retraso. En la figura 4-39 se observa el sistema de potencia-frecuencia resultante o diagrama de casa.

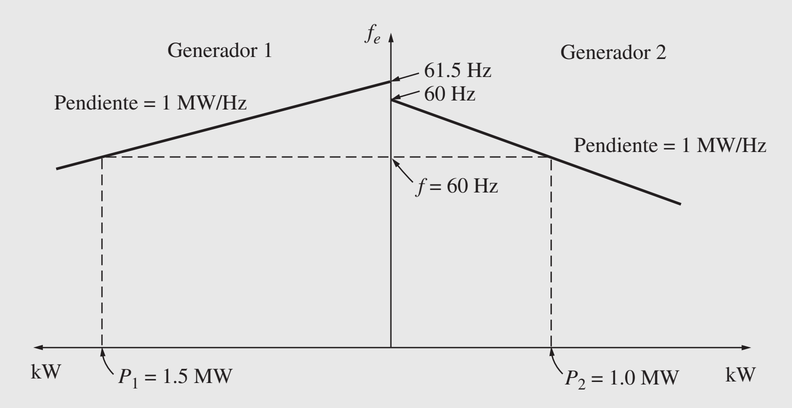


FIGURA 4-39 Diagrama de casa del sistema del ejemplo 4-6.

a) ¿A qué frecuencia opera este sistema y cuánta potencia suministra cada uno de los generadores?
b) Supóngase que se añade una carga adicional de 1 MW al sistema de potencia. ¿Cuál será la nueva frecuencia del sistema y cuánta potencia suministrarán ahora G_1 y G_2?
c) Si el sistema mantiene la configuración descrita en el inciso *b*), ¿cuál será la frecuencia del sistema y las potencias de los generadores si se incrementan en 0.5 Hz los puntos de ajuste del mecanismo regulador de G_2?

Solución

La potencia que produce un generador síncrono con una pendiente dada y una frecuencia en vacío está dada por la ecuación (4-28):

$$P_1 = s_{P1}(f_{\text{sc},1} - f_{\text{sis}})$$
$$P_2 = s_{P2}(f_{\text{sc},2} - f_{\text{sis}})$$

En razón de que la potencia total suministrada por los generadores debe ser igual a la potencia consumida por las cargas,

$$P_{\text{carga}} = P_1 + P_2$$

Estas ecuaciones se pueden utilizar para contestar todas las preguntas planteadas.

a) En el primer caso, ambos generadores tienen una pendiente de 1 MW/Hz, y G_1 tiene una frecuencia en vacío de 61.5 Hz, mientras que G_2 tiene una frecuencia en vacío de 61.0 Hz. La carga total es de 2.5 MW. Por lo tanto, la frecuencia del sistema se puede encontrar de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} P_{\text{carga}} &= P_1 + P_2 \\ &= s_{P1}(f_{\text{sc},1} - f_{\text{sis}}) + s_{P2}(f_{\text{sc},2} - f_{\text{sis}}) \\ 2.5\text{ MW} &= (1\text{ MW/Hz})(61.5\text{ Hz} - f_{\text{sis}}) + (1\text{ MW/Hz})(61\text{ Hz} - f_{\text{sis}}) \\ &= 61.5\text{ MW} - (1\text{ MW/Hz})f_{\text{sis}} + 61\text{ MW} - (1\text{ MW/Hz})f_{\text{sis}} \\ &= 122.5\text{ MW} - (2\text{ MW/Hz})f_{\text{sis}} \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$f_{\text{sis}} = \frac{122.5\text{ MW} - 2.5\text{ MW}}{(2\text{ MW/Hz})} = 60.0\text{ Hz}$$

Las potencias resultantes que suministran los dos generadores son

$$\begin{aligned} P_1 &= s_{P1}(f_{sc,1} - f_{sis}) \\ &= (1 \text{ MW/Hz})(61.5 \text{ Hz} - 60.0 \text{ Hz}) = 1.5 \text{ MW} \\ P_2 &= s_{P2}(f_{sc,2} - f_{sis}) \\ &= (1 \text{ MW/Hz})(61.0 \text{ Hz} - 60.0 \text{ Hz}) = 1 \text{ MW} \end{aligned}$$

b) Cuando se incrementa la carga en 1 MW, la carga total es de 3.5 MW. La nueva frecuencia del sistema está dada por

$$\begin{aligned} P_{carga} &= s_{P1}(f_{sc,1} - f_{sis}) + s_{P2}(f_{sc,2} - f_{sis}) \\ 3.5 \text{ MW} &= (1 \text{ MW/Hz})(61.5 \text{ Hz} - f_{sis}) + (1 \text{ MW/Hz})(61 \text{ Hz} - f_{sis}) \\ &= 61.5 \text{ MW} - (1 \text{ MW/Hz})f_{sis} + 61 \text{ MW} - (1 \text{ MW/Hz})f_{sis} \\ &= 122.5 \text{ MW} - (2 \text{ MW/Hz})f_{sis} \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$f_{sis} = \frac{122.5 \text{ MW} - 3.5 \text{ MW}}{(2 \text{ MW/Hz})} = 59.5 \text{ Hz}$$

Las potencias resultantes son

$$\begin{aligned} P_1 &= s_{P1}(f_{sc,1} - f_{sis}) \\ &= (1 \text{ MW/Hz})(61.5 \text{ Hz} - 59.5 \text{ Hz}) = 2.0 \text{ MW} \\ P_2 &= s_{P2}(f_{sc,2} - f_{sis}) \\ &= (1 \text{ MW/Hz})(61.0 \text{ Hz} - 59.5 \text{ Hz}) = 1.5 \text{ MW} \end{aligned}$$

c) Si se incrementan en 0.5 Hz los puntos de ajuste del mecanismo regulador en vacío de G_2, la nueva frecuencia del sistema es

$$\begin{aligned} P_{carga} &= s_{P1}(f_{sc,1} - f_{sis}) + s_{P2}(f_{sc,2} - f_{sis}) \\ 3.5 \text{ MW} &= (1 \text{ MW/Hz})(61.5 \text{ Hz} - f_{sis}) + (1 \text{ MW/Hz})(61.5 \text{ Hz} - f_{sis}) \\ &= 123 \text{ MW} - (2 \text{ MW/Hz})f_{sis} \\ f_{sis} &= \frac{123 \text{ MW} - 3.5 \text{ MW}}{(2 \text{ MW/Hz})} = 59.75 \text{ Hz} \end{aligned}$$

Las potencias resultantes son

$$\begin{aligned} P_1 = P_2 &= s_{P1}(f_{sc,1} - f_{sis}) \\ &= (1 \text{ MW/Hz})(61.5 \text{ Hz} - 59.75 \text{ Hz}) = 1.75 \text{ MW} \end{aligned}$$

Nótese que la frecuencia del sistema se incrementó, la potencia suministrada por G_2 aumentó y la potencia suministrada por G_1 cayó.

Cuando dos generadores de tamaño similar operan en paralelo, el cambio en los puntos de ajuste del mecanismo regulador de uno de ellos cambia tanto la frecuencia del sistema como la repartición de potencia entre ellos. Sería deseable ajustar sólo una de estas cantidades a la vez. ¿Cómo se puede ajustar la repartición de potencia del sistema de potencia independientemente de la frecuencia del sistema y viceversa?

La respuesta es muy simple. El incremento en los puntos de ajuste del mecanismo regulador de un generador incrementa la potencia de la máquina y aumenta la frecuencia del sistema. La disminución de los puntos de ajuste del mecanismo regulador en el otro generador disminuye la potencia de la máquina y la frecuencia del sistema. Por lo tanto, para ajustar la repartición de potencia sin cambiar la frecuencia del sistema se deben *incrementar los puntos de ajuste del mecanismo regulador de un generador y simultáneamente disminuir los puntos de ajuste del mecanismo regulador del otro generador* (véase figura 4-40*a*). De manera similar, *para ajustar la frecuencia del sistema sin cambiar la repartición de potencia, se deben incrementar o disminuir simultáneamente ambos puntos de ajuste del mecanismo regulador* (véase figura 4-40*b*).

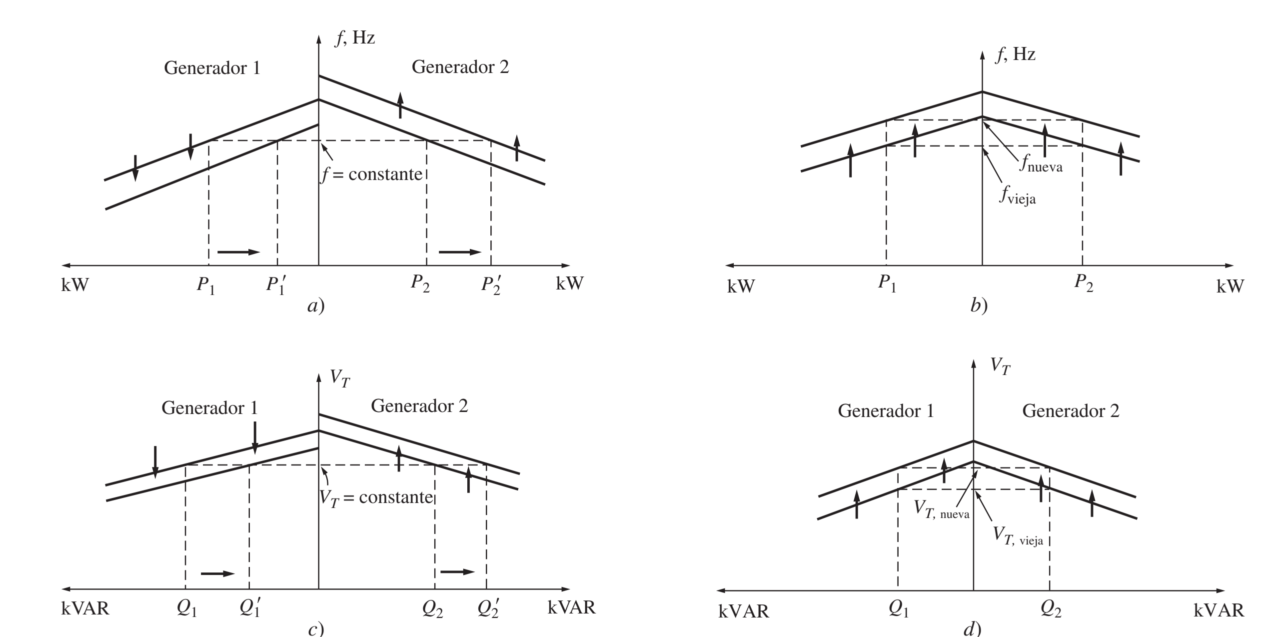


FIGURA 4-40 *a*) Cambio en la distribución de potencia sin afectar la frecuencia del sistema. *b*) Cambio de la frecuencia del sistema sin afectar la distribución de potencia. *c*) Cambio de la distribución de la potencia reactiva sin afectar el voltaje en las terminales. *d*) Cambio en el voltaje en las terminales sin afectar la distribución de la potencia reactiva.

Los ajustes a la potencia y voltaje en las terminales funcionan de manera análoga. Para desplazar la repartición de la potencia reactiva sin cambiar V_T, se debe *incrementar simultáneamente la corriente de campo de un generador y disminuir la corriente de campo en el otro* (véase figura 4-40*c*). Para cambiar el voltaje en las terminales sin afectar la repartición de potencia reactiva se deben *incrementar o disminuir simultáneamente ambas corrientes de campo* (véase figura 4-40*d*).

En resumen, en el caso de dos generadores que operan juntos:

1. El sistema está restringido a que la potencia total que suministran los dos generadores juntos sea igual a la cantidad consumida por la carga. Ni f_{sis} ni V_T están restringidos a ser constantes.
2. Para ajustar la repartición de potencia real entre los generadores sin cambiar f_{sis}, se deben incrementar simultáneamente los puntos de ajuste del mecanismo regulador en un generador al mismo tiempo que se disminuyen los puntos de ajuste en el mecanismo regulador del otro generador. La máquina cuyos puntos de ajuste del mecanismo regulador se incrementan alimentará más carga.
3. Para ajustar f_{sis} sin cambiar la repartición de potencia real, se deben incrementar o disminuir simultáneamente los puntos de ajuste del mecanismo regulador de los generadores.
4. Para ajustar la repartición de potencia reactiva entre generadores sin cambiar V_T, se debe incrementar de manera simultánea la corriente de campo de un generador a la vez que se disminuye la corriente de campo en el otro. La máquina cuya corriente de campo se incrementa alimentará más carga reactiva.
5. Para ajustar V_T sin cambiar la repartición de potencia reactiva, se deben incrementar o disminuir de manera simultánea las corrientes de campo de ambos generadores.

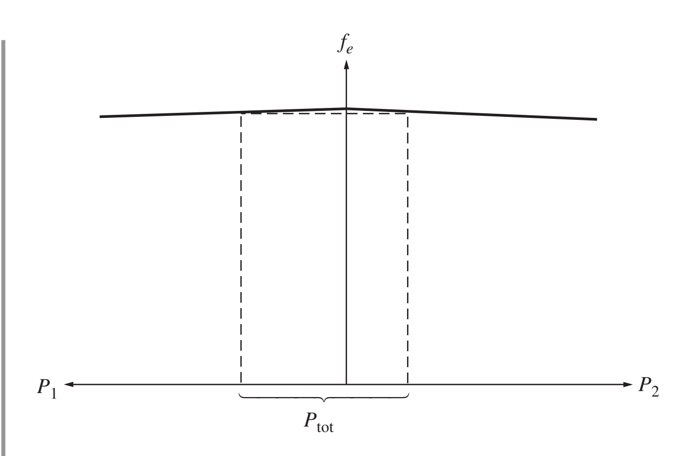


FIGURA 4-41 Dos generadores síncronos con característica de frecuencia-potencia plana. Una frecuencia en vacío muy pequeña en cualquiera de estas máquinas puede causar enormes cambios en la distribución de potencia.

Es muy importante que cualquier generador síncrono que se pretenda utilizar en paralelo con otras máquinas tenga una característica de frecuencia-potencia *descendente*. Si dos generadores tienen una característica plana o casi plana, entonces la repartición de potencia entre ellos puede variar ampliamente con los más mínimos cambios en la velocidad en vacío. Este

problema se ilustra en la figura 4-41. Nótese que incluso con cambios muy pequeños en f_{sc} en uno de los generadores se produce un fuerte cambio en la repartición de potencia. Para asegurar un buen control de la repartición de potencia entre generadores, éstos deben tener caídas de velocidad dentro de un intervalo de 2 a 5%.

4.10 TRANSITORIOS (OSCILACIONES MOMENTÁNEAS) EN LOS GENERADORES SÍNCRONOS

Cuando el par aplicado al eje de un generador o la carga de salida de un generador cambia súbitamente, siempre hay un transitorio (oscilación momentánea) que dura un periodo finito antes de que el generador retorne a su estado estacionario. Por ejemplo, cuando un generador síncrono se conecta en paralelo con un sistema de potencia en operación, inicialmente gira más rápido y tiene una frecuencia más alta que el sistema de potencia. Una vez que se conecta en paralelo, hay un periodo transitorio antes de que el generador se estabilice y trabaje en la misma frecuencia de línea a la vez que suministra a la carga una pequeña cantidad de la potencia.

Para observar esta situación remítase a la figura 4-42*a*), donde se aprecian los campos magnéticos y el diagrama fasorial del generador justo antes de conectarse en paralelo con el sistema de potencia. En este caso, el generador en aproximación no alimenta ninguna carga, esto es, su corriente en el estator es cero, $\mathbf{E}_A = \mathbf{V}_\phi$ y $\mathbf{B}_R = \mathbf{B}_{net}$.

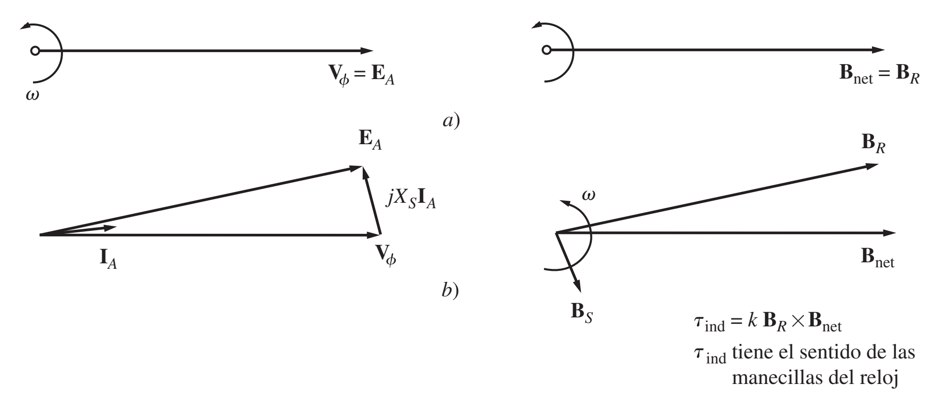


FIGURA 4-42 *a*) Diagrama fasorial y campos magnéticos de un generador en el momento de la conexión en paralelo con un sistema de potencia muy grande. *b*) Diagrama fasorial y diagrama de casa justo después de *a*). En este caso el rotor se adelanta a los campos magnéticos netos y produce un par en el sentido de las manecillas del reloj. Este par disminuye la velocidad del rotor hasta llegar a la velocidad del sistema de potencia.

Exactamente en el tiempo $t = 0$ se cierra el interruptor que conecta el generador con el sistema de potencia, lo que causa que fluya una corriente en el estator. Ya que el rotor del generador aún gira más rápido que la velocidad del sistema, continúa moviéndose por delante del voltaje del sistema $\mathbf{V}_\phi$. El par inducido en el eje del generador está dado por

$$\tau_{ind} = k\mathbf{B}_R \times \mathbf{B}_{net} \tag{3-60}$$

La dirección de este par es contraria a la dirección del movimiento y se incrementa conforme aumenta el ángulo de fase entre $\mathbf{B}_R$ y $\mathbf{B}_{net}$ (o $\mathbf{E}_A$ y $\mathbf{V}_\phi$). Este par *opuesto a la dirección del movimiento* disminuye la velocidad del generador hasta que finalmente gira a velocidad síncrona con el resto del sistema de potencia.

De manera similar, si el generador gira a una velocidad *menor* a la velocidad síncrona cuando se conecta en paralelo con el sistema de potencia, entonces el rotor queda en retraso con respecto a los campos magnéticos netos y se induce en el eje de la máquina un par *en la dirección del movimiento*. Este par incrementará la velocidad del rotor hasta que gire a velocidad síncrona.

Estabilidad transitoria en los generadores síncronos

Antes se estudió que el límite de estabilidad estática de un generador síncrono es la potencia máxima que el generador puede suministrar en cualquier circunstancia. La potencia máxima que el generador puede suministrar está dada por la ecuación (4-21):

$$P_{\text{máx}} = \frac{3V_\phi E_A}{X_S} \tag{4-21}$$

y su correspondiente par máximo es

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{3V_\phi E_A}{\omega_m X_S} \tag{4-30}$$

En teoría, un generador debe ser capaz de suministrar hasta esta cantidad de potencia y par antes de volverse inestable. En la práctica, sin embargo, la carga máxima que puede alimentar el generador está limitada a un nivel mucho menor por su *límite de estabilidad dinámica*.

Para entender la razón de este límite, considérese una vez más el generador de la figura 4-42. Si se incrementa súbitamente el par aplicado por el motor primario (τ_{ap}), se comenzará a acelerar el eje del generador y se incrementará el ángulo del par δ como se describe. Conforme se incrementa el ángulo δ, el par inducido τ_{ind} del generador se incrementará hasta un ángulo δ en el que τ_{ind} es igual y opuesto a τ_{ap}. Éste es el punto de operación en estado estacionario del generador con la nueva carga. Sin embargo, el rotor del generador tiene mucha inercia, por lo que su ángulo de par δ en realidad *rebasa* la posición de estado estacionario y se sitúa gradualmente en una oscilación amortiguada, como se muestra en la figura 4-43. Se puede determinar la forma exacta de esta oscilación amortiguada por medio de la resolución de una ecuación diferencial no lineal que no es uno de los propósitos de este libro. Para mayor información, véase el libro registrado en la bibliografía con el número 4, página 345.

El aspecto importante de la figura 4-43 es que *si el par instantáneo excede $\tau_{\text{máx}}$ en cualquier momento durante la respuesta transitoria, el generador síncrono se volverá inestable*. El tamaño de la oscilación depende de qué tan repentinamente se aplica el par adicional al generador síncrono. Si se añade de manera gradual, la máquina debe ser capaz de llegar casi al límite de estabilidad estática. De otra manera, si la carga se añade bruscamente, la máquina sólo podrá estabilizarse en un límite mucho menor que es demasiado complicado de calcular. En el caso de cambios muy abruptos en el par o en la carga, el límite de estabilidad dinámica puede ser menor a la mitad del límite de estabilidad estática.

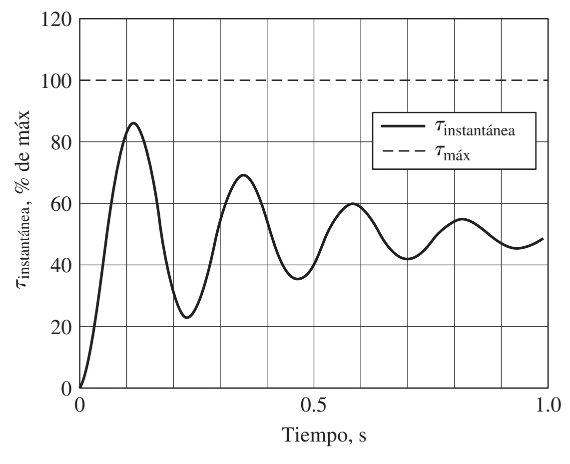


FIGURA 4-43 Respuesta dinámica si se aplica súbitamente un par igual a 50% de $\tau_{\text{máx}}$ a un generador síncrono.

Transitorios en cortocircuito en generadores síncronos

La condición transitoria más severa que se puede presentar en un generador síncrono es la situación en la que los tres terminales del generador entran en cortocircuito súbitamente. Tal corto en un sistema de potencia se llama *falla*. A continuación se describirán los diferentes componentes de la corriente presentes en un generador síncrono en cortocircuito. Estos mismos efectos se manifiestan en transitorios menos severos como cambios de carga, pero son mucho más obvios en el caso extremo de un cortocircuito.

Cuando se presenta una falla en un generador síncrono, el flujo de corriente resultante en las fases del generador es como el que se observa en la figura 4-44. La corriente en cada fase que se muestra en la figura 4-42 se puede representar como un componente transitorio de cd añadido sobre un componente de ca simétrico. El componente de ca simétrico se puede ver en la figura 4-45.

Antes de la falla, sólo hay corrientes y voltajes de ca dentro del generador, mientras que después de la falla se presentan tanto corrientes de ca como de cd. ¿De dónde salen estas corrientes? Re-

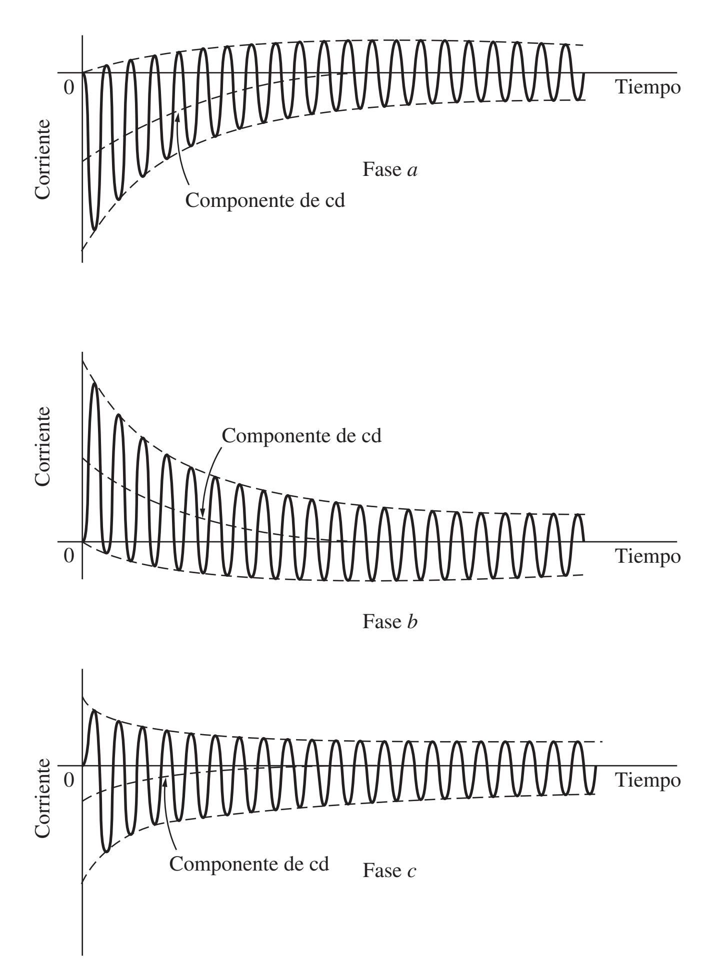


FIGURA 4-44 Corrientes de falla totales en función del tiempo durante una falla trifásica en las terminales de un generador síncrono.

cuérdese que un generador síncrono es básicamente inductivo; está modelado por un voltaje interno generado en serie con la reactancia síncrona. También recuérdese que *una corriente no puede cambiar instantáneamente en un inductor*. Cuando se presenta una falla, el componente de ca de la corriente salta a un valor muy alto, pero la corriente total no puede cambiar en ese instante. El componente de cd de la corriente es suficientemente grande como para que la *suma* de los componentes de ca y de cd justo después de la falla sea igual a la corriente de ca que fluye justo antes de la falla. Debido a que los valores instantáneos de la corriente en el momento de la falla son diferentes en cada fase, la magnitud del componente de cd de la corriente será diferente en cada fase.

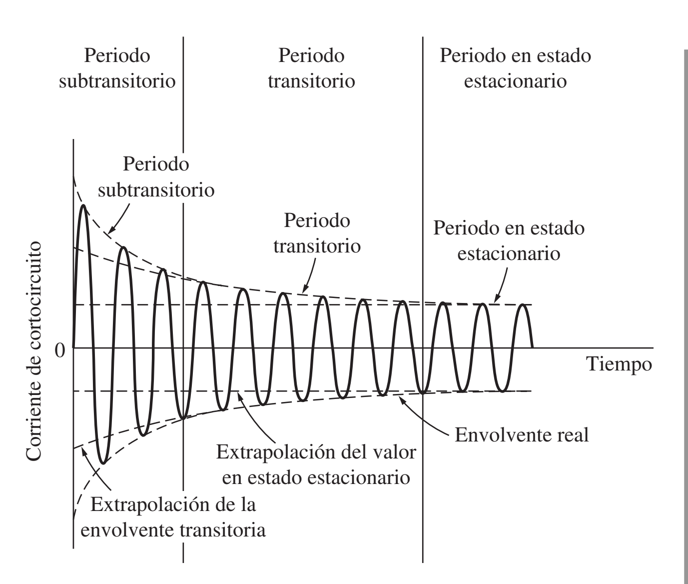


FIGURA 4-45 Componente simétrico de ca de la corriente de falla.

Estos componentes de cd de la corriente decaen con rapidez, pero al principio representan 50 o 60% del flujo de la corriente de ca en promedio en el instante después de que se presenta la falla. Por lo tanto, por lo regular la corriente total inicial es 1.5 o 1.6 veces el componente de ca.

El componente de ca simétrico de la corriente se muestra en la figura 4-45. Éste se puede dividir en aproximadamente tres periodos. Durante más o menos el primer ciclo después de que se presenta la falla, la corriente de ca es muy grande y cae con rapidez. Este periodo se llama *periodo subtransitorio*.

Una vez que termina, la corriente sigue disminuyendo a una tasa menor, hasta que por fin alcanza su estado estacionario. El periodo en el que disminuye a una tasa menor se llama *periodo transitorio* y el momento después de que alcanza su estado estacionario se conoce como *periodo en estado estacionario*.

Si se hace una gráfica de la magnitud rms del componente de ca de la corriente en función del tiempo en una escala semilogarítmica, es posible observar los tres periodos de la corriente durante la falla. Esta gráfica se muestra en la figura 4-46. Con base en ella es posible determinar las constantes de tiempo de las caídas en cada periodo.

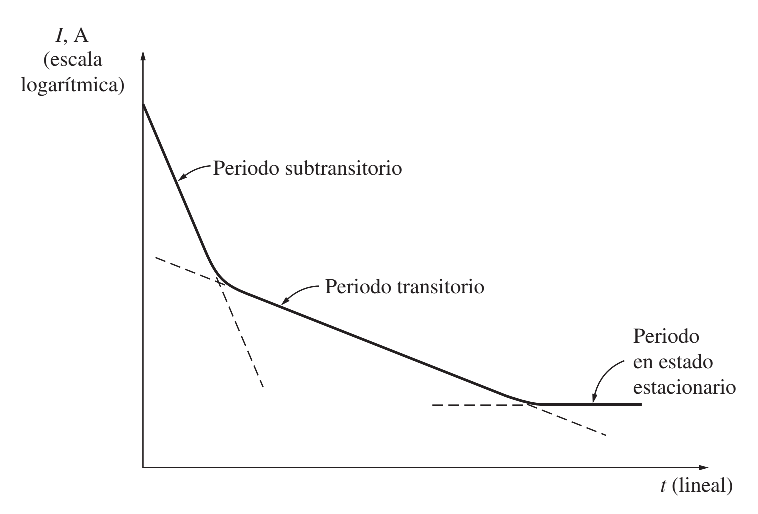


FIGURA 4-46 Gráfica semilogarítmica de la magnitud del componente de ca de la corriente de falla en función del tiempo. Con esta gráfica se pueden determinar las constantes de tiempo subtransitorias y transitorias del generador.

La corriente rms de ca que fluye en el generador durante el periodo subtransitorio se llama *corriente subtransitoria* y se denota con el símbolo I''. Los devanados de amortiguamiento (en el capítulo 5 se estudian los devanados de amortiguamiento) en un generador síncrono causan esta corriente. La constante de tiempo de la corriente subtransitoria tiene el símbolo T'' y se puede calcular con base en la pendiente de la corriente subtransitoria de la figura 4-46. A menudo, esta corriente es 10 veces el valor de la corriente de falla en estado estacionario.

La corriente rms de ca que fluye dentro del generador durante el periodo transitorio se llama *corriente transitoria* y se denota con el símbolo I'. Esta corriente la causa un componente de cd de la corriente inducida en *el circuito de campo* en el momento del corto. Esta corriente de campo incrementa el voltaje interno generado y causa un incremento en la corriente de falla. Debido a que la constante de tiempo del circuito de campo de cd es mucho más grande que la constante de tiempo de los devanados de amortización, el periodo transitorio dura mucho más que el periodo subtransitorio. Esta constante de tiempo tiene el símbolo T'. La corriente rms promedio durante el periodo transitorio a menudo es mucho mayor que 5 veces la corriente de falla en estado estacionario.

Después del periodo transitorio, la corriente de falla alcanza la condición de estado estacionario. La corriente en estado estacionario durante una falla se denota con el símbolo I_{ss}. Está dada aproximadamente por el componente de frecuencia fundamental del voltaje interno generado E_A dentro de la máquina dividido entre su reactancia síncrona:

$$I_{ss} = \frac{E_A}{X_S} \qquad \text{estado estacionario} \tag{4-31}$$

La magnitud rms de la corriente de falla de ca en un generador síncrono varía continuamente en función del tiempo. Si I'' es el componente subtransitorio de la corriente en el momento de la falla, I' es el componente transitorio de la corriente en el momento de la falla e I_{ss} es la corriente de falla en estado estacionario, entonces la magnitud rms de la corriente en cualquier momento después de la falla en las terminales del generador es

$$I(t) = (I'' - I')e^{-t/T''} + (I' - I_{ss})e^{-t/T'} + I_{ss} \tag{4-32}$$

Se acostumbra definir las reactancias subtransitorias y transitorias de una máquina síncrona para describir convenientemente los componentes subtransitorios y transitorios de la corriente de falla. La *reactancia subtransitoria* de un generador síncrono se define como la razón entre el componente fundamental del voltaje interno generado y el componente subtransitorio de la corriente al principio de la falla. Está dada por

$$X'' = \frac{E_A}{I''} \qquad \text{subtransitorio} \tag{4-33}$$

De manera similar, la *reactancia transitoria* de un generador síncrono se define como la razón entre el componente fundamental de E_A y el componente transitorio de I' al principio de la falla. Este valor de la corriente se puede encontrar extrapolando hasta el tiempo cero la región subtransitoria de la figura 4-46:

$$X' = \frac{E_A}{I'} \qquad \text{transitorio} \tag{4-34}$$

Para efectos de dimensionar el equipo de protección, a menudo se supone que la corriente subtransitoria es E_A/X'', y que la corriente transitoria es E_A/X', debido a que éstos son los valores máximos que las corrientes respectivas pueden alcanzar.

Nótese que en la exposición anterior sobre las fallas se supone que las tres fases están en cortocircuito de manera simultánea. Si la falla no involucra por igual a las tres fases, entonces se requieren métodos más complejos de análisis para entenderla. Estos métodos (conocidos como componentes simétricos) están fuera del alcance de este libro.

EJEMPLO 4-7

Un generador síncrono de 100 MVA, 13.5 kV, conectado en Y, trifásico y a 60 Hz, opera a voltaje nominal en vacío cuando se presenta una falla trifásica en sus terminales. Sus reactancias por unidad sobre su propia base son

$$X_S = 1.0 \qquad X' = 0.25 \qquad X'' = 0.12$$

y sus constantes de tiempo son

$$T' = 1.10\,\text{s} \qquad T'' = 0.04\,\text{s}$$

El componente de cd inicial en esta máquina es en promedio 50% del componente de ca inicial.

a) ¿Cuál es el componente de ca de la corriente en este generador en el instante siguiente a la falla?
b) ¿Cuál es la corriente total (cd más ca) que fluye en el generador justo después de la falla?
c) ¿Cuál será el componente de ca de la corriente después de dos ciclos? ¿Y después de 5 s?

Solución

La corriente base de este generador está dada por la ecuación

$$I_{L,\text{base}} = \frac{S_\text{base}}{\sqrt{3}\,V_{L,\text{base}}} \tag{2-95}$$

$$= \frac{100\text{ MVA}}{\sqrt{3}(13.8\text{ kV})} = 4\,184\text{ A}$$

Las corrientes subtransitoria, transitoria y en estado estacionario, por unidad y en amperes, son

$$I'' = \frac{E_A}{X''} = \frac{1.0}{0.12} = 8.333$$

$$= (8.333)(4\,184\text{ A}) = 34\,900\text{ A}$$

$$I' = \frac{E_A}{X'} = \frac{1.0}{0.25} = 4.00$$

$$= (4.00)(4\,184 \text{ A}) = 16\,700 \text{ A}$$

$$I_{ss} = \frac{E_A}{X'} = \frac{1.0}{1.0} = 1.00$$

$$= (1.00)(4\,184 \text{ A}) = 4\,184 \text{ A}$$

a) El componente de ca inicial de la corriente es $I'' = 34\,900$ A.
b) La corriente total (ca más cd) al principio de la falla es

$$I_{tot} = 1.5I'' = 52\,350 \text{ A}$$

c) El componente de ca de la corriente en función del tiempo está dado por la ecuación (4-32):

$$I(t) = (I'' - I')e^{-t/T''} + (I' - I_{ss})e^{-t/T'} + I_{ss} \qquad \textbf{(4-32)}$$
$$= 18\,200e^{-t/0.04 \text{ s}} + 12\,516e^{-t/1.1 \text{ s}} + 4\,184 \text{ A}$$

Después de dos ciclos, $t = 1/30$ s, la corriente total es

$$I\left(\frac{1}{30}\right) = 7\,910 \text{ A} + 12\,142 \text{ A} + 4\,184 \text{ A} = 24\,236 \text{ A}$$

Después de dos ciclos, el componente transitorio de la corriente es claramente el más grande y este momento se presenta en el periodo transitorio del cortocircuito. Después de 5 s, la corriente baja a

$$I(5) = 0 \text{ A} + 133 \text{ A} + 4\,184 \text{ A} = 4\,317 \text{ A}$$

Esto es parte del periodo de estado estacionario del cortocircuito.

4.11 VALORES NOMINALES DE LOS GENERADORES SÍNCRONOS

Hay ciertos límites básicos para la velocidad y potencia que se pueden obtener de un generador síncrono. Estos límites se llaman *valores nominales* de la máquina. El propósito de los valores nominales es proteger al generador del daño que pudiera ocasionarle una operación inadecuada. Con este fin, cada máquina tiene ciertos valores nominales que se muestran en su placa de características.

Los valores nominales comunes de una máquina síncrona son *el voltaje*, *la frecuencia, la velocidad*, *la potencia aparente* (*kilovoltamperes*), *el factor de potencia*, *la corriente de campo* y *el factor de servicio*. Estos valores nominales y las relaciones entre ellos se estudiarán en las siguientes secciones.

Valores nominales del voltaje, la velocidad y la frecuencia

La frecuencia nominal de un generador síncrono depende del sistema de potencia al que está conectado. Las frecuencias en los sistemas de potencia que se usan comúnmente son 50 Hz (en Europa, Asia, etc.), 60 Hz (en América) y 400 Hz (en aplicaciones especiales y de control). Una vez que se conoce la frecuencia de operación, hay sólo una velocidad de rotación posible para cierto número de polos. La relación fija entre la frecuencia y la velocidad está dada por la ecuación (3-34):

$$f_e = \frac{n_m P}{120} \qquad \textbf{(3-34)}$$

como se describió anteriormente.

Tal vez el valor nominal más obvio es el voltaje al que un generador está diseñado para operar. El voltaje de un generador depende del flujo, la velocidad de rotación y la construcción mecánica

de la máquina. Para cierto tamaño de estructura mecánica y velocidad, mientras más alto sea el voltaje deseado más alto tendrá que ser el flujo que se requiere de la máquina. Sin embargo, el flujo no se puede incrementar indefinidamente, ya que siempre hay un máximo permitido de corriente de campo.

Otra consideración para establecer el voltaje máximo permitido es el punto de ruptura del aislamiento de los devanados; los voltajes de operación normales no deben acercarse demasiado a este valor.

¿Se puede operar un generador con un valor nominal de una frecuencia a una frecuencia diferente? Por ejemplo, ¿se puede operar un generador de 60 Hz a 50 Hz? La respuesta es un sí *moderado*, siempre y cuando se cumplan ciertas condiciones. Básicamente, el problema es que hay un flujo máximo al que puede llegar cualquier máquina, y debido a que $E_A = K\phi\omega$, el E_A máximo permitido cambia cuando cambia la velocidad. Específicamente, si un generador de 60 Hz se va a operar a 50 Hz, entonces el voltaje de operación se debe *degradar* a 50/60, o a 83.3% de su valor original. Si un generador de 50 Hz se opera a 60 Hz sucede lo contrario.

Valores nominales de la potencia aparente y del factor de potencia

Hay dos factores que determinan los límites de la potencia de las máquinas eléctricas. Uno es el par mecánico en el eje de la máquina y el otro es el calentamiento de los devanados. En todos los motores y generadores síncronos prácticos el eje es lo suficientemente fuerte desde el punto de vista mecánico como para soportar una potencia en estado estacionario mucho más alta que el valor nominal de la potencia de la máquina, por lo que los límites del estado estacionario los establece el calentamiento de los devanados.

Hay dos devanados en un generador síncrono y se debe proteger a cada uno del sobrecalentamiento. Estos dos devanados son el devanado del inducido y el devanado de campo. La corriente máxima aceptable en el inducido establece el valor nominal de la potencia aparente del generador, debido a que la potencia aparente S está dada por

$$S = 3V_\phi I_A \tag{4-35}$$

Si se conoce el valor nominal del voltaje, entonces la corriente máxima aceptable en el inducido determina el valor nominal de kilovoltamperes del generador:

$$S_{\text{nom}} = 3V_{\phi,\text{nom}} I_{A,\text{máx}} \tag{4-36}$$

o

$$S_{\text{nom}} = \sqrt{3}V_{L,\text{nom}} I_{L,\text{máx}} \tag{4-37}$$

Es importante darse cuenta de que para el calentamiento de los devanados del inducido el *factor de potencia de la corriente en el inducido es irrelevante*. El efecto del calentamiento de las pérdidas en el cobre del estator está dado por

$$P_{\text{PCE}} = 3I_A^2R_A \tag{4-38}$$

y es independiente del ángulo de la corriente con respecto a $\mathbf{V}_\phi$. Ya que el ángulo de la corriente es irrelevante para el calentamiento en el inducido, estas máquinas tienen un valor nominal en kilovoltamperes en lugar de en kilowatts.

El otro devanado de importancia es el devanado de campo. Las pérdidas en el cobre de campo están dadas por

$$P_{\text{PCR}} = I_F^2R_F \tag{4-39}$$

por lo que el calentamiento máximo permitido establece una corriente de campo máxima para la máquina. Debido a que $E_A = K\phi\omega$, esto establece el tamaño máximo aceptable de E_A.

El efecto de tener un E_A máximo y un I_F máximo se traduce directamente en una restricción sobre el factor de potencia mínimo aceptable del generador cuando opera a kilovoltamperes nomi-

nales. La figura 4-47 muestra el diagrama fasorial de un generador síncrono con el voltaje y corriente del inducido nominales. La corriente puede asumir varios ángulos, como se muestra. El voltaje interno generado $\mathbf{E}_A$ es la suma de $\mathbf{V}_\phi$ y $jX_S\mathbf{I}_A$. Nótese que para ciertos ángulos de corriente posibles el E_A que se requiere excede el $E_{A,\text{ máx}}$. Si el generador opera a la corriente del inducido nominal y con estos factores de potencia, se quemarían los devanados de campo.

El ángulo de $\mathbf{I}_A$ que requiere del $\mathbf{E}_A$ máximo posible, mientras que $\mathbf{V}_\phi$ permanece en el valor nominal, nos brinda el factor de potencia nominal del generador. Es posible operar el generador con un factor de potencia menor (con más retraso) que el valor nominal, pero sólo por medio de la reducción de los kilovoltamperes que suministra el generador.

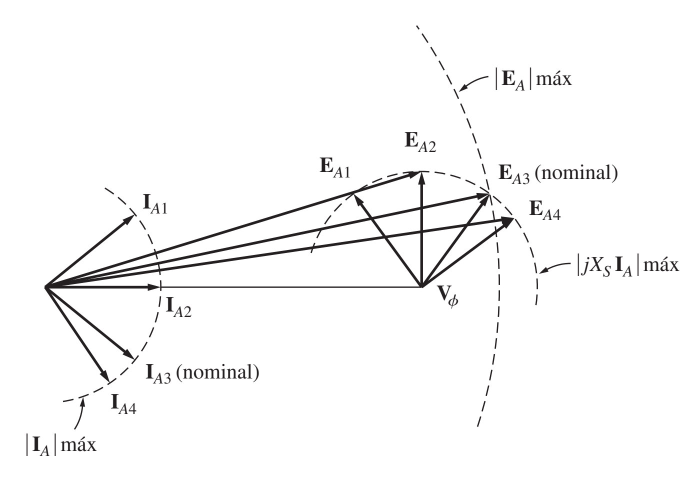


FIGURA 4-47 Figura que explica cómo el límite de corriente de campo del rotor determina el factor de potencia nominal de un generador.

Curvas de capacidad de los generadores síncronos

Los límites de calentamiento del estator y rotor, junto con cualquier otro límite de un generador síncrono, se pueden expresar en forma gráfica por medio del *diagrama de capacidad* de un generador. Un diagrama de capacidad es una gráfica de la potencia compleja $S = P + jQ$. Esta fórmula se obtiene del diagrama fasorial del generador, suponiendo que $\mathbf{V}_\phi$ es constante en el voltaje nominal de la máquina.

La figura 4-48*a*) muestra el diagrama fasorial de un generador síncrono que opera con un factor de potencia en retraso y a voltaje nominal. Se dibuja un grupo ortogonal de ejes en el diagrama con origen en la punta de $\mathbf{V}_\phi$ y en volts. En este diagrama, el segmento vertical *AB* tiene una longitud de $X_S I_A \cos\theta$ y el segmento horizontal *OA* tiene una longitud de $X_S I_A$ sen θ.

La potencia real de salida del generador está dada por

$$P = 3V_\phi I_A \cos\theta \qquad \textbf{(4-17)}$$

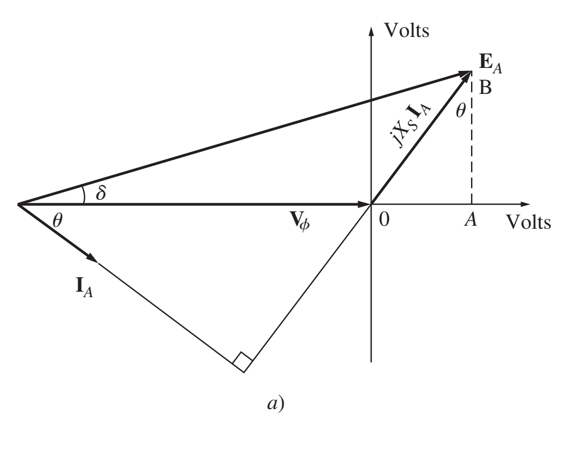
la potencia reactiva de salida está dada por

$$Q = 3V_\phi I_A \operatorname{sen}\theta \qquad \textbf{(4-19)}$$

y la potencia aparente de salida por

$$S = 3V_\phi I_A \qquad \textbf{(4-35)}$$

por lo que los ejes horizontal y vertical de esta figura se pueden volver a calibrar en términos de las potencias real y reactiva (figura 4-48*b*). El factor de conversión que se requiere para cambiar la escala de los ejes de volts a voltamperes (unidades de potencia) es $3V_\phi/X_S$:



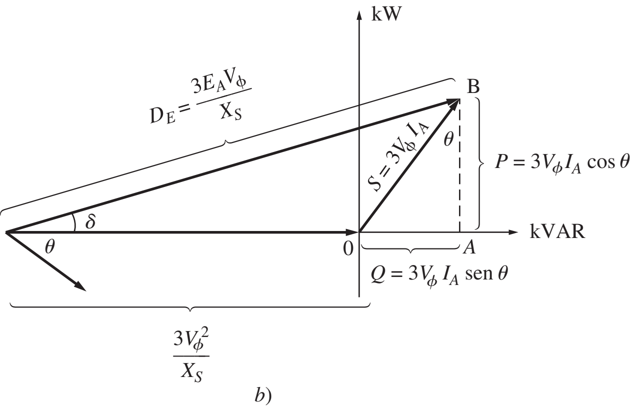


FIGURA 4-48 Determinación de la curva de capacidad de un generador síncrono. *a*) Diagrama fasorial del generador; *b*) sus unidades de potencia correspondientes.

$$P = 3V_\phi I_A \cos\theta = \frac{3V_\phi}{X_S}(X_S I_A \cos\theta) \qquad \textbf{(4-40)}$$

y

$$Q = 3V_\phi I_A \operatorname{sen}\theta = \frac{3V_\phi}{X_S}(X_S I_A \operatorname{sen}\theta) \qquad \textbf{(4-41)}$$

En los ejes del voltaje, el origen del diagrama fasorial se encuentra en $-V_\phi$ en el eje horizontal, por lo que el origen en el diagrama de potencia está en

$$Q = \frac{3V_\phi}{X_S}(-V_\phi) \tag{4-42}$$
$$= -\frac{3V_\phi^2}{X_S}$$

La corriente de campo es proporcional al flujo de la máquina y el flujo es proporcional a $E_A = K\phi\omega$. La longitud correspondiente a E_A en el diagrama de potencia es

$$D_E = -\frac{3E_A V_\phi}{X_S} \tag{4-43}$$

La corriente en el inducido I_A es proporcional a $X_S I_A$ y la longitud correspondiente a $X_S I_A$ en el diagrama de potencia es $3V_\phi I_A$.

La curva de capacidad final de un generador síncrono se muestra en la figura 4-49. Es una gráfica de P y Q, con la potencia real P en el eje horizontal y la potencia reactiva Q en el eje vertical. Las líneas de corriente constante del inducido I_A aparecen como líneas de $S = 3V_\phi I_A$ constante, que son círculos concéntricos alrededor del origen. Las líneas de corriente de campo constante corresponden a las líneas de E_A constante, que se muestran como círculos de magnitud $3E_A V_\phi / X_S$ con su centro en el punto

$$Q = -\frac{3V_\phi^2}{X_S} \tag{4-42}$$

El límite de corriente del inducido aparece como el círculo correspondiente a I_A nominal o kilovoltamperes nominal y el límite de la corriente de campo se muestra como un círculo que corresponde a I_F nominal o E_A nominal. *Cualquier punto que se encuentre dentro de ambos círculos es un punto de operación seguro para el generador*.

También se pueden mostrar otras restricciones en el diagrama, como la potencia máxima del motor primario y el límite de estabilidad estática. En la figura 4-50 se puede observar una curva de capacidad que también refleja la potencia máxima del motor primario.

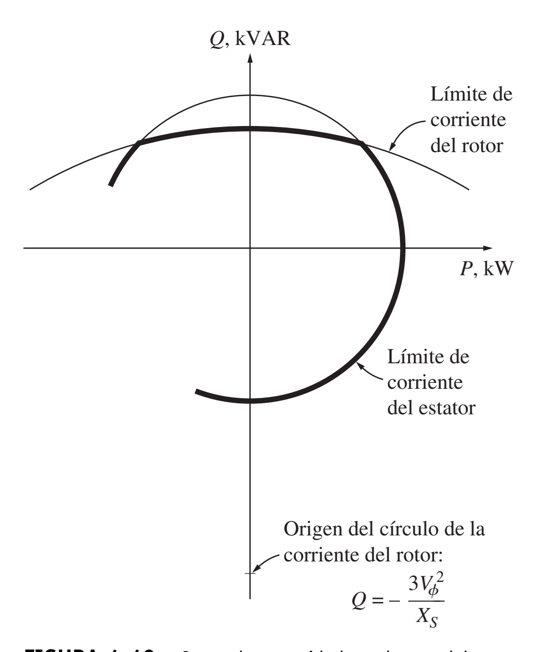


FIGURA 4-49 Curva de capacidad resultante del generador.

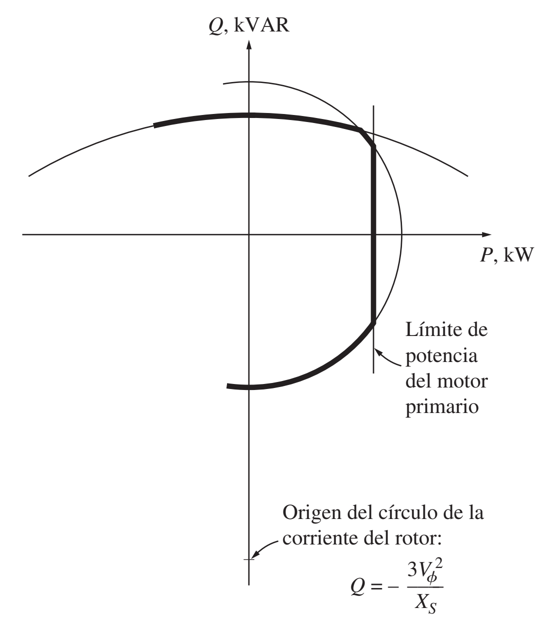


FIGURA 4-50 Diagrama de capacidad que muestra el límite de potencia del motor primario.

EJEMPLO 4-8

Un generador síncrono de seis polos, 480 V, 50 Hz, conectado en Y, tiene un valor nominal de 50 kVA con un FP de 0.8 en retraso. Su reactancia síncrona es de 1.0 Ω por fase. Suponga que este generador está conectado a una turbina de vapor capaz de suministrar hasta 45 kW. Las pérdidas por fricción y por rozamiento con el aire suman 1.5 kW y las pérdidas en el núcleo son de 1.0 kW.

a) Dibuje la curva de capacidad de este generador, incluyendo el límite de potencia del motor primario.
b) ¿Este generador puede suministrar una corriente de línea de 56 A con un FP de 0.7 en retraso? ¿Por qué sí o por qué no?
c) Cuál es la cantidad máxima de potencia reactiva que puede producir este generador.
d) Si el generador suministra 30 kW de potencia real, ¿cuál es la cantidad máxima de potencia reactiva que puede suministrar simultáneamente?

Solución

Se puede calcular la corriente máxima en el generador con la ecuación (4-36):

$$S_{\text{nom}} = 3V_{\phi,\text{nom}}\, I_{\text{A,máx}} \tag{4-36}$$

El voltaje V_ϕ de esta máquina es

$$V_\phi = \frac{V_T}{\sqrt{3}} = \frac{480\text{ V}}{\sqrt{3}} = 277\text{ V}$$

por lo que la corriente máxima en el inducido es

$$I_{A,\text{máx}} = \frac{S_{\text{nom}}}{3V_\phi} = \frac{50\text{ kVA}}{3(277\text{ V})} = 60\text{ A}$$

Con esta información se pueden contestar las preguntas.

a) La potencia aparente máxima permitida es 50 kVA, que especifica la corriente máxima segura en el inducido. El centro de los círculos E_A está en

$$Q = -\frac{3V_\phi^2}{X_S} \tag{4-42}$$

$$= -\frac{3(277\text{ V})^2}{1.0\ \Omega} = -230\text{ kVAR}$$

El tamaño máximo de E_A está dado por

$$\begin{aligned} E_A &= V_\phi + jX_S I_A \\ &= 277\angle 0°\text{ V} + (j1.0\ \Omega)(60\angle -36.87°\text{ A}) \\ &= 313 + j48\text{ V} = 317\angle 8.7°\text{ V} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la magnitud de la distancia proporcional a E_A es

$$D_E = \frac{3E_A V_\phi}{X_S} \tag{4-43}$$

$$= \frac{3(317\text{ V})(277\text{ V})}{1.0\ \Omega} = 263\text{ kVAR}$$

La potencia de salida máxima disponible con un motor primario con potencia de 45 kW es aproximadamente

$$\begin{aligned} P_{\text{máx, sal}} &= P_{\text{máx, entr}} - P_{\text{pérd mec}} - P_{\text{pérd núc}} \\ &= 45\text{ kW} - 1.5\text{ kW} - 1.0\text{ kW} = 42.5\text{ kW} \end{aligned}$$

(Este valor es aproximado debido a que no se tomaron en cuenta las pérdidas I^2R y las pérdidas dispersas en la carga.) La figura 4-51 muestra el diagrama de capacidad resultante.

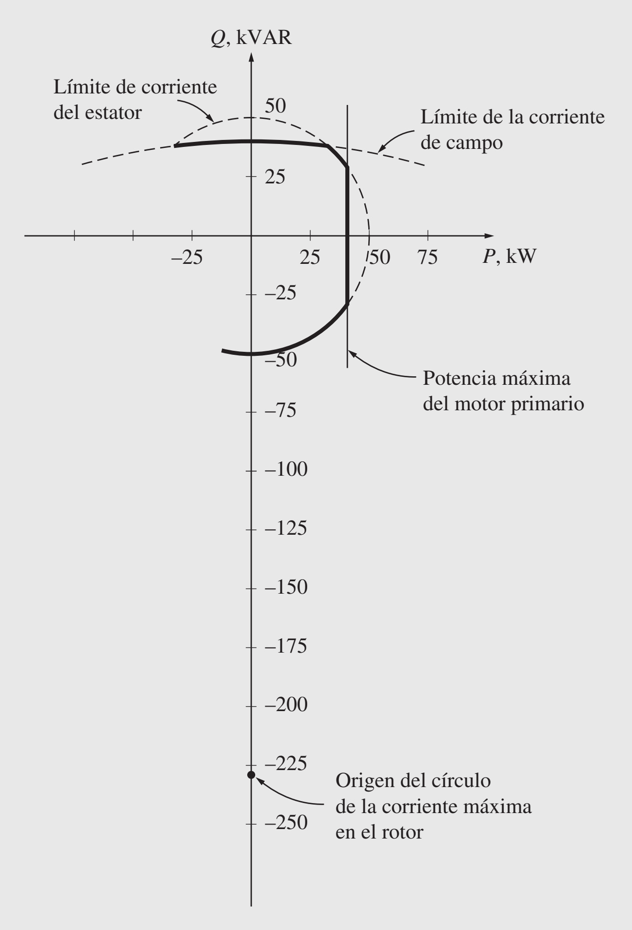


FIGURA 4-51 Diagrama de capacidad del generador del ejemplo 4-8.

b) Una corriente de 56 A con un FP de 0.7 en retraso produce una potencia real de

$$P = 3V_\phi I_A \cos\theta$$
$$= 3(277\text{ V})(56\text{ A})(0.7) = 32.6\text{ kW}$$

y una potencia reactiva de

$$Q = 3V_\phi\, I_A \operatorname{sen}\theta$$
$$= 3(277\text{ V})(56\text{ A})(0.714) = 33.2\text{ kVAR}$$

Si se dibuja este punto en el diagrama de capacidad se puede ver que es seguro, pues está dentro de la curva máxima I_A, pero fuera de la curva máxima I_F. Por lo tanto, este punto *no* constituye una condición de operación segura.

c) Cuando la potencia real que suministra el generador es cero, la potencia reactiva que el generador puede suministrar será la máxima. Este punto se encuentra justo en el pico de la curva de capacidad. La Q que el generador puede suministrar en ese punto es

$$Q = 263\text{ kVAR} - 230\text{ kVAR} = 33\text{ kVAR}$$

d) Si el generador suministra 30 kW de potencia real, la potencia reactiva máxima que el generador puede suministrar es de 31.5 kVAR. Este valor se puede calcular ubicando el diagrama de capacidad a 30 kW y siguiendo la línea de kilowatts constantes hasta que se llega al límite. El factor restrictivo en este caso es la corriente de campo; el inducido estará seguro hasta con 39.8 kVAR.

La figura 4-52 muestra la capacidad usual de un generador síncrono. Nótese que las fronteras de la capacidad no son el círculo perfecto de un generador real. Esta afirmación es verdadera porque los generadores síncronos reales con polos salientes tienen efectos adicionales que no se modelaron. En el apéndice C se describen estos efectos.

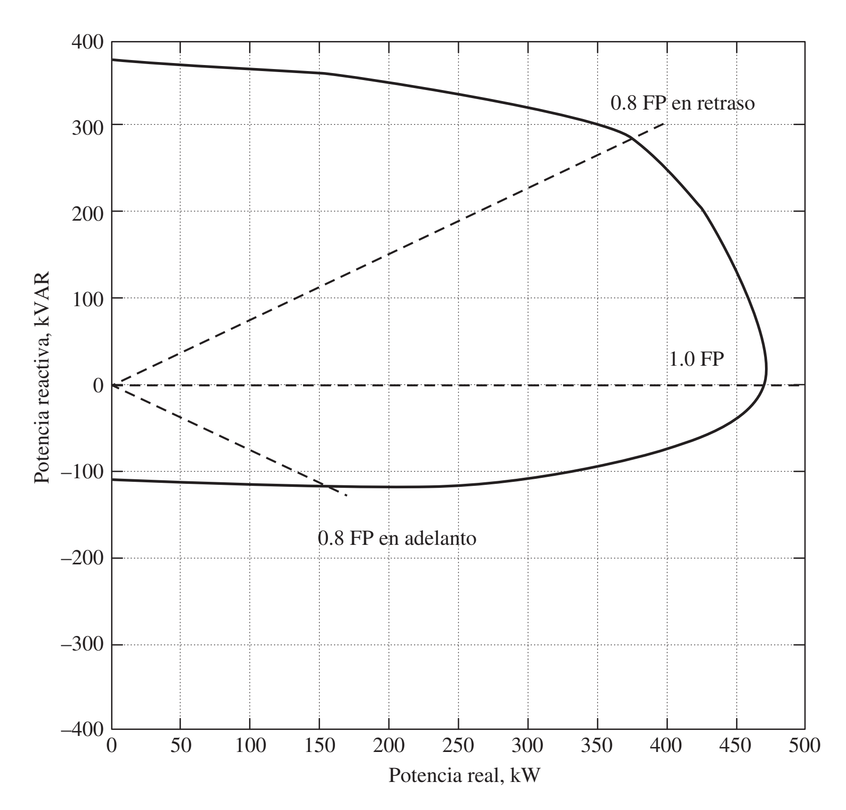


FIGURA 4-52 Curva de capacidad de un generador síncrono real con un valor nominal de 470 kVA. (*Cortesía de Marathon Electric Company*.)

Operación de corta duración y factor de servicio

El límite más importante de la operación en estado estacionario de un generador síncrono es el calentamiento del inducido y de los devanados de campo. Sin embargo, por lo regular el límite de calentamiento se presenta en un punto mucho menor que la potencia máxima que el generador es capaz de suministrar magnética y mecánicamente. De hecho, un generador síncrono usual a menudo es capaz de suministrar hasta 300% de su potencia nominal temporalmente (hasta que se queman los devanados). Esta capacidad de suministrar potencia por arriba del valor nominal se utiliza para proporcionar de manera momentánea aumentos de voltaje durante el arranque de un motor y otros transitorios de carga similares.

También se puede utilizar un generador con potencias que exceden su valor nominal por periodos más largos, siempre y cuando los devanados no se calienten demasiado antes de remover el exceso de carga. Por ejemplo, un generador que puede suministrar 1 MW en forma indefinida puede ser capaz de suministrar 1.5 MW durante un par de minutos sin sufrir daños serios y por periodos progresivamente más largos con niveles menores de potencia. Sin embargo, la carga se debe retirar o causará el sobrecalentamiento de los devanados. Mientras mayor sea la diferencia entre la potencia y el valor nominal, menor será el tiempo que la máquina puede soportarlo.

En la figura 4-53 se puede observar este efecto. Esta figura muestra el tiempo requerido en segundos para que una sobrecarga cause daño térmico en una máquina eléctrica, cuyos devanados estaban a temperatura normal de operación antes de que se presentara la sobrecarga. Esta máquina

en particular puede tolerar 20% de sobrecarga por 1 000 segundos, 100% de sobrecarga por 30 segundos y 200% de sobrecarga por alrededor de 10 segundos antes de dañarse.

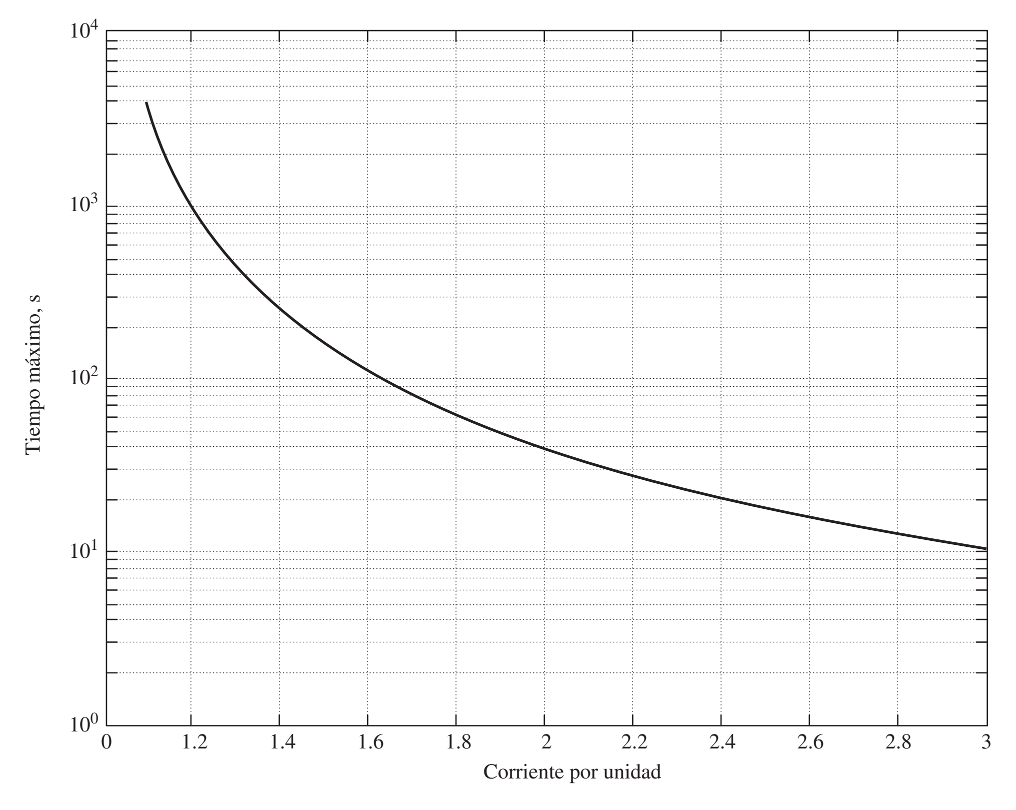


FIGURA 4-53 Curva de daño térmico en una máquina síncrona usual; se supone que los devanados ya se encontraban a temperatura de operación cuando se aplicó la sobrecarga. (*Cortesía de Marathon Electric Company*.)

El máximo aumento de temperatura que puede soportar una máquina depende de la *clase de aislamiento* de sus devanados. Hay cuatro clases estándar de aislamientos: A, B, F y H. Aun cuando hay cierta variación en la temperatura aceptable, dependiendo de la construcción particular de la máquina y del método de medición de la temperatura, estas clases corresponden por lo general a aumentos de 60, 80, 105 y 125°C, respectivamente, sobre la temperatura ambiente. Mientras más alta sea la clase de aislamiento de una máquina, mayor será la potencia que puede suministrar sin que se sobrecalienten los devanados.

El sobrecalentamiento de los devanados es un *problema muy grave* en un motor o generador. Una vieja regla general establece que por cada 10°C de aumento de temperatura sobre la temperatura nominal de los devanados, se reduce a la mitad la vida media de una máquina (véase la figura 3-20). Los materiales de aislamiento modernos son mucho menos susceptibles de averiarse, pero los aumentos de temperatura reducen de manera drástica su vida. Por esta razón no se debe sobrecargar una máquina síncrona a menos que sea absolutamente necesario.

La siguiente pregunta está relacionada con el problema del sobrecalentamiento: ¿qué tan bien se conoce el requerimiento de potencia de una máquina? Antes de su instalación a menudo se tienen sólo estimaciones aproximadas de la carga. Debido a esto, las máquinas de propósito general normalmente tienen un *factor de servicio*. El factor de servicio es la razón entre la potencia máxima verdadera de la máquina y el valor nominal determinado en su placa de características. Un generador con un factor de servicio de 1.15 puede operar en realidad a 115% de su carga nominal indefinidamente sin sufrir ningún daño. El factor de servicio en una máquina provee un margen de error en caso de que se estimen en forma equivocada las cargas.

4.12 RESUMEN

Un generador síncrono es un dispositivo que convierte potencia mecánica de un primo motor en potencia eléctrica de ca con un voltaje y frecuencia específicos. El término *síncrono* se refiere al hecho de que la frecuencia eléctrica de la máquina está confinada a, o sincronizada con, la tasa mecánica de rotación del eje. Los generadores síncronos se ocupan para producir la mayor parte de la potencia eléctrica que se utiliza en todo el mundo.

El voltaje interno generado de esta máquina depende de la tasa de rotación del eje y de la magnitud del flujo en el campo. El voltaje de fase de la máquina difiere del voltaje interno generado por los efectos de la reacción en el inducido en el generador y también por la resistencia y reactancia interna de los devanados del inducido. El voltaje en las terminales del generador será igual al voltaje de fase o estará relacionado con éste por $\sqrt{3}$, lo cual depende de que la máquina esté conectada en Y o en Δ.

La manera en que opera un generador síncrono en un sistema de potencia real depende de sus restricciones. Cuando un generador opera solo, las potencias real y reactiva por suministrar deben estar determinadas por la carga impuesta y los puntos de ajuste del mecanismo regulador y la corriente de campo controlan la frecuencia y voltaje en las terminales, respectivamente. Cuando se conecta un generador a un bus infinito, su frecuencia y voltaje son constantes, por lo que los puntos de ajuste del mecanismo regulador y la corriente de campo controlan el flujo de potencia real y reactiva del generador. En los sistemas reales que constan de generadores de tamaño aproximadamente igual, los puntos de ajuste del mecanismo regulador afectan tanto la frecuencia como el flujo de potencia y la corriente de campo incide tanto sobre el voltaje terminal como sobre el flujo de potencia reactiva.

La capacidad de un generador síncrono para producir potencia eléctrica está limitada principalmente por el calentamiento interno de la máquina. Cuando se sobrecalientan los devanados del generador, la vida de la máquina puede acortarse de manera drástica. Debido a que hay dos tipos diferentes de devanados (de inducido y de campo), hay dos restricciones diferentes sobre el generador. El calentamiento máximo que permiten los devanados del inducido establece los kVA máximos que permite la máquina, mientras que el calentamiento máximo que aceptan los devanados de campo establece el tamaño máximo de E_A. El tamaño máximo de E_A más el tamaño máximo de I_A determinan el factor de potencia nominal del generador.

PREGUNTAS

4-1. ¿Por qué la frecuencia de un generador síncrono está confinada a la tasa de rotación del eje?

4-2. ¿Por qué cae abruptamente el voltaje de un alternador cuando se le aplica una carga con un factor de potencia en retraso?

4-3. ¿Por qué aumenta el voltaje de un alternador cuando se le aplica una carga con un factor de potencia en adelanto?

4-4. Dibuje el diagrama fasorial y relaciones del campo magnético de un generador síncrono que opera con un factor de potencia *a*) unitario, *b*) en retraso y *c*) en adelanto.

4-5. Explique cómo se pueden determinar la impedancia síncrona y la resistencia del inducido de un generador síncrono.

4-6. ¿Por qué se debe reducir la potencia de un generador de 60 Hz si va a operar a 50 Hz? ¿Cuánta reducción se debe llevar a cabo?

4-7. ¿Esperaría que un generador de 400 Hz sea menor o mayor que un generador de 60 Hz con la misma potencia y voltaje nominales? ¿Por qué?

4-8. ¿Qué condiciones son necesarias para conectar en paralelo dos generadores síncronos?

4-9. ¿Por qué el generador en aproximación en un sistema de potencia debe conectarse en paralelo a una frecuencia más alta que la del sistema en operación?

4-10. ¿Qué es un bus infinito? ¿Qué restricciones impone sobre un generador que está conectado en paralelo con él?

4-11. ¿Cómo se puede controlar la repartición de potencia real entre dos generadores sin afectar la frecuencia del sistema? ¿Cómo se puede controlar la repartición de potencia reactiva entre dos generadores sin afectar el voltaje en las terminales del sistema?

4-12. ¿Cómo se puede ajustar la frecuencia de un sistema de potencia grande sin afectar la repartición de potencia entre los generadores?

4-13. ¿Cómo se pueden ampliar los conceptos de la sección 4.9 para calcular la frecuencia y repartición de potencia del sistema entre tres o más generadores que operan en paralelo?

4-14. ¿Por qué el sobrecalentamiento es un problema tan grave en un generador?

4-15. Explique con detalle el concepto que hay detrás de las curvas de capacidad.

4-16. ¿Qué son los valores nominales de corta duración? ¿Por qué son importantes en la operación regular de un generador?

PROBLEMAS

4-1. En un sitio en Europa se requiere suministrar 1 000 kW a 60 Hz de potencia. Las únicas fuentes de potencia disponibles operan a 50 Hz. Se decide generar la potencia por medio de un motor-generador que consta de un motor síncrono que acciona un generador síncrono. ¿Cuántos polos deberían tener cada una de las máquinas para convertir la potencia de 50 Hz en potencia de 60 Hz?

4-2. Un generador síncrono de 13.8 kV, 50 MVA, factor de potencia de 0.9 en retraso, de cuatro polos, 60 Hz, conectado en Y, tiene una reactancia síncrona de 2.5 Ω y una resistencia de inducido de 0.2 Ω. A 60 Hz; sus pérdidas por fricción y por rozamiento con el aire son de 1 MW, y sus pérdidas de núcleo son de 1.5 MW. El circuito de campo tiene un voltaje de cd de 120 V, y la I_F máxima es de 10 A. La corriente del circuito de campo es ajustable en el rango de 0 a 10 A. El OCC de este generador se muestra en la figura P4-1.

a) ¿Cuánta corriente de campo se necesita para hacer que el voltaje en las terminales *VT* (o el voltaje de línea *VL*) sea igual a 13.8 kV cuando el generador opera sin carga?
b) ¿Cuál es el voltaje interno generado E_A de esta máquina en las condiciones nominales?
c) ¿Cuál es el voltaje de fase V_ϕ de este generador en condiciones nominales?
d) ¿Cuánta corriente de campo se necesita para hacer el voltaje en las terminales V_T igual a 13.8 kV cuando el generador trabaja en condiciones nominales?
e) Suponga que este generador trabaja en condiciones nominales y luego se quita la carga sin cambiar la corriente de campo. ¿Cuál sería el voltaje en las terminales del generador?
f) ¿Cuánta potencia y cuánto par de estado estable debe ser capaz de suministrar el motor primario del generador para manejar las condiciones nominales?
g) Construya una curva de capacidad de este generador.

4-3. Suponga que la corriente de campo del generador del problema 4-2 se fija en un valor de 5 A.

a) ¿Cuál será el voltaje en las terminales del generador si se conecta a una carga conectada en Δ con una impedancia de 24 ∠ 25° Ω?
b) Dibuje el diagrama fasorial del generador.
c) ¿Cuál es la eficiencia del generador en estas condiciones?
d) Ahora suponga que otra carga conectada en Δ idéntica a la anterior se conecta en paralelo con la primera. ¿Qué sucede en el diagrama fasorial del generador?
e) ¿Cuál es el nuevo voltaje en las terminales después de conectar la carga?
f) ¿Qué se debe hacer para regresar el voltaje en las terminales a su valor original?

4-4. Suponga que la corriente de campo del generador del problema 4-2 se ajusta para lograr el voltaje nominal (13.8 V) en condiciones de plena carga para cada una de las preguntas que se plantean a continuación.

a) ¿Cuál es la eficiencia del generador con carga nominal?
b) ¿Cuál es la regulación de voltaje del generador si se carga con kVA nominales con cargas con un FP de 0.9 en retraso?

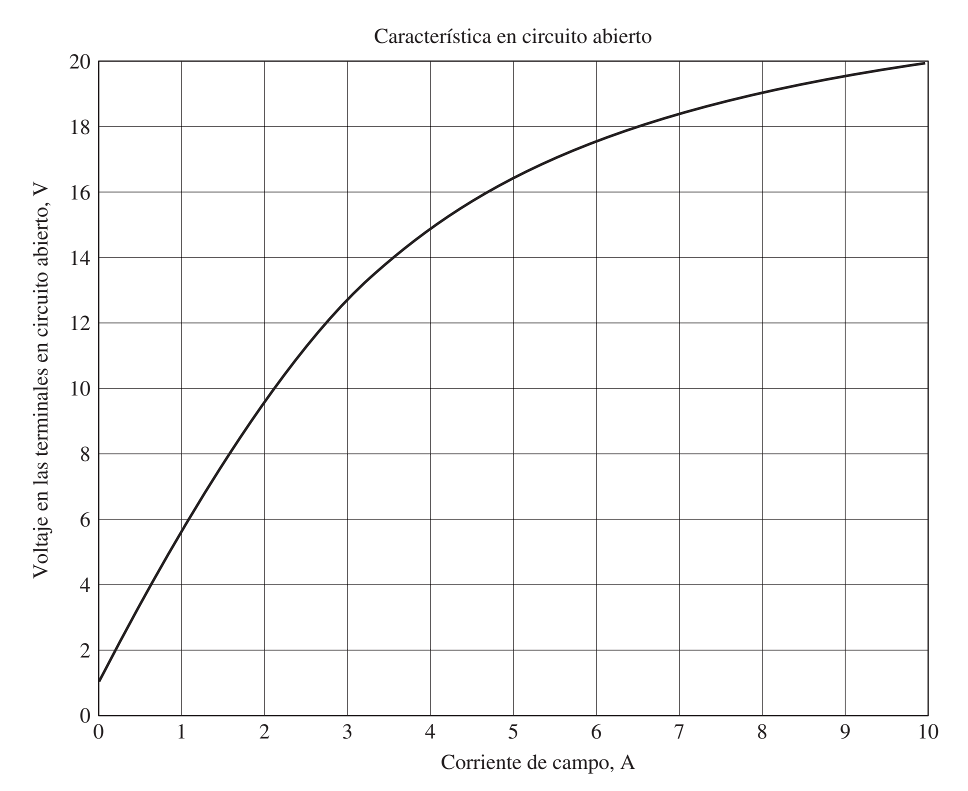


FIGURA P4-1 Curva característica de circuito abierto del generador del problema 4-2.

c) ¿Cuál es la regulación de voltaje del generador si se carga con kVA nominales con cargas con un FP de 0.9 en adelanto?
d) ¿Cuál es la regulación de voltaje del generador si se carga con kVA nominales con cargas con un FP unitario?
e) Utilice el MATLAB para dibujar la gráfica del voltaje en las terminales del generador en función de la carga de los tres factores de potencia.

4-5. Suponga que la corriente de campo del generador del problema 4-2 se ajusta para suministrar su voltaje nominal cuando se carga con corriente nominal con un factor de potencia unitario.

a) ¿Cuál es el ángulo δ del par del generador cuando suministra corriente nominal con un factor de potencia unitario?
b) ¿Cuál es la potencia máxima que este generador puede proporcionar a una carga con factor de potencia unitario cuando la corriente de campo se ajusta al valor de corriente?
c) Si el generador opera a plena carga con un factor de potencia unitario, ¿qué tan cerca está del límite de estabilidad estática de la máquina?

4-6. El voltaje interno producido E_A por un generador trifásico síncrono conectado en Y es de 14.4 kV, y el voltaje en las terminales V_T es de 12.8 kV. La reactancia síncrona de esta máquina es de 4 Ω, y la resistencia del inducido se pueden pasar por alto.

a) Si el ángulo de par del generador $\delta = 18°$, ¿cuánta potencia suministra este generador en el momento actual?
b) ¿Cuál es el factor de potencia del generador en este momento?
c) Trace el diagrama fasorial bajo estas circunstancias.
d) Si se hace caso omiso de las pérdidas en este generador, ¿qué par debe aplicar a su eje el motor primario en estas condiciones?

4-7. Un generador síncrono de 100 MVA, 14.4 kV, un FP de 0.8 en retraso, 50 Hz, con dos polos, conectado en Y, tiene una reactancia síncrona por unidad de 1.1 y una resistencia en el inducido por unidad de 0.011.

a) ¿Cuál es la reactancia síncrona y la resistencia en el inducido en ohms?
b) ¿Cuál es la magnitud del voltaje interno generado E_A en condiciones nominales? ¿Cuál es el ángulo δ del par en estas circunstancias?
c) Pase por alto las pérdidas en el generador. ¿Qué par debe aplicar el motor primario al eje del generador a plena carga?

4-8. Un generador de turbina de vapor, conectado en Y, con 20 polos, 12 kV, 200 MVA, un FP de 0.85 en retraso y 50 Hz, tiene una reactancia síncrona de 0.9 por unidad y una resistencia en el inducido de 0.1 por unidad. Este generador opera en paralelo con un sistema de potencia muy grande (bus infinito).

a) ¿Cuál es la velocidad de rotación del eje del generador?
b) ¿Cuál es la magnitud del voltaje generado interno de E_A en condiciones nominales?
c) ¿Cuál es el ángulo del par del generador en condiciones nominales?
d) ¿Cuál es el valor de la reactancia síncrona del generador y del inducido en ohms?
e) Si la corriente de campo es constante, ¿cuál es la potencia máxima posible que puede salir de este generador? ¿Cuánta potencia de reserva o par contiene este generador a plena carga?
f) A la potencia máxima posible, ¿cuánta potencia reactiva suministrará o consumirá este generador? Dibuje el diagrama fasorial correspondiente. (Suponga que I_F es constante.)

4-9. El motor primario de un generador síncrono trifásico de 480 V, 250 kVA, FP en retraso de 0.8, con dos polos y 60 Hz, tiene una velocidad en vacío de 3 650 r/min y una velocidad en plena carga de 3 570 r/min. Este generador opera en paralelo con un generador síncrono de 480 V, 250 kVA, 0.85 de FP en atraso, con cuatro polos y 60 Hz, cuyo motor primario tiene una velocidad en vacío de 1 800 r/min y una velocidad en plena carga de 1 780 r/min. Las cargas alimentadas por estos generadores son de 300 kW con un FP de 0.8 en retraso.

a) Calcule las caídas de velocidad del generador 1 y el generador 2.
b) Encuentre la frecuencia de operación del sistema de potencia.
c) Encuentre la potencia suministrada por cada uno de los generadores en el sistema.
d) ¿Qué deben hacer los operadores del generador para ajustar la operación de la frecuencia a 60 Hz?
e) Si V_T es de 460 V, ¿qué se debe hacer para corregir el voltaje tan bajo en las terminales?

4-10. Tres generadores síncronos idénticos físicamente operan en paralelo. Los tres están dimensionados para una carga nominal plena de 100 MW con un FP de 0.8 en retraso. La frecuencia en vacío del generador A es de 61 Hz y la caída de velocidad es de 3.4%. La frecuencia en vacío del generador B es de 61.5 Hz y la caída de velocidad es de 3.4%. La frecuencia en vacío del generador C es de 60.5 Hz y la caída de velocidad es de 2.6%.

a) Si este sistema de potencia alimenta una carga total de 230 MW, ¿cuál es la frecuencia del sistema y cómo se repartirá la potencia entre los tres generadores?
b) Dibuje una gráfica que muestre la potencia suministrada por cada generador en función de la potencia total suministrada a todas las cargas (puede utilizar el MATLAB para elaborar esta gráfica). ¿Con qué carga se excederán los valores nominales del generador? ¿Qué generador excederá primero sus valores nominales?
c) ¿La repartición de potencia del inciso *a*) es aceptable? Explique su respuesta.
d) ¿Qué acciones puede tomar un operador para mejorar la repartición de potencia real entre estos generadores?

4-11. Un molino de papel consta de tres generadores (calderas) para suministrar vapor al proceso y también para utilizar algunos de sus productos de desecho como fuente de energía. Debido a que tiene capacidad extra, el molino consta de tres generadores de turbina de 10 MW para aprovechar esta situación.

Cada generador síncrono es de 4 160 V, 12.5 MVA, 60 Hz, con un factor de potencia de 0.8 en retraso, con dos polos, conectado en Y, con una reactancia síncrona de 1.10 Ω y una resistencia en el inducido de 0.03 Ω. Los generadores 1 y 2 tienen una característica FP con una pendiente s_P de 5 MW/Hz y el generador tiene una pendiente de 60 MW/Hz.

a) Si la frecuencia en vacío de cada uno de los tres generadores se fija en 61 Hz, ¿cuánta potencia suministrarán las tres máquinas si la frecuencia actual del sistema es de 60 Hz?
b) ¿Cuál es la potencia máxima que los tres generadores pueden suministrar en estas condiciones sin que se excedan los valores nominales de ninguno de ellos? ¿A qué frecuencia se presenta este límite? ¿Cuánta potencia suministra cada generador en este momento?
c) ¿Qué se debería hacer para que los tres generadores suministren sus potencias real y reactiva nominales con una frecuencia total de operación de 60 Hz?
d) ¿Cuál es el voltaje interno generado por los tres generadores en estas condiciones?

4-12. Suponga que es un ingeniero que tiene que planear una nueva estación de cogeneración eléctrica para una planta con exceso de vapor para proceso. Tiene la opción de elegir entre dos generadores de turbina de 10 MW o un solo generador de turbina de 20 MW. ¿Cuáles serían las ventajas y desventajas de cada opción?

4-13. A un generador síncrono de 25 MVA, trifásico, 12.2 kV, con dos polos, con factor de potencia en retraso de 0.9, de 60 Hz, conectado en Y, se le realizó la prueba de circuito abierto y se extrapoló su voltaje del entrehierro y se obtuvieron los siguientes resultados:

Prueba de circuito abierto					
Corriente de campo, A	320	365	380	475	570
Voltaje de línea, kV	13.0	13.8	14.1	15.2	16.0
Voltaje de entrehierro extrapolado, kV	15.4	17.5	18.3	22.8	27.4

Los resultados de la prueba de cortocircuito son los siguientes:

Prueba de circuito abierto					
Corriente de campo, A	320	365	380	475	570
Corriente del inducido, A	1 040	1 190	1 240	1 550	1 885

La resistencia del inducido es de 0.6 Ω por fase.

a) Calcule la reactancia síncrona no saturada del generador en ohms por fase y por unidad.
b) Calcule la reactancia síncrona saturada aproximada X_S con una corriente de campo de 380 A. Exprese su respuesta tanto en ohms por fase como por unidad.
c) Calcule la reactancia síncrona saturada aproximada con una corriente de campo de 475 A. Exprese la respuesta tanto en ohms por fase como por unidad.
d) Encuentre la relación de cortocircuito del generador.
e) ¿Cuál es el voltaje generado interno de este generador en condiciones nominales?
f) ¿Qué corriente de campo se necesita para obtener el voltaje nominal en la carga nominal?

4-14. Durante una prueba de cortocircuito, un generador síncrono conectado en Y produce 100 A de corriente del inducido de cortocircuito por fase con una corriente de campo de 2.5 A. A la misma corriente de campo, el voltaje de línea de circuito abierto se mide como 440 V.

a) Calcule la reactancia saturada síncrona bajo estas condiciones.
b) Si la resistencia del inducido es de 0.3 Ω por fase y el generador suministra 60 A a una carga puramente resistiva conectada en Y de 3 Ω por fase con este valor de corriente de campo, determine la regulación de voltaje bajo estas condiciones de carga.

4-15. Un generador síncrono trifásico, conectado en Y, de 120 MVA, 13.8 kV, un FP de 0.8 en retraso y 60 Hz, cuya reactancia síncrona es de 1.2 Ω por fase y su resistencia en el inducido es de 0.1 Ω por fase.

a) ¿Cuál es su regulación de voltaje?
b) ¿Cuál sería el valor nominal del voltaje y de la potencia aparente si operara a 50 Hz con las mismas pérdidas en el inducido y el campo que si se operara a 60 Hz?
c) ¿Cuál será la regulación de voltaje del generador a 50 Hz?

Los problemas 4-16 a 4-26 se refieren a un generador síncrono de seis polos, conectado en Y con valores nominales de 1 MVA, 3.2 kV, factor de potencia de retraso de 0.9, y 60 Hz. La resistencia del inducido R_A es de 0.7 Ω. Las pérdidas de núcleo de este generador en condiciones nominales son de 8 kW, y las pérdidas por fricción y rozamiento con el aire son de 10 kW. Las características de circuito abierto y cortocircuito se muestran en la figura P4-2.

4-16. *a*) ¿Cuál es la reactancia síncrona saturada de este generador en condiciones nominales?
b) ¿Cuál es la reactancia síncrona no saturada del generador?
c) Dibuje la gráfica de la reactancia síncrona saturada del generador en función de la carga.

4-17. *a*) ¿Cuál es la corriente nominal y el voltaje interno generado por el generador?
b) ¿Cuál es la corriente de campo que requiere el generador para operar con los valores nominales de voltaje, corriente y factor de potencia?

4-18. ¿Cuál es la regulación de voltaje del generador con corriente y factor de potencia nominales?

4-19. Si el generador opera en condiciones nominales y súbitamente se elimina la carga, ¿cuál será el voltaje nominal?

4-20. ¿Cuáles son las pérdidas eléctricas del generador en condiciones nominales?

4-21. Si la máquina opera en condiciones nominales, ¿qué par de entrada se debe aplicar al eje del generador? Exprese su respuesta tanto en newton-amperes como en libras-pies.

4-22. ¿Cuál es el ángulo δ del par del generador en condiciones nominales?

4-23. Suponga que la corriente de campo del generador se fija para suministrar 3 200 V en condiciones nominales. ¿Cuál es el límite de estabilidad estática del generador? (*Nota:* Puede

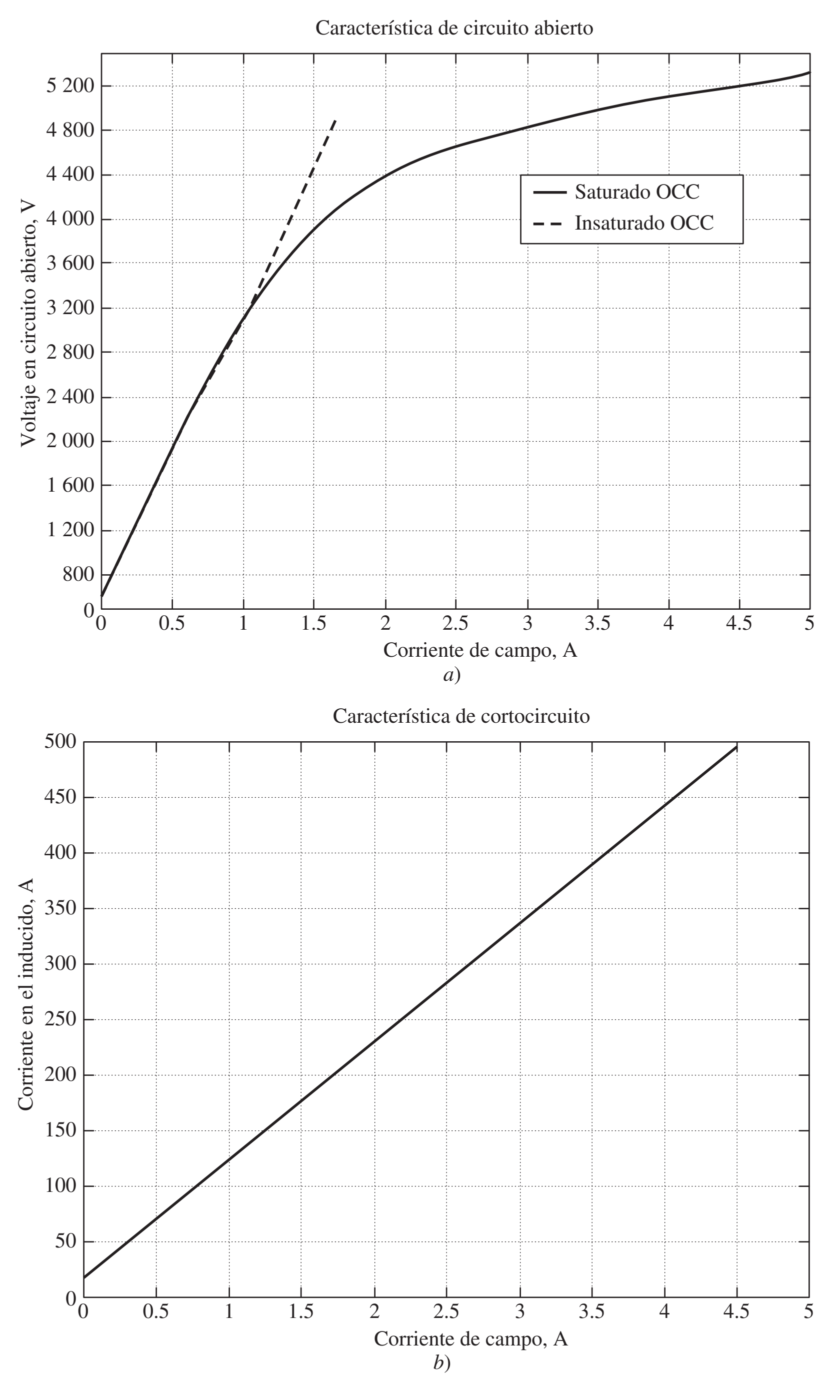


FIGURA P4-2 *a*) Curva característica de circuito abierto del generador de los problemas 4-16 a 4-26. *b*) Curva característica de cortocircuito del generador de los problemas 4-16 a 4-26.

despreciar R_A para facilitar el cálculo.) ¿Qué tan cerca se encuentra el generador a plena carga del límite de estabilidad estática?

4-24. Suponga que la corriente de campo del generador se fija para suministrar 3 200 V en condiciones nominales. Dibuje la gráfica de la potencia que suministra en función del ángulo δ del par.

4-25. Suponga que la corriente de campo del generador se fija para suministrar voltaje nominal con corriente de carga y factor de potencia nominales. Si la corriente de campo y la magnitud de la corriente de carga se mantienen constantes, ¿cómo cambiará el voltaje en las terminales conforme el factor de potencia varía desde 0.85 en retraso hasta 0.85 en adelanto? Haga una gráfica del voltaje terminal contra el ángulo de impedancia de la carga que alimenta este generador.

4-26. Suponga que el generador está conectado a un bus infinito de 3 200 V y que su corriente de campo se fija para que suministre al bus infinito la potencia y factor de potencia nominales.

Puede despreciar la resistencia en el inducido R_A para responder las siguientes preguntas.

a) ¿Qué pasaría con las potencias real y reactiva suministradas por este generador si se redujera en 5% el flujo del campo (y por lo tanto E_A)?
b) Dibuje una gráfica de la potencia real que suministra el generador en función del flujo ϕ a medida que éste varía desde 80 hasta 100% del flujo en condiciones nominales.
c) Dibuje la gráfica de la potencia reactiva suministrada por el generador en función del flujo ϕ a medida que éste varía desde 80 hasta 100% del flujo en condiciones nominales.
d) Dibuje la corriente de línea suministrada por el generador en función del flujo ϕ a medida que éste varía desde 80 hasta 100% del flujo en condiciones nominales.

4-27. Dos generadores síncronos trifásicos idénticos de 2.5 MVA, 1 200 V, FP de 0.8 en retraso, 60 Hz, se conectan en paralelo para alimentar una carga. Los motores primarios de los dos generadores tienen una característica diferente de caída de velocidad. Si las corrientes de campo de ambos generadores son iguales, uno suministra 1 200 A con un FP de 0.9 en retraso y el otro 900 A con un FP de 0.75 en retraso.

a) ¿Cuáles son las potencias real y reactiva que cada generador suministra a la carga?
b) ¿Cuál es el factor de potencia total de la carga?
c) ¿En qué dirección se debe fijar la corriente de campo de cada generador para que operen con el mismo factor de potencia?

4-28. Una estación de generación de un sistema de potencia consta de cuatro generadores síncronos de 300 MVA, 15 kV y un FP de 0.85 en retraso que operan en paralelo con características de caída de velocidad idénticas. Los mecanismos regulares de los motores primarios de los generadores se ajustan para producir una caída de 3 Hz al pasar de vacío a plena carga. Tres de estos generadores suministran 200 MW constantemente a una frecuencia de 60 Hz, mientras que el cuarto generador (llamado *generador oscilante*) soporta todos los cambios por incremento de la carga del sistema y mantiene la frecuencia de éste en 60 Hz.

a) En un instante dado, las cargas totales del sistema son de 650 MW a una frecuencia de 60 Hz. ¿Cuáles son las frecuencias en vacío de cada uno de los generadores del sistema?
b) Si la carga del sistema se incrementa a 725 MW y los puntos de ajuste del mecanismo regulador no cambian, ¿cuál será la nueva frecuencia del sistema?
c) ¿A qué frecuencia se debe ajustar la frecuencia en vacío del generador oscilante para que la frecuencia del sistema sea otra vez de 60 Hz?
d) Si el sistema opera en las condiciones que se describen en el inciso *c*), ¿qué sucedería si el generador oscilante se desconectara de la línea de potencia?

4-29. Un generador síncrono de 100 MVA, 14.4 kV, con un FP de 0.8 en retraso, conectado en Y, tiene una resistencia en el inducido despreciable y una reactancia síncrona de 1.0 por unidad. El generador está conectado en paralelo con un bus infinito de 60 Hz y 14.4 kV que puede suministrar o consumir cualquier cantidad de potencia real o reactiva sin cambios en la frecuencia o voltaje en las terminales.

a) ¿Cuál es la reactancia síncrona del generador en ohms?
b) ¿Cuál es el voltaje interno generado $\mathbf{E}_A$ del generador en condiciones nominales?
c) ¿Cuál es la corriente en el inducido $\mathbf{I}_A$ en la máquina en condiciones nominales?
d) Suponga que el generador opera inicialmente en condiciones nominales. Si disminuye 5% el voltaje interno generado $\mathbf{E}_A$, ¿cuál será la nueva corriente en el inducido $\mathbf{I}_A$?
e) Repita el inciso *d*) con reducciones de 10, 15, 20 y 25% de $\mathbf{E}_A$.
f) Dibuje la gráfica de la magnitud de la corriente del inducido I_A en función de E_A. (Si lo desea, puede utilizar el MATLAB para realizar esta gráfica.)

BIBLIOGRAFÍA

1. Chaston, A.N., *Electric Machinery,* Reston Publishing, Reston, Va., 1986.
2. Del Toro. V., *Electric Machines and Power Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, Nueva Jersey, 1985.
3. Fitzgerald, A.E. y C. Kingsley, Jr., *Electric Machinery*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1952.
4. Fitzgerald, A.E., C. Kingsley, Jr. y S.D. Umans, *Electric Machinery*, McGraw-Hill Book Company, 5a. ed., Nueva York, 1990.
5. Kosow, Irving L., *Electric Machinery and Transformers*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, Nueva Jersey, 1972.
6. Liwschitz-Garik, Michael y Clyde Whipple, *Alternating-Current Machinery*, Van Nostrand, Princeton, Nueva Jersey, 1961.
7. McPherson, George, *An Introduction to Electrical Machines and Transformers*, Wiley, Nueva York, 1981.
8. Slemon. G.R. y A. Straughen, *Electric Machines*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1980.
9. Wernick, E.H. (ed.), *Electric Motor Handbook*, McGraw-Hill Book Company, Londres, 1978.

CAPÍTULO 5 Motores síncronos

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

- Entender el circuito equivalente de un motor síncrono.
- Poder trazar diagramas fasoriales de un motor síncrono.
- Saber las ecuaciones de potencia y par en un motor síncrono.
- Entender cómo y por qué el factor de potencia varía al aumentar la carga de un motor síncrono.
- Comprender cómo y por qué el factor de potencia varía a medida que lo hace la corriente de campo del motor (la curva "V").
- Comprender cómo se pueden poner en marcha los motores síncronos.
- Poder decir si una máquina síncrona actúa como motor o como generador, y si suministra o consume potencia reactiva, a partir del análisis de su diagrama fasorial.
- Entender los valores nominales de los motores síncronos.

Los motores síncronos son máquinas síncronas que se utilizan para convertir potencia eléctrica en potencia mecánica. En este capítulo se estudia la operación básica de los motores síncronos y se relaciona su conducta con la de los generadores síncronos.

5.1 PRINCIPIOS BÁSICOS DE LA OPERACIÓN DE LOS MOTORES

Para entender el concepto básico de un motor síncrono véase la figura 5-1, que muestra uno con dos polos. La corriente de campo I_F del motor produce un campo magnético en estado estacionario $\mathbf{B}_R$. Se aplica un conjunto de voltajes trifásicos al estator de la máquina, lo que produce un flujo de corriente trifásica en los devanados.

Como se demostró en el capítulo 3, un conjunto de corrientes trifásicas en el inducido de un devanado produce un campo magnético giratorio uniforme $\mathbf{B}_S$. Por lo tanto, hay dos campos magnéticos presentes en la máquina y el *campo del rotor tenderá a alinearse con el campo del estator*, igual que dos imanes tenderán a alinearse si se colocan uno cerca del otro. Debido a que el campo magnético del estator gira, el campo magnético del rotor (y el rotor mismo) tratará constantemente de alcanzarlo. Mientras más grande sea el ángulo entre los dos campos magnéticos (hasta un ángulo máximo), mayor será el par en el rotor de la máquina. El principio básico de la operación de los motores síncronos es que el rotor "persigue" al campo magnético giratorio del estator alrededor de un círculo y nunca lo alcanza.

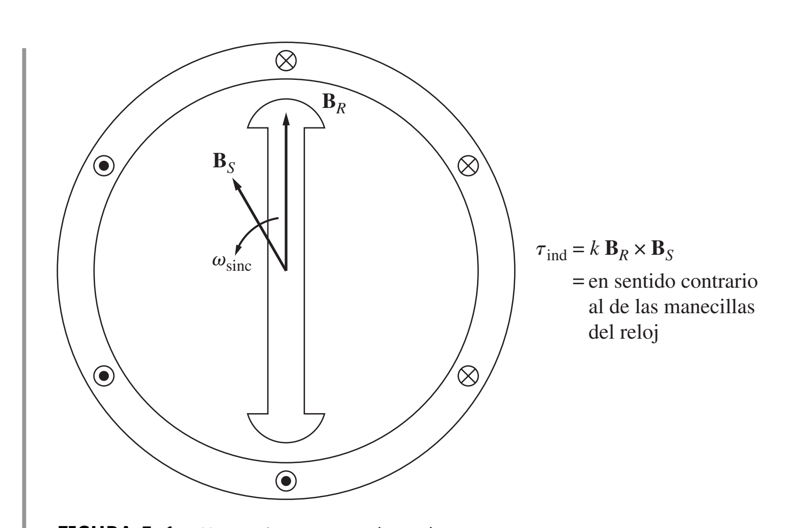


FIGURA 5-1 Motor síncrono con dos polos.

Debido a que un motor síncrono es igual físicamente a un generador síncrono, todas las ecuaciones básicas de velocidad, potencia y par de los capítulos 3 y 4 se utilizan también en el caso de los motores síncronos.

Circuito equivalente de un motor síncrono

Un motor síncrono es igual en todos los aspectos a un generador síncrono, excepto en que la dirección del flujo de potencia es la opuesta. Debido a que se invierte la dirección del flujo de potencia en la máquina, se puede esperar que la dirección del flujo de corriente en el estator del motor también se invierta. Por lo tanto, el circuito equivalente de un motor síncrono es exactamente igual al circuito equivalente de un generador síncrono, *excepto* en que la dirección de referencia de $\mathbf{I}_A$ está *invertida*. En la figura 5-2*a*) se muestra el circuito equivalente completo resultante y en la figura 5-2*b*) se puede observar el circuito equivalente por fase. Igual que como se especificó antes, las tres fases del circuito equivalente pueden estar conectadas tanto en Y como en Δ.

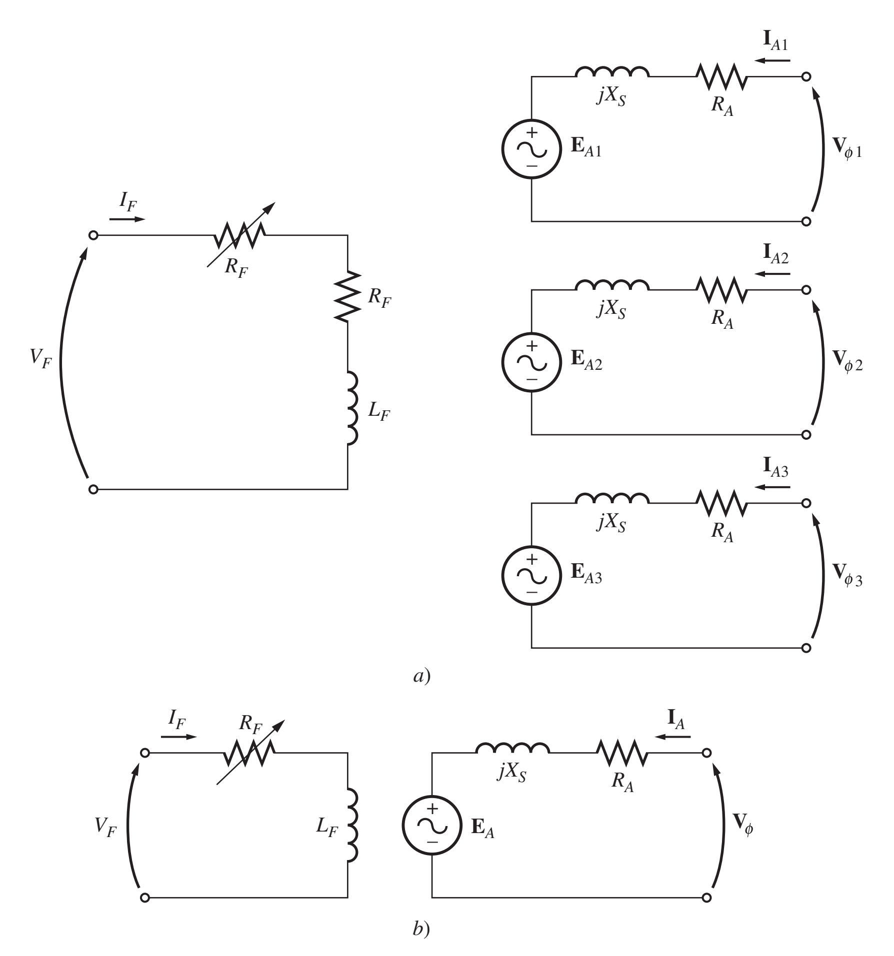


FIGURA 5-2 *a*) Circuito equivalente completo de un motor síncrono trifásico. *b*) Circuito equivalente por fase.

Debido al cambio en la dirección de $\mathbf{I}_A$, cambia también la ecuación de la ley de voltaje de Kirchhoff para el circuito equivalente. La nueva ecuación de la ley de voltaje de Kirchhoff es

$$\mathbf{V}_\phi = \mathbf{E}_A + jX_S\mathbf{I}_A + R_A\mathbf{I}_A \tag{5-1}$$

o

$$\mathbf{E}_A = \mathbf{V}_\phi - jX_S\mathbf{I}_A - R_A\mathbf{I}_A \tag{5-2}$$

Ésta es exactamente la misma ecuación que para el generador, excepto que se invierte el signo en el término de la corriente.

Motores síncronos desde la perspectiva del campo magnético

Para comenzar a entender la operación de un motor síncrono, es preciso dar otra mirada a un generador síncrono conectado a un bus infinito. El generador tiene un motor primario que hace girar el eje y causa que éste rote. La dirección del par aplicado τ_{ap} del motor primario sigue la dirección del movimiento porque el motor primario hace que el generador gire.

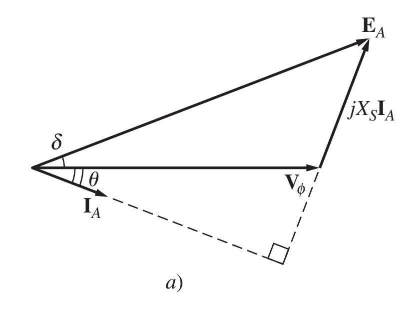
En la figura 5-3*a*) se muestra el diagrama fasorial de un generador que opera con una corriente de campo grande y en la figura 5-3*b*) se puede ver el diagrama del campo magnético correspondiente. Como ya se explicó, $\mathbf{B}_R$ corresponde a (produce) $\mathbf{E}_A$, $\mathbf{B}_{net}$ corresponde a (produce) $\mathbf{V}_\phi$ y $\mathbf{B}_S$ corresponde a (produce) $\mathbf{E}_{estat}$ $(= -jX_S\mathbf{I}_A)$. La rotación tanto del diagrama de campo magnético como del diagrama fasorial es en sentido contrario al de las manecillas del reloj en la figura, de acuerdo con la convención matemática estándar de incremento de ángulo.

El par inducido en el generador se puede calcular a partir del diagrama de campo magnético. De las ecuaciones (3-60) y (3-61) el par inducido está dado por

$$\tau_{ind} = k\mathbf{B}_R \times \mathbf{B}_{net} \tag{3-60}$$

o

$$\tau_{ind} = k\mathbf{B}_R\mathbf{B}_{net}\operatorname{sen}\delta \tag{3-61}$$



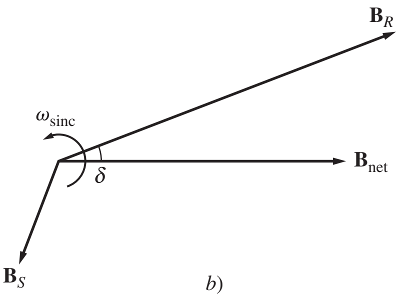
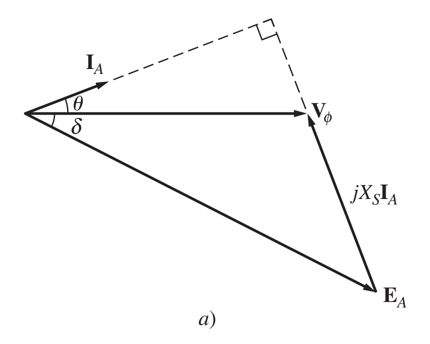


FIGURA 5-3 *a*) Diagrama fasorial de un generador síncrono que opera con un factor de potencia en retraso. *b*) El diagrama de campo magnético correspondiente.

Nótese que a partir de ese campo magnético *el par inducido en esta máquina es en el sentido de las manecillas del reloj*, en sentido opuesto a la rotación. En otras palabras, el par inducido en el generador es un par contrario, en sentido contrario a la rotación provocada por el par externo aplicado τ_{ap}.

Supóngase que en lugar de que el eje gire en el sentido del movimiento, el motor principal súbitamente perdiera potencia y comenzara a frenar el eje de la máquina. ¿Qué pasaría con la máquina? El rotor pierde velocidad debido al obstáculo en su eje y se retrasa con respecto al campo magnético de la máquina (véase la figura 5-4*a*). A medida que el rotor, y por lo tanto $\mathbf{B}_R$, pierde velocidad y queda detrás de $\mathbf{B}_{net}$, la operación de la máquina cambia de manera súbita. Por la ecuación (3-60), cuando $\mathbf{B}_R$ está detrás de $\mathbf{B}_{net}$, se invierte la dirección del par inducido y va en sentido contrario al de las manecillas del reloj. En otras palabras, el par de la máquina tiene la dirección del movimiento y la máquina funciona como un motor. El ángulo del par δ en incremento tiene como resultado un par cada vez más grande en dirección de la rotación, hasta que a la larga el par inducido del motor es igual al par de la carga en su eje. En ese momento, la máquina opera en estado estacionario y a velocidad síncrona una vez más, pero ahora como motor.

El diagrama fasorial correspondiente a la operación como generador se muestra en la figura 5-3*a*), mientras que el que corresponde a la operación como motor se puede ver en la figura 5-4*a*). La razón de que la cantidad $jX_S\mathbf{I}_A$ apunte de $\mathbf{V}_\phi$ a $\mathbf{E}_A$ en el generador y de $\mathbf{E}_A$ a $\mathbf{V}_\phi$ en el motor, es que se invirtió la dirección de referencia de $\mathbf{I}_A$ en la definición del circuito equivalente del motor. La diferencia básica entre la operación como motor y como generador de las máquinas síncronas se puede observar tanto en el diagrama de campo magnético como en el diagrama fasorial. *En un generador*, $\mathbf{E}_A$ está delante de $\mathbf{V}_\phi$ y $\mathbf{B}_R$ está delante de $\mathbf{B}_{net}$. *En un motor*, $\mathbf{E}_A$ está detrás de $\mathbf{V}_\phi$ y $\mathbf{B}_R$ está detrás de $\mathbf{B}_{net}$. En un motor el par inducido tiene la dirección del movimiento y en un generador el par inducido es un par contrario, en sentido contrario a la dirección del movimiento.



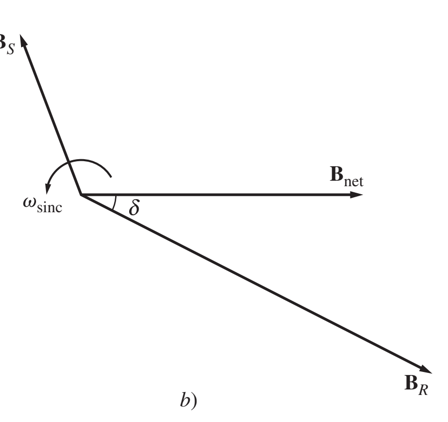


FIGURA 5-4 *a*) Diagrama fasorial de un motor síncrono. *b*) Diagrama del campo magnético correspondiente.

5.2 OPERACIÓN DE MOTOR SÍNCRONO EN ESTADO ESTACIONARIO

Esta sección explora la conducta de los motores síncronos en diferentes condiciones de carga y corriente de campo, así como la cuestión de corrección del factor de potencia en los motores síncronos. Por simplicidad, por lo general se despreciará en esta explicación la resistencia del inducido de los motores. Sin embargo, se tomará en cuenta R_A en algunos de los cálculos numéricos.

Curva característica par-velocidad de los motores síncronos

Los motores síncronos suministran potencia a cargas que son básicamente dispositivos de velocidad constante. Es normal que estén conectados a sistemas de potencia *mucho* más grandes que los motores individuales, por lo que los sistemas de potencia parecen buses infinitos de motores. Esto quiere decir que el voltaje en los terminales y la frecuencia del sistema serán constantes sin importar la cantidad de potencia que consuma el motor. La velocidad de rotación del motor está asociada a la tasa de rotación de los campos magnéticos, y la tasa de rotación de los campos magnéticos aplicados está asociada a la frecuencia eléctrica aplicada, *por lo que la velocidad del motor síncrono será constante sin que importe la carga*. Esta velocidad fija de rotación está dada por

$$n_m = \frac{120\, f_e}{P} \tag{5-3}$$

donde n_m es la velocidad mecánica de rotación, f_e es la frecuencia eléctrica del estator y P es el número de polos en el motor.

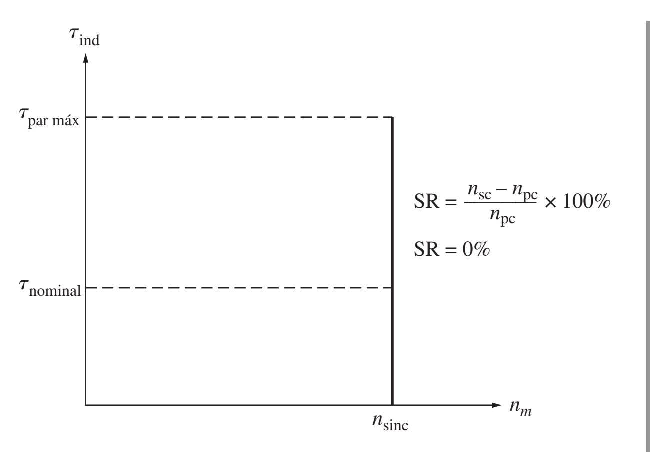


FIGURA 5-5 Característica par-velocidad de un motor síncrono. Puesto que la velocidad del motor es constante, su regulación de velocidad es cero.

En la figura 5-5 se muestra la curva característica par-velocidad. La velocidad en estado estacionario del motor es constante desde vacío hasta el par máximo que el motor puede suministrar (llamado *par máximo*), por lo que la regulación de velocidad del motor [ecuación (3-68)] es de 0%. La ecuación del par es

$$\tau_{\text{ind}} = k\mathbf{B}_R\mathbf{B}_{\text{net}} \operatorname{sen} \delta \tag{3-61}$$

o

$$\tau_{\text{ind}} = \frac{3V_\phi E_A \operatorname{sen} \delta}{\omega_m X_S} \tag{4-22}$$

El par máximo se presenta cuando $\delta = 90°$. Sin embargo, los pares normales a plena carga son mucho menores que éste. De hecho, el par máximo es por lo regular tres veces el par de la máquina a plena carga.

Cuando el par en el eje de un motor síncrono excede el par máximo, el rotor no puede seguir unido al campo magnético del estator y al campo magnético neto, sino que comienza a retrasarse en relación con ellos. Conforme el rotor pierde velocidad, el campo magnético del estator "lo rebasa" varias veces y la dirección del par inducido en el rotor se invierte con cada rebase. El enorme par resultante oscila primero hacia un lado y luego hacia el otro y provoca que todo el motor vibre con fuerza. La pérdida de sincronización una vez que se excede el par máximo se conoce como *deslizamiento de polos*.

El par máximo del motor está dado por

$$\tau_{\text{ind}} = kB_RB_{\text{net}} \tag{5-4a}$$

o

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{3V_\phi E_A}{\omega_m X_S} \tag{5-4b}$$

Estas ecuaciones indican que mientras más grande sea la corriente de campo (y en consecuencia, E_A) *más grande será el par máximo del motor*. Por lo tanto, hay una ventaja en la estabilidad cuando se opera el motor con una gran corriente de campo o un gran E_A.

Efecto de los cambios de carga en los motores síncronos

Si se fija una carga al eje de un motor síncrono, éste desarrollará suficiente par como para mantener el motor y su carga a velocidad síncrona. ¿Qué pasa si la carga en un motor síncrono cambia?

Para encontrar la respuesta a esta pregunta, examínese un motor síncrono que opera inicialmente con un factor de potencia en adelanto, tal como se muestra en la figura 5-6. Si se incrementa la carga en el eje del motor, el rotor comenzará a perder velocidad. Conforme pierde velocidad, el ángulo del par δ se hace más grande y se incrementa el par inducido. Este incremento en el par inducido a la larga acelera de nuevo el rotor y el motor vuelve a girar a velocidad síncrona, pero con un ángulo de par δ más grande.

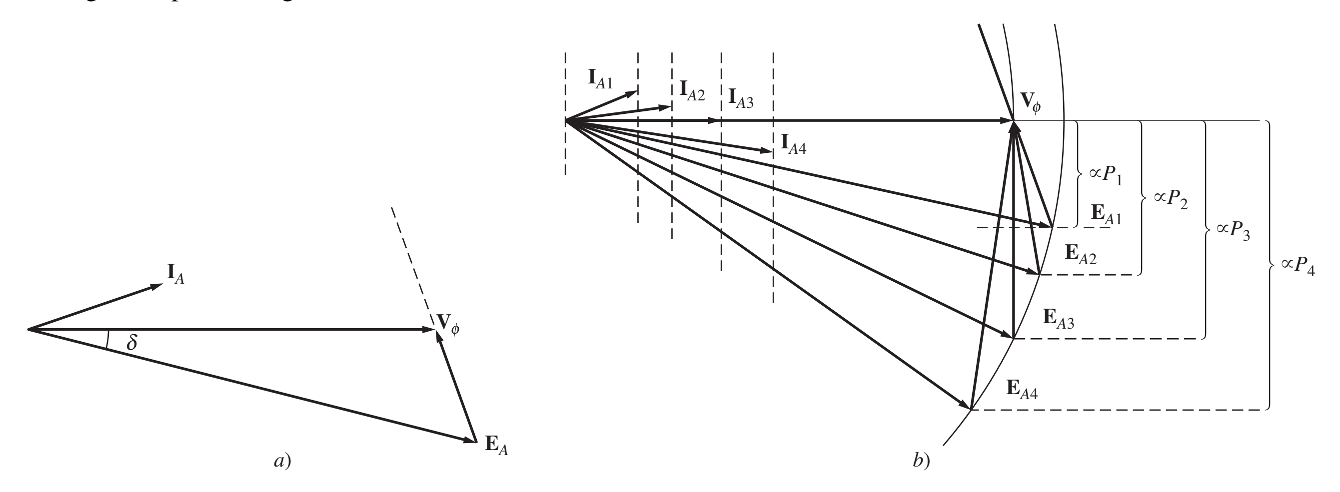


FIGURA 5-6 *a*) Diagrama fasorial de un motor que opera con un factor de potencia en adelanto. *b*) Efecto de incrementar la carga en la operación de un motor síncrono.

¿Cuál es la forma del diagrama fasorial durante este proceso? Para encontrar la respuesta a esta pregunta, examínense las restricciones sobre la máquina durante un cambio en la carga. La figura 5-6*a*) muestra el diagrama fasorial del motor antes de que se incrementen las cargas. El voltaje interno generado E_A es igual a $K\phi\omega$ y, por lo tanto, *sólo* depende de la corriente de campo en la máquina y de la velocidad de ésta. La velocidad está restringida a ser constante en función de la fuente de potencia de entrada y, debido a que no se ha tocado el circuito de campo, también es constante la corriente de campo. Por lo tanto, $|\mathbf{E}_A|$ *debe ser constante aun cuando la carga varíe*. Se incrementarán las distancias proporcionales a la potencia (E_A sen δ e I_A cos θ), pero la magnitud de $\mathbf{E}_A$ debe ser constante. A medida que varía la carga, $\mathbf{E}_A$ se mueve hacia abajo como se muestra en la figura 5-6*b*). Conforme $\mathbf{E}_A$ se mueve hacia abajo cada vez más, se debe incrementar la cantidad $jX_S\mathbf{I}_A$ para llegar de la punta de $\mathbf{E}_A$ hasta $\mathbf{V}_\phi$ y, por lo tanto, también se incrementa la corriente en el inducido $\mathbf{I}_A$. Nótese que el ángulo θ del factor de potencia también cambia, esto es, cada vez está menos en adelanto y más en retraso.

EJEMPLO 5-1

Una máquina síncrona de 208 V, 45 hp, un factor de potencia de 0.8 en adelanto, conectada en Δ a 60 Hz, tiene una reactancia síncrona de 2.5 Ω y una resistencia despreciable en el inducido. Sus pérdidas por fricción y por rozamiento con el aire son de 1.5 kW y sus pérdidas en el núcleo son de 1.0 kW. Al principio, el eje suministra una carga de 15 hp y el factor de potencia del motor es de 0.80 en adelanto.

a) Dibuje el diagrama fasorial del motor y encuentre los valores de $\mathbf{I}_A$, I_L y $\mathbf{E}_A$.
b) Suponga que la carga en el eje se incrementa hasta 30 hp. Dibuje la reacción del diagrama fasorial en respuesta a este cambio.

c) Encuentre $\mathbf{I}_A$, I_L y $\mathbf{E}_A$ después del cambio en la carga. ¿Cuál es el nuevo factor de potencia del motor?

Solución

a) Inicialmente, la potencia de salida del motor es de 15 hp. Esto corresponde a una salida de

$$P_{\text{sal}} = (15 \text{ hp})(0.746 \text{ kW/hp}) = 11.19 \text{ kW}$$

Por lo tanto, la potencia eléctrica que se suministra a la máquina es de

$$\begin{aligned} P_{\text{entr}} &= P_{\text{sal}} + P_{\text{pérd mec}} + P_{\text{pérd núc}} + P_{\text{pérd eléc}} \\ &= 11.19 \text{ kW} + 1.5 \text{ kW} + 1.0 \text{ kW} + 0 \text{ kW} = 13.69 \text{ kW} \end{aligned}$$

Debido a que el factor de potencia del motor es de 0.8 en adelanto, el flujo de corriente de línea resultante es

$$\begin{aligned} I_L &= \frac{P_{\text{entr}}}{\sqrt{3}V_T \cos\theta} \\ &= \frac{13.69 \text{ kW}}{\sqrt{3}(208 \text{ V})(0.80)} = 47.5 \text{ A} \end{aligned}$$

y la corriente en el inducido es $I_L/\sqrt{3}$, con un factor de potencia de 0.8 en adelanto, lo que da el resultado de

$$\mathbf{I}_A = 27.4 \angle 36.87° \text{ A}$$

Para encontrar $\mathbf{E}_A$, se aplica la ley de voltaje de Kirchhoff [ecuación (5-2)]:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_A &= \mathbf{V}_\phi - jX_S\mathbf{I}_A \\ &= 208 \angle 0° \text{ V} - (j2.5 \ \Omega)(27.4 \angle 36.87° \text{ A}) \\ &= 208 \angle 0° \text{ V} - 68.5 \angle 126.87° \text{ V} \\ &= 249.1 - j54.8 \text{ V} = 255 \angle -12.4° \text{ V} \end{aligned}$$

En la figura 5-7*a*) se muestra el diagrama fasorial resultante.

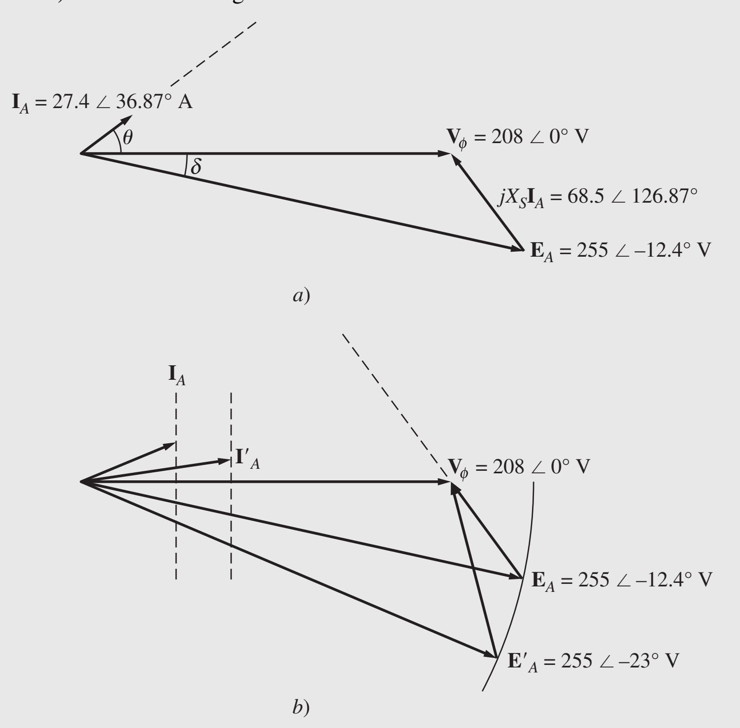


FIGURA 5-7 *a*) Diagrama fasorial del motor del ejemplo 5-1*a*). *b*) Diagrama fasorial del motor del ejemplo 5-1*b*).

b) A medida que se incrementa a 30 hp la potencia en el eje, éste pierde velocidad momentáneamente y el voltaje interno generado $\mathbf{E}_A$ salta a un ángulo δ más grande y mantiene su magnitud constante. En la figura 5-7*b*) se puede observar el diagrama fasorial resultante.

c) Una vez que la carga cambia, la potencia eléctrica de entrada de la máquina es

$$\begin{aligned} P_{\text{entr}} &= P_{\text{sal}} + P_{\text{pérd mec}} + P_{\text{pérd núc}} + P_{\text{pérd eléc}} \\ &= (30 \text{ hp})(0.746 \text{ kW/hp}) + 1.5 \text{ kW} + 1.0 \text{ kW} + 0 \text{ kW} \\ &= 24.88 \text{ kW} \end{aligned}$$

De la ecuación de la potencia en términos de ángulo de par [ecuación (4-20)], se puede encontrar la magnitud del ángulo δ (recuérdese que la magnitud de $\mathbf{E}_A$ es constante):

$$P = \frac{3V_\phi E_A \operatorname{sen} \delta}{X_S} \tag{4-20}$$

por lo que

$$\begin{aligned} \delta &= \operatorname{sen}^{-1} \frac{X_S P}{3V_\phi E_A} \\ &= \operatorname{sen}^{-1} \frac{(2.5\ \Omega)(24.88 \text{ kW})}{3(208 \text{ V})(355 \text{ V})} \\ &= \operatorname{sen}^{-1} 0.391 = 23° \end{aligned}$$

El voltaje interno generado es $\mathbf{E}_A = 355 \angle -23°$ V. Por lo tanto, $\mathbf{I}_A$ es

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_A &= \frac{\mathbf{V}_\phi - \mathbf{E}_A}{jX_S} \\ &= \frac{208 \angle 0° \text{ V} - 255 \angle -23° \text{ V}}{j2.5\ \Omega} \\ &= \frac{103.1 \angle 105° \text{ V}}{j2.5\ \Omega} = 41.2 \angle 15° \text{ A} \end{aligned}$$

e I_L será

$$I_L = \sqrt{3} I_A = 71.4 \text{ A}$$

El factor de potencia final será cos (–15°) o 0.966 en adelanto.

Efecto de cambios de la corriente de campo en los motores síncronos

Se ha estudiado cómo un cambio de la carga en el eje de un motor síncrono afecta al motor. Hay otra cantidad en un motor síncrono que se puede ajustar: su corriente de campo. ¿Qué efecto tiene un cambio de la corriente de campo en un motor síncrono?

Para encontrar la respuesta a esta pregunta, examínese la figura 5-8. La figura 5-8*a*) muestra un motor síncrono que opera inicialmente con un factor de potencia en retraso. Ahora, increméntese su corriente de campo y obsérvese el resultado en el motor. Nótese que un *incremento en la corriente de campo incrementa la magnitud de* $\mathbf{E}_A$, *pero no afecta la potencia real que suministra el motor*. La potencia que suministra el motor sólo cambia cuando cambia el par en la carga del eje. Puesto que un cambio en I_F no afecta la velocidad del eje n_m y debido a que la carga en el eje no cambia, la potencia real suministrada tampoco lo hace. Por supuesto, V_T también es constante debido a que la fuente de potencia que alimenta al motor lo mantiene constante. Las distancias proporcionales a la potencia en el diagrama fasorial (E_A sen δ e I_A cos θ) deben permanecer constantes. Cuando se incrementa la

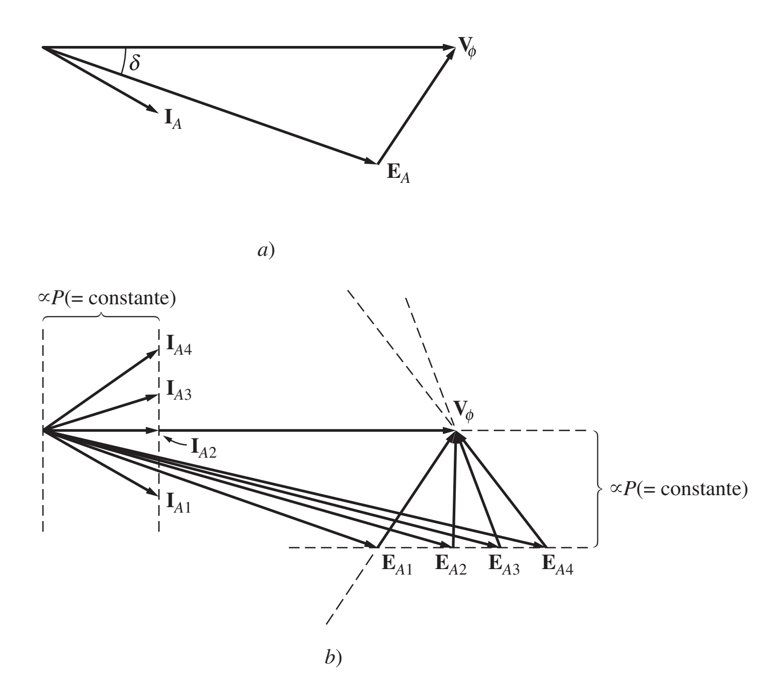


FIGURA 5-8 *a*) Motor síncrono que opera con un factor de potencia en retraso. *b*) Efecto del incremento de la corriente de campo en la operación de este motor.

corriente de campo, $\mathbf{E}_A$ debe incrementarse, pero sólo lo puede lograr por medio de un deslizamiento sobre la línea de la potencia constante. Este efecto se muestra en la figura 5-8*b*).

Nótese que conforme se incrementa el valor de $\mathbf{E}_A$, la magnitud de la corriente en el inducido $\mathbf{I}_A$ primero disminuye y luego se incrementa. Con un $\mathbf{E}_A$ bajo, la corriente en el inducido está en retraso y el motor es una carga inductiva. Actúa como una combinación de inductor y resistor y consume potencia reactiva Q. A medida que se incrementa la corriente de campo, la corriente en el inducido a la larga se alinea con $\mathbf{V}_\phi$ y el motor parece puramente resistivo. Si se incrementa la corriente de campo aún más, la corriente en el inducido está en adelanto y el motor se convierte en una carga capacitiva. Ahora actúa como una combinación de capacitor y resistor, consume potencia reactiva negativa $-Q$ o, alternativamente, suministra potencia reactiva Q al sistema.

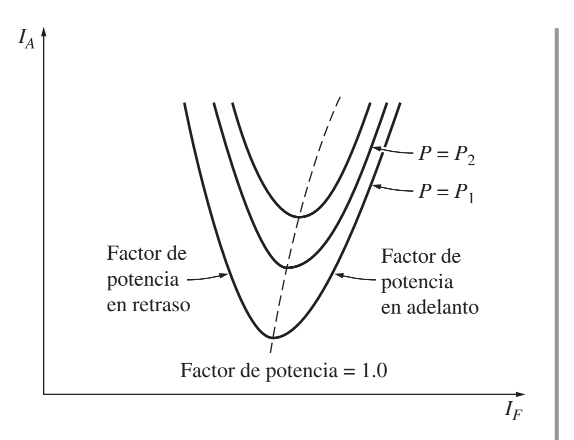


FIGURA 5-9 Curvas en V de un motor síncrono.

En la figura 5-9 se muestra una gráfica de I_A *versus* I_F de un motor síncrono. Esta gráfica se llama *curva en V del motor síncrono*, por la obvia razón de que tiene la forma de esa letra. Hay muchas curvas en V que corresponden a diferentes niveles de potencia real. En cada curva, la corriente mínima del inducido se presenta con un factor de potencia unitario cuando sólo se suministra al motor potencia real. En cualquier otro punto de la curva se suministra alguna cantidad de potencia reactiva, ya sea al motor o desde el motor. En el caso de corrientes de campo *menores* que el valor que resulta en la mínima I_A, la corriente del inducido está en retraso y consume Q. En el de corrientes de campo *mayores* que el valor que resulta en la mínima I_A, la corriente del inducido está en adelanto y suministra Q al sistema de potencia como lo haría un capacitor. Por lo tanto, si se controla la corriente de campo de un motor síncrono, se puede controlar la *potencia reactiva* suministrada a, o consumida por, el sistema de potencia.

Cuando la proyección del fasor $\mathbf{E}_A$ sobre $\mathbf{V}_\phi$ ($E_A \cos \delta$) es *más corta* que $\mathbf{V}_\phi$, el motor síncrono tiene una corriente en retraso y consume Q. Debido a que la corriente de campo es pequeña en esta situación, se dice que el motor está *subexcitado*. Por otro lado, cuando la proyección de $\mathbf{E}_A$ sobre $\mathbf{V}_\phi$ es *más larga* que $\mathbf{V}_\phi$, el motor síncrono tiene una corriente en adelanto y suministra Q al sistema de potencia. Debido a que la corriente de campo es grande en esta situación, se dice que el motor está *sobreexcitado*. En la figura 5-10 se muestran los diagramas fasoriales que ilustran estos conceptos.

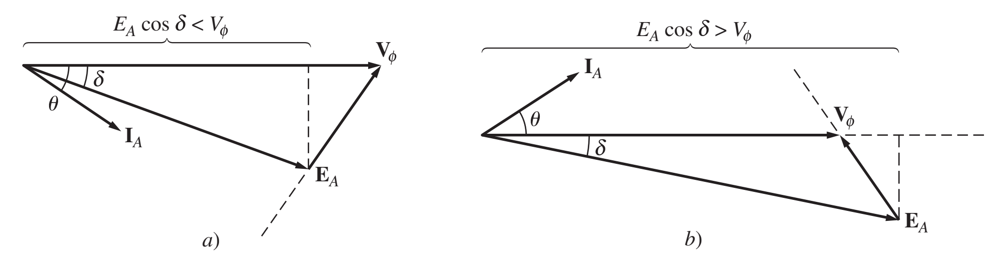


FIGURA 5-10 *a*) Diagrama fasorial de un motor síncrono *subexcitado*. *b*) Diagrama fasorial de un motor síncrono *sobreexcitado*.

EJEMPLO 5-2

El motor síncrono del ejemplo anterior de 208 V, 45 hp, un factor de potencia de 0.8 en adelanto, conectado en Δ, a 60 Hz, alimenta a una carga de 15 hp con un factor de potencia inicial de 0.85 en retraso. La corriente de campo I_F en estas condiciones es de 4.0 A.

a) Dibuje el diagrama fasorial inicial del motor y encuentre los valores de $\mathbf{I}_A$ y $\mathbf{E}_A$.
b) Dibuje el nuevo diagrama fasorial del motor si se incrementara el flujo del motor en 25%. ¿Cuál es el valor de $\mathbf{I}_A$ y $\mathbf{E}_A$ y el factor de potencia del motor en este momento?
c) Suponga que el flujo en el motor varía linealmente con la corriente de campo I_F. Haga una gráfica de I_A contra I_F del motor síncrono con una carga de 15 hp.

Solución

a) Del ejemplo anterior se sabe que la potencia eléctrica de entrada, incluyendo todas las pérdidas, es de $P_{\text{entr}} = 13.69$ kW. Ya que el factor de potencia del motor es de 0.85 en retraso, el flujo de corriente en el inducido resultante es

$$I_A = \frac{P_{\text{entr}}}{3V_\phi \cos \theta}$$

$$= \frac{13.69 \text{ kW}}{3(208 \text{ V})(0.85)} = 25.8 \text{ A}$$

El ángulo θ es $\cos^{-1} 0.85 = 31.8°$, por lo que la corriente del fasor I_A es igual a

$$\mathbf{I}_A = 25.8 \angle -31.8° \text{ A}$$

Para encontrar $\mathbf{E}_A$ se utiliza la ley de voltaje de Kirchhoff [ecuación (5-2)]:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_A &= \mathbf{V}_\phi - jX_S\mathbf{I}_A \\ &= 208 \angle 0° \text{ V} - (j2.5\ \Omega)(25.8 \angle -31.8° \text{ A}) \\ &= 208 \angle 0° \text{ V} - 64.5 \angle 58.2° \text{ V} \\ &= 182 \angle -17.5° \text{ V} \end{aligned}$$

El diagrama fasorial resultante se muestra en la figura 5-11, junto con los resultados del inciso *b*).

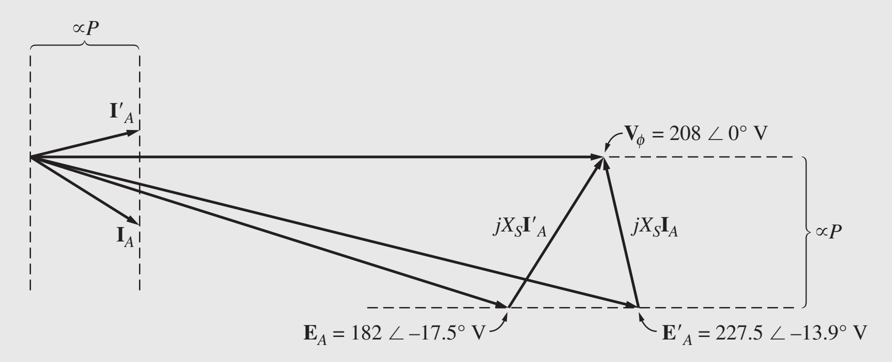


FIGURA 5-11 Diagrama fasorial del motor del ejemplo 5-2.

b) Si el motor se encuentra trabajando en la parte no saturada de la máquina y se incrementa 25% el flujo ϕ, entonces $E_A = K\phi\omega$ también se incrementará 25%:

$$E_{A2} = 1.25\ E_{A1} = 1.25(182\text{ V}) = 227.5\text{ V}$$

Sin embargo, la potencia suministrada a la carga debe permanecer constante. Debido a que la distancia E_A sen δ es proporcional a la potencia, esta distancia debe ser constante en el diagrama fasorial del nivel de flujo original al nuevo nivel de flujo. Por lo tanto,

$$E_{A1}\operatorname{sen}\delta_1 = E_{A2}\operatorname{sen}\delta_2$$

$$\delta_2 = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{E_{A1}}{E_{A2}}\operatorname{sen}\delta_1\right)$$

$$= \operatorname{sen}^{-1}\left[\frac{182\text{ V}}{227.5\text{ V}}\operatorname{sen}(-17.5°)\right] = -13.9°$$

Ahora se puede calcular la corriente en el inducido a partir de la ley de voltaje de Kirchhoff:

$$\mathbf{I}_{A2} = \frac{\mathbf{V}_\phi - \mathbf{E}_{A2}}{jX_S}$$

$$\mathbf{I}_A = \frac{208\angle 0°\text{ V} - 227.5\angle -13.9°\text{ V}}{j2.5\ \Omega}$$

$$= \frac{56.2\angle 103.2°\text{ V}}{j2.5\ \Omega} = 22.5\angle 13.2°\text{ A}$$

Finalmente, el factor de potencia del motor es

$$\text{FP} = \cos(13.2°) = 0.974 \qquad \text{en adelanto}$$

El diagrama fasorial resultante se muestra en la figura 5-11.

c) Debido a que se supone que el flujo varía linealmente con la corriente de campo, E_A también variará linealmente con ella. Se sabe que E_A es 182 V para una corriente de campo de 4.0 A, por lo que se puede calcular E_A para cualquier corriente de campo con la relación

$$\frac{E_{A2}}{182\text{ V}} = \frac{I_{F2}}{4.0\text{ A}}$$

o

$$E_{A2} = 45.5\ I_{F2} \tag{5-5}$$

El ángulo de par δ de cualquier corriente de campo dada se puede calcular a partir del hecho de que la potencia suministrada a la carga debe permanecer constante:

$$E_{A1}\operatorname{sen}\delta_1 = E_{A2}\operatorname{sen}\delta_2$$

por lo que

$$\delta_2 = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{E_{A1}}{E_{A2}}\operatorname{sen}\delta_1\right) \tag{5-6}$$

Estos dos datos nos dan el voltaje fasorial $\mathbf{E}_A$. Una vez que se conoce $\mathbf{E}_A$, se puede calcular la nueva corriente en el inducido por medio de la ley de voltaje de Kirchhoff:

$$\mathbf{I}_{A2} = \frac{\mathbf{V}_\phi - \mathbf{E}_{A2}}{jX_S} \tag{5-7}$$

A continuación se muestra un archivo M de MATLAB para calcular y hacer la gráfica de I_A e I_F por medio de las ecuaciones (5-5) a (5-7):

```
% Archivo M: v_curve.m
% Archivo M para crear una gráfica de la corriente en el inducido
% y la corriente de campo en el motor síncrono del ejemplo 5-2.
```

```
% Primero, inicializar los valores de la corriente de campo (21
% valores en el rango de 3.8-5.8 A)
i_f = (38:1:58) / 10;

% Ahora inicializar todos los demás valores
i_a = zeros(1,21);                 % Crear espacio para la matriz i_a
x_s = 2.5;                         % Reactancia síncrona
v_phase = 208;                     % Voltaje de fase a 0 grados
delta1 = -17.5 * pi/180;           % delta 1 en radianes
e_a1 = 182 * (cos(delta1) + j * sin(delta1));

% Calcular la corriente en el inducido para cada valor
ii = 1:21

   % Calcular la magnitud de e_a2
   e_a2 = 45.5 * i_f(ii);

   % Calcular delta2
   delta2 = asin ( abs(e_a1) / abs(e_a2) * sin(delta1) );

   % Calcular el fasor e_a2
   e_a2 = e_a2 * (cos(delta2) + j * sin(delta2));

   % Calcular i_a
   i_a(ii) = ( v_phase – e_a2 ) / ( j * x_s);
end

% Hacer la gráfica de la curva en V.
plot(i_f,abs (i_a),'Color', 'k','Linewidth',2.0);
xlabel('Corriente de campo (A)','Fontweight','Bold');
ylabel('Corriente en el inducido (A)','Fontweight','Bold');
title ('Curva en V del motor síncrono'),'Fontweight','Bold');
grid on;
```

La gráfica que produce este archivo M se muestra en la figura 5-12. Nótese que en el caso de una corriente de campo igual a 4.0 A, la corriente en el inducido es de 25.8 A. Este resultado coincide con el inciso *a)* de este ejemplo.

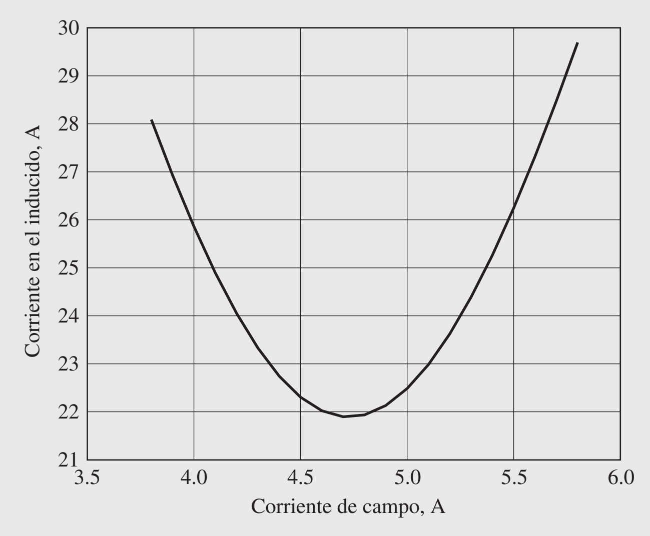


FIGURA 5-12 Curva en V del motor síncrono del ejemplo 5-2.

Los motores síncronos y la corrección del factor de potencia

La figura 5-13 muestra un bus infinito cuya salida está conectada a través de una línea de transmisión a una planta industrial en una ubicación lejana. La planta industrial consta de tres cargas. Dos

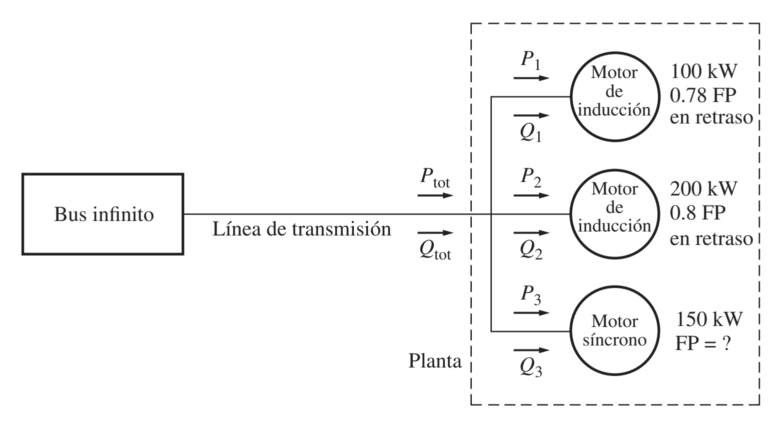


FIGURA 5-13 Sistema de potencia simple que consta de un bus infinito que alimenta a una planta industrial a través de una línea de transmisión.

de ellas son motores de inducción con factores de potencia en retraso y la tercera carga es un motor síncrono con un factor de potencia variable.

¿En qué ayuda al sistema de potencia la posibilidad de fijar el factor de potencia de una de las cargas? Para encontrar la respuesta a esta pregunta examínese el siguiente problema de ejemplo. (*Nota:* El apéndice A contiene las ecuaciones de potencia trifásica y un repaso de su utilización. Algunos lectores quizá deseen consultarlo al estudiar este problema.)

EJEMPLO 5-3

El bus infinito de la figura 5-13 opera a 480 V. La carga 1 es un motor de inducción que consume 100 kW con un factor de potencia de 0.78 en retraso, y la carga 2 es un motor de inducción que consume 200 kW con un factor de potencia de 0.8 en retraso. La carga 3 es un motor síncrono cuyo consumo de potencia real es de 150 kW.

a) Si se ajusta el motor síncrono para operar con un factor de potencia de 0.85 en retraso, ¿cuál es la corriente en la línea de transmisión de este sistema?
b) Si se ajusta el motor síncrono para operar con un factor de potencia de 0.85 en adelanto, ¿cuál es la corriente en la línea de transmisión de este sistema?
c) Suponga que las pérdidas en la línea de transmisión están dadas por

$$P_{PL} = 3I_L^2 R_L \qquad \text{pérdidas de línea}$$

donde PL representa las pérdidas en la línea. ¿Cuáles son las pérdidas de transmisión en ambos casos?

Solución

a) En el primer caso, la potencia real de la carga 1 es de 100 kW y la potencia reactiva de la carga 1 es

$$\begin{aligned} Q_1 &= P_1 \tan \theta \\ &= (100 \text{ kW}) \tan (\cos^{-1} 0.78) = (100 \text{ kW}) \tan 38.7° \\ &= 80.2 \text{ kVAR} \end{aligned}$$

La potencia real de la carga 2 es de 200 kW y la potencia reactiva de la carga 2 es

$$\begin{aligned} Q_2 &= P_2 \tan \theta \\ &= (200 \text{ kW}) \tan (\cos^{-1} 0.80) = (200 \text{ kW}) \tan 36.87° \\ &= 150 \text{ kVAR} \end{aligned}$$

La potencia real de la carga 3 es de 150 kW y su potencia reactiva es

$$\begin{aligned} Q_3 &= P_3 \tan \theta \\ &= (150 \text{ kW}) \tan (\cos^{-1} 0.85) = (150 \text{ kW}) \tan 31.8° \\ &= 93 \text{ kVAR} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la carga real total es

$$\begin{aligned} P_{\text{tot}} &= P_1 + P_2 + P_3 \\ &= 100 \text{ kW} + 200 \text{ kW} + 150 \text{ kW} = 450 \text{ kW} \end{aligned}$$

y la carga reactiva total es

$$\begin{aligned} Q_{\text{tot}} &= Q_1 + Q_2 + Q_3 \\ &= 80.2 \text{ kVAR} + 150 \text{ kVAR} + 93 \text{ kVAR} = 323.2 \text{ kVAR} \end{aligned}$$

El factor de potencia equivalente del sistema es de

$$\begin{aligned} \text{FP} &= \cos\theta = \cos\left(\tan^{-1}\frac{Q}{P}\right) = \cos\left(\tan^{-1}\frac{323.2 \text{ kVAR}}{450 \text{ kW}}\right) \\ &= \cos 35.7° = 0.812 \text{ en retraso} \end{aligned}$$

Por último, la corriente en la línea está dada por

$$I_L = \frac{P_{\text{tot}}}{\sqrt{3}V_L \cos\theta} = \frac{450 \text{ kW}}{\sqrt{3}(480 \text{ V})(0.812)} = 667 \text{ A}$$

b) Las potencias real y reactiva de las cargas 1 y 2 no cambian, ni tampoco la potencia real de la carga 3. La potencia reactiva de la carga 3 es

$$\begin{aligned} Q_3 &= P_3 \tan\theta \\ &= (150 \text{ kW}) \tan(-\cos^{-1} 0.85) = (150 \text{ kW}) \tan(-31.8°) \\ &= -93 \text{ kVAR} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la carga reactiva total es

$$\begin{aligned} P_{\text{tot}} &= P_1 + P_2 + P_3 \\ &= 100 \text{ kW} + 200 \text{ kW} + 150 \text{ kW} = 450 \text{ kW} \end{aligned}$$

y la carga reactiva total es

$$\begin{aligned} Q_{\text{tot}} &= Q_1 + Q_2 + Q_3 \\ &= 80.2 \text{ kVAR} + 150 \text{ kVAR} - 93 \text{ kVAR} = 137.2 \text{ kVAR} \end{aligned}$$

El factor de potencia equivalente del sistema es de

$$\begin{aligned} \text{FP} &= \cos\theta = \cos\left(\tan^{-1}\frac{Q}{P}\right) = \cos\left(\tan^{-1}\frac{137.2 \text{ kVAR}}{450 \text{ kW}}\right) \\ &= \cos 16.96° = 0.957 \text{ en retraso} \end{aligned}$$

Por último, la corriente en la línea está dada por

$$I_L = \frac{P_{\text{tot}}}{\sqrt{3}V_L \cos\theta} = \frac{450 \text{ kW}}{\sqrt{3}(480 \text{ V})(0.957)} = 566 \text{ A}$$

c) Las pérdidas de transmisión en el primer caso son

$$P_{\text{PL}} = 3I_L^2 R_L = 3(667 \text{ A})^2 R_L = 1\,344\,700\, R_L$$

Las pérdidas de transmisión en el segundo caso son

$$P_{\text{PL}} = 3I_L^2 R_L = 3(566 \text{ A})^2 R_L = 961\,070\, R_L$$

Nótese que en el segundo caso las pérdidas de transmisión de potencia son 28% menores que en el primer caso, mientras que la potencia suministrada a las cargas es la misma.

Como se observa en el ejemplo 5-3, la posibilidad de ajustar el factor de potencia de una o más cargas en un sistema de potencia puede afectar significativamente la eficiencia de operación del sistema de potencia. Mientras menor sea el factor de potencia de un sistema, mayores serán las pérdidas en las líneas de potencia que lo alimentan. La mayoría de las cargas en un sistema de potencia normal son motores de inducción, por lo que casi invariablemente los sistemas de potencia tienen un factor de potencia en retraso. Puede ser útil tener una o más cargas en retraso (motores síncronos sobreexcitados) en el sistema por las razones siguientes:

1. Una carga en adelanto puede suministrar cierta potencia reactiva Q a las cargas cercanas en retraso, en lugar de que esta potencia tenga que venir del generador. Debido a que la potencia reactiva no tiene que viajar a través de las líneas de transmisión de alta resistencia, la corriente en la línea de transmisión se reduce y las pérdidas en el sistema de potencia son mucho menores. (Esto se demostró en el ejemplo anterior.)
2. Debido a que las líneas de transmisión portan menos corriente, pueden ser menores para cierto flujo de potencia nominal. El equipo que se utiliza para un menor valor nominal de corriente reduce significativamente el costo del sistema de potencia.
3. Además, si se requiere un motor síncrono para operar con un factor de potencia en adelanto, el motor debe girar *sobreexcitado*. Este modo de operación incrementa el par máximo del motor y reduce la posibilidad de exceder accidentalmente el par máximo.

La utilización de motores síncronos u otro equipo para incrementar el factor de potencia general de un sistema de potencia se llama *corrección del factor de potencia*. Debido a que los motores síncronos pueden facilitar la corrección del factor de potencia y reducir los costos del sistema de potencia, muchas cargas aceptan un motor de velocidad constante (incluso si no *requieren* uno necesariamente) y son manejadas por motores síncronos. Aun cuando un motor síncrono es más caro que un motor de inducción individual, la posibilidad de operar uno de ellos con factores de potencia en adelanto para corregir el factor de potencia le ahorra dinero a las plantas industriales. Esto lleva a la compra y utilización de motores síncronos.

Cualquier motor síncrono que se encuentre en una planta se opera sobreexcitado para poder corregir el factor de potencia e incrementar su par máximo. Sin embargo, para operar un motor síncrono sobreexcitado se requiere una gran corriente de campo y flujo, que conllevan un calentamiento significativo del rotor. Los operadores deben tener cuidado de no sobrecalentar los devanados de campo excediendo la corriente de campo nominal.

Capacitor o condensador síncrono

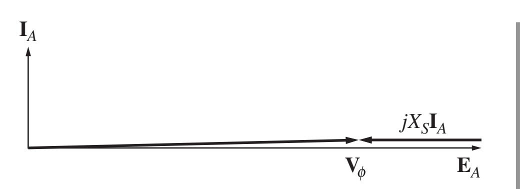


FIGURA 5-14 Diagrama fasorial de un *capacitor* o *condensador síncrono*.

Un motor síncrono adquirido para accionar una carga puede operar sobreexcitado para suministrar potencia reactiva Q a un sistema de potencia. De hecho, a veces se compra un motor síncrono y se opera en vacío, *simplemente para corregir el factor de potencia*. En la figura 5-14 se muestra el diagrama fasorial de un motor síncrono sobreexcitado en vacío.

Puesto que no sale potencia del motor, las distancias proporcionales a la potencia (E_A sen δ e I_A cos θ) son cero. Debido a que la ecuación de la ley de voltaje de Kirchhoff de un motor síncrono es

$$\mathbf{V}_\phi = \mathbf{E}_A + jX_S\mathbf{I}_A \tag{5-1}$$

la cantidad $jX_S\mathbf{I}_A$ apunta hacia la izquierda y, por lo tanto, la corriente en el inducido $\mathbf{I}_A$ apunta directamente hacia arriba. Si se examinan $\mathbf{V}_\phi$ e $\mathbf{I}_A$, la relación voltaje-corriente entre ellos se parece a la de un capacitor. Un motor síncrono sobreexcitado en vacío parece un capacitor grande para el sistema de potencia.

Algunos motores síncronos se vendían específicamente para utilizarse como correctores de factor de potencia. Estas máquinas tenían ejes que ni siquiera salían del marco del motor; no se les podía conectar una carga aun si se deseaba. Tales motores síncronos con propósito especial a menudo se llaman *condensadores* o *capacitores síncronos*. (*Condensador* es el viejo nombre dado al capacitor.)

En la figura 5-15*a*) se puede observar la curva en V de un capacitor síncrono. Ya que la potencia real que suministra a la máquina es cero (excepto por las pérdidas), con un factor de potencia unitario, la corriente $I_A = 0$. Conforme se incrementa la corriente de campo por arriba de este punto, la corriente en la línea (y la potencia reactiva que suministra el motor) aumenta de manera casi lineal hasta llegar al punto de saturación. La figura 5-15*b*) muestra el efecto de incrementar la corriente de campo en el diagrama fasorial del motor.

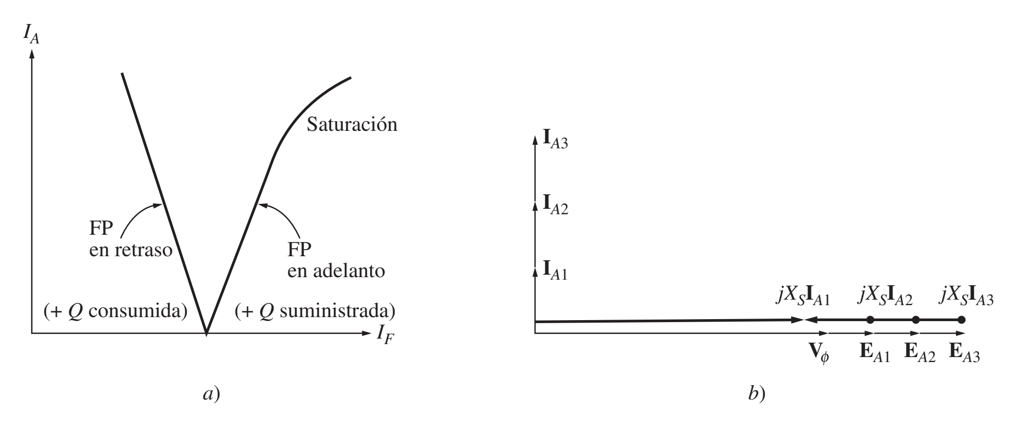


FIGURA 5-15 *a*) Curva en V de un capacitor síncrono. *b*) Diagrama fasorial de la máquina correspondiente.

Hoy en día, tanto el precio como el empleo de los capacitores estáticos convencionales son mucho más económicos que los capacitores síncronos. Sin embargo, aún hay algunos capacitores síncronos en uso en viejas plantas industriales.

5.3 ARRANQUE DE LOS MOTORES SÍNCRONOS

En la sección 5.2 se estudió el funcionamiento de los motores síncronos bajo condiciones de estado estacionario. En esa sección se supone que el motor siempre se enciende a *velocidad síncrona*. Lo que aún no se ha tomado en cuenta es la siguiente pregunta: ¿cómo llega el motor a velocidad síncrona?

Para entender la naturaleza del problema de arranque, remítase a la figura 5-16. Ésta muestra un motor síncrono a 60 Hz en el momento en que se aplica potencia a los devanados del estator. El rotor del motor está estacionario y, por lo tanto, el campo magnético $\mathbf{B}_R$ también. El campo magnético del estator $\mathbf{B}_S$ comienza a girar dentro del motor a velocidad síncrona.

La figura 5-16*a*) muestra la máquina en el tiempo $t = 0$ s, cuando $\mathbf{B}_R$ y $\mathbf{B}_S$ están perfectamente alineados. Con la ecuación de par inducido

$$\tau_{\text{ind}} = k\mathbf{B}_R \times \mathbf{B}_S \qquad \textbf{(3-58)}$$

el par inducido en el eje del rotor es cero. En la figura 5-16*b*) se observa la situación en el tiempo $t = 1/240$ s. En tan corto tiempo el rotor apenas se ha movido, pero el campo magnético del estator apunta ahora hacia la izquierda. Con la ecuación de par inducido, el par en el eje del rotor ahora tiene un sentido *contrario al de las manecillas del reloj*. La figura 5-16*c*) muestra la situación en el tiempo $t = 1/120$ s. En ese momento $\mathbf{B}_R$ y $\mathbf{B}_S$ apuntan en direcciones opuestas y τ_{ind} es igual a cero una vez más. En el tiempo $t = 3/240$ s, el campo magnético del estator apunta hacia la derecha y el par resultante tiene el *sentido de las manecillas del reloj*.

Por último, en $t = 1/60$ s, el campo magnético del estator está alineado una vez más con el campo magnético del rotor y $\tau_{\text{ind}} = 0$. Durante un ciclo eléctrico, el par pasó de tener una dirección en sentido opuesto a las manecillas del reloj a tener una dirección en el sentido de las manecillas del reloj y el par promedio durante el ciclo completo es cero. Lo que le sucede al motor es que vibra muy fuerte con cada ciclo eléctrico y finalmente se sobrecalienta.

Este método de arranque de un motor síncrono no es nada satisfactorio; los gerentes tienden a enojarse con los empleados que queman un equipo tan caro. Así que, ¿cómo se *puede* hacer arrancar un motor síncrono?

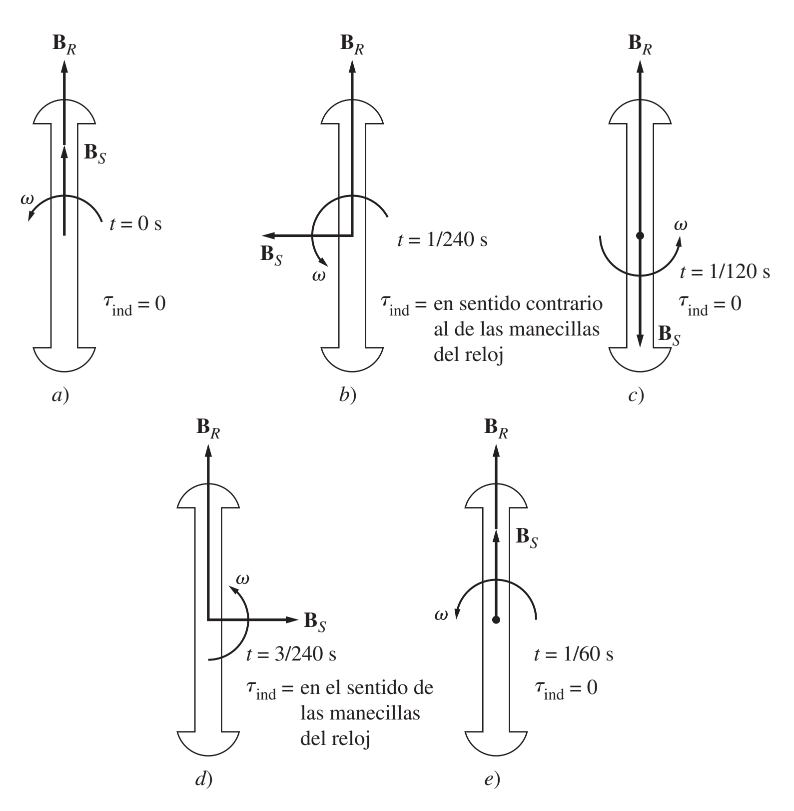


FIGURA 5-16 Problemas en el arranque de un motor síncrono: el par alterna rápidamente en magnitud y dirección, por lo que el par de arranque neto es cero.

Se pueden utilizar tres métodos para hacerlo de manera segura:

1. *Reducir la velocidad del campo magnético del estator* a un valor lo suficientemente bajo como para que el rotor pueda acelerar y fijarse a él durante un semiciclo de la rotación del campo magnético. Este objetivo se puede lograr con la reducción de la frecuencia de la potencia eléctrica aplicada.
2. *Utilizar un motor primario externo* para acelerar el motor síncrono hasta velocidad síncrona, pasar por el procedimiento de entrada en sincronía y convertir la máquina al instante en un generador. Entonces, apagar o desconectar el motor principal para convertir la máquina síncrona en un motor.
3. *Utilizar devanados de amortiguamiento*. A continuación se explicará la función de los devanados de amortiguamiento y su utilización en el arranque de un motor.

En seguida se describe cada uno de estos métodos de arranque de un motor síncrono.

Arranque del motor por medio de la reducción de la frecuencia eléctrica

Si los campos magnéticos del estator en un motor síncrono giran a una velocidad lo suficientemente baja, no habrá ningún problema para que el rotor se acelere y se enlace con el campo magnético del estator. Entonces se puede incrementar la velocidad de los campos magnéticos del estator aumentando gradualmente f_e hasta su valor normal de 50 o 60 Hz.

Este método de arranque de un motor síncrono tiene mucho sentido, pero presenta un gran problema: ¿de dónde se obtiene la frecuencia eléctrica variable? Los sistemas de potencia normales están regulados cuidadosamente a 50 o 60 Hz, por lo que hasta hace poco cualquier fuente de voltaje con frecuencia variable tenía que provenir de un generador dedicado. Esta situación obviamente es poco práctica, excepto en circunstancias muy poco usuales.

Hoy en día las cosas han cambiado. Se pueden usar los controladores de estado sólido para motores a fin de convertir una frecuencia de entrada constante en cualquier frecuencia de salida deseada. Con el desarrollo de estos accionadores de estado sólido tan modernos es perfectamente posible controlar continuamente la frecuencia eléctrica aplicada al motor desde una fracción de un hertz hasta por arriba de la frecuencia nominal. Si esta unidad de control de frecuencia variable se incluye en el circuito de control del motor para lograr el control de la velocidad, entonces el arranque de un motor síncrono es muy fácil: simplemente se ajusta la frecuencia a un valor muy bajo para el arranque y luego se eleva hasta la frecuencia de operación deseada para la operación normal.

Cuando se opera un motor síncrono a una velocidad menor a la velocidad nominal, su voltaje interno generador $E_A = K\phi\omega$ será menor que lo normal. Si se reduce la magnitud de E_A entonces el voltaje en los terminales aplicado al motor se debe reducir también para mantener la corriente en el estator en niveles seguros. El voltaje en cualquier accionador de frecuencia variable o circuito de ataque de frecuencia variable debe variar casi linealmente con la frecuencia aplicada.

Para saber más sobre las unidades de control de estado sólido para motores, consulte el libro que aparece en la bibliografía de este capítulo con el número 9.

Arranque del motor con un motor primario externo

El segundo método de arranque de un motor síncrono es adjuntarle un motor de arranque externo y llevar la máquina síncrona hasta su velocidad plena con un motor externo. Entonces se puede conectar la máquina síncrona en paralelo con el sistema de potencia como generador y se puede desconectar el motor primario del eje de la máquina. Una vez que se apaga el motor de arranque, el eje de la máquina pierde velocidad, el campo magnético del rotor $\mathbf{B}_R$ se retrasa con respecto a $\mathbf{B}_{\text{net}}$ y la máquina síncrona comienza a comportarse como motor. Una vez que se completa la conexión en paralelo, el motor síncrono se puede cargar de manera normal.

Todo este procedimiento no es tan absurdo como parece, debido a que muchos motores síncronos forman parte de un conjunto de motor-generador y se puede arrancar la máquina síncrona en el conjunto motor-generador con otra máquina que cumpla la función de motor de arranque. Además, el motor de arranque sólo necesita superar la inercia de la máquina síncrona en vacío; no se añade ninguna carga hasta que el motor está conectado en paralelo con el sistema de potencia. Ya que se debe superar sólo la inercia del motor, el de arranque puede tener valores nominales *mucho* más pequeños que el motor síncrono que arranca.

Debido a que la mayoría de los motores síncronos tienen sistemas de excitación sin escobillas montadas en sus ejes, a menudo se pueden utilizar estos excitadores como motores de arranque.

Para muchos de los motores síncronos de tamaño mediano a grande, la utilización de un motor de arranque externo o el arranque por medio del excitador pueden ser la única solución posible, ya que los sistemas de potencia a los que están unidos probablemente no soportan las corrientes de arranque que se requieren para utilizar el método del devanado de amortiguamiento que se describe a continuación.

Arranque del motor con devanados de amortiguamiento

Definitivamente la técnica de arranque de un motor síncrono más popular es la utilización de devanados de *amortiguamiento*. Los devanados de amortiguamiento son unas barras especiales dispuestas en ranuras labradas en la cara del rotor de un motor síncrono y en cortocircuito en cada extremo con un gran *anillo en cortocircuito*. En la figura 5-17 se puede ver la cara de un polo

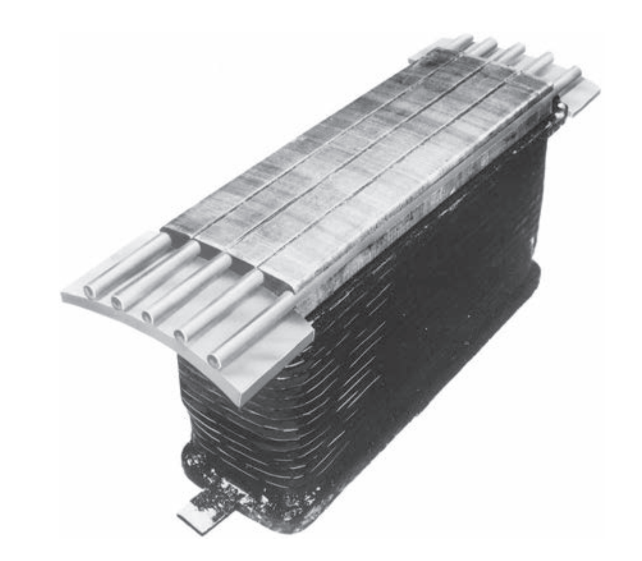


FIGURA 5-17 Polo del campo de un rotor de una máquina síncrona que muestra los devanados de amortiguamiento en la cara del polo. (*Cortesía de General Electric Company*.)

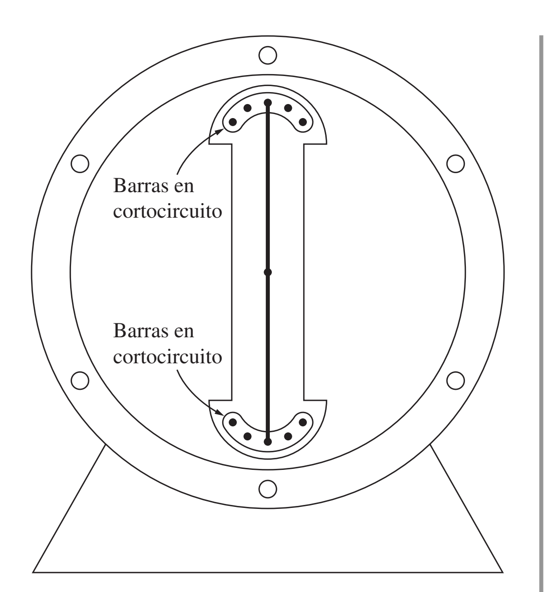


FIGURA 5-18 Diagrama simplificado de una máquina con dos polos salientes que muestra los devanados de amortiguamiento.

con un conjunto de devanados de amortiguamiento y en las figuras 4-2 y 4-4 se aprecian los devanados de amortiguamiento.

Para entender lo que un conjunto de devanados de amortiguamiento causan en un motor síncrono, examínese el rotor estilizado con dos polos salientes de la figura 5-18. Este rotor muestra un devanado de amortiguamiento con las barras en corto en los extremos de las dos caras de los polos conectadas con alambres. (Ésta no es la forma normal en que se construyen las máquinas, pero sirve perfectamente para ilustrar el tema de los devanados.)

Para empezar, suponga que *el devanado de campo principal del rotor se desconecta* y que se aplica un conjunto de voltajes trifásicos al estator de esta máquina. Cuando se aplica la potencia por primera vez en el tiempo $t =$ 0 s, suponga que el campo magnético $\mathbf{B}_S$ es vertical, como se muestra en la figura 5-19*a*). Conforme el campo magnético $\mathbf{B}_S$ gira en dirección contraria a la de las manecillas del reloj, induce un voltaje en las barras del devanado de amortiguamiento que está dado por la ecuación (1-45):

$$e_{\text{ind}} = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{l} \tag{1-45}$$

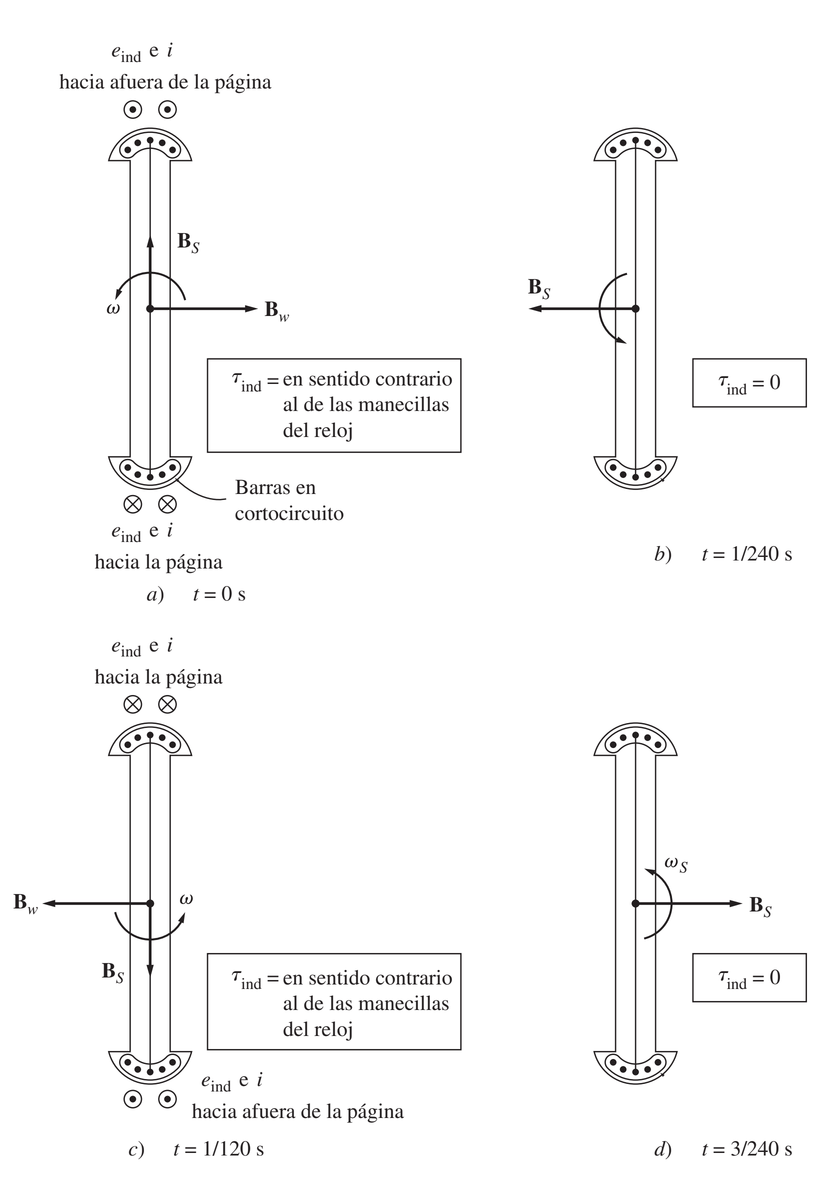


FIGURA 5-19 Desarrollo de un par unidireccional con devanados de amortiguamiento en un motor síncrono.

donde

$\mathbf{v}$ = velocidad de la barra *en relación con el campo magnético*
$\mathbf{B}$ = vector de densidad de flujo magnético
$\mathbf{l}$ = longitud del conductor en el campo magnético

Las barras que están encima del rotor se mueven hacia la derecha *en relación con el campo magnético*, por lo que la dirección resultante del voltaje inducido es hacia afuera de la página. De manera similar, el voltaje inducido es hacia adentro de la página en las barras de abajo. Estos voltajes producen un flujo de corriente hacia afuera de las barras de arriba y hacia las barras de abajo, lo que da como resultado un campo magnético en el devanado $\mathbf{B}_W$ que apunta hacia la derecha. De la ecuación del par inducido

$$\tau_{\text{ind}} = k\mathbf{B}_W \times \mathbf{B}_S$$

el par resultante en las barras (y en el rotor) es en *sentido opuesto al de las manecillas del reloj*.

La figura 5-19*b*) muestra la situación en $t = 1/240$ s. En este momento, el campo magnético del estator ya giró 90°, mientras que el rotor apenas se ha movido (simplemente no puede acelerar en un tiempo tan corto). En este momento, el voltaje inducido en los devanados de amortiguamiento es cero, debido a que $\mathbf{v}$ es paralelo a $\mathbf{B}$. Sin un voltaje inducido, no hay corriente en los devanados y el par inducido es cero.

La figura 5-l9*c*) muestra la situación en $t = 1/120$ s. Ahora el campo magnético del estator ha girado 90° y el rotor aún no se ha movido. El voltaje inducido [que se obtuvo con la ecuación (1-45)] en los devanados de amortiguamiento es hacia afuera de la página en las barras inferiores y hacia la página en las barras superiores. El flujo de corriente resultante va hacia afuera de la página en las barras inferiores y hacia la página en las barras superiores, lo que causa que el campo magnético $\mathbf{B}_W$ apunte hacia la izquierda. El par inducido resultante está dado por

$$\tau_{\text{ind}} = k\mathbf{B}_W \times \mathbf{B}_S$$

y va en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

Por último, la figura 5-19*d*) muestra la situación en $t = 3/240$ s. En este momento, como en $t = 1/240$ s, el par inducido es cero.

Nótese que a veces el par va en sentido opuesto al de las manecillas del reloj y a veces es esencialmente cero, pero *siempre es unidireccional*. Debido a que hay un par neto en una sola dirección, el rotor del motor se acelera. (Esto es completamente diferente a arrancar un motor síncrono con su corriente de campo normal, ya que en ese caso el par va primero en el sentido de las manecillas del reloj y luego en sentido opuesto, con un promedio de cero. En este caso, el par *siempre* va en la misma dirección, por lo que el promedio del par es diferente de cero.)

Aun cuando se acelera el rotor del motor, nunca alcanza por completo velocidad síncrona. Esto es fácil de entender. Supóngase que un rotor gira a velocidad síncrona. Entonces, la velocidad del campo magnético del estator $\mathbf{B}_S$ es la misma que la velocidad del rotor y no hay *movimiento relativo* entre $\mathbf{B}_S$ y el rotor. Si no hay movimiento relativo, el voltaje inducido en los devanados será cero, el flujo de corriente resultante será cero y el campo magnético del devanado será cero. Por lo tanto, no habrá par en el rotor que lo mantenga en movimiento. Incluso si un rotor no puede acelerar hasta alcanzar velocidad síncrona, se puede acercar a ella. Se acerca lo suficiente a n_{sinc} como para que se genere corriente de campo regular y el rotor gire al ritmo de los campos magnéticos del estator.

En una máquina real los devanados de campo no están en circuito abierto durante el procedimiento de arranque. Si los devanados de campo estuvieran en circuito abierto, entonces se producirían voltajes demasiado altos en ellos durante el arranque. Si los devanados de campo están en cortocircuito durante el arranque, no se producen voltajes peligrosos y la corriente de campo inducida contribuye con un par de arranque extra para el motor.

En resumen, si una máquina tiene devanados de amortiguamiento, se puede encender siguiendo el procedimiento que se describe a continuación:

1. Desconectar los devanados de campo de su fuente de potencia de cd y que estén en cortocircuito.
2. Aplicar un voltaje trifásico al estator del motor y dejar que el rotor acelere hasta llegar casi a velocidad síncrona. El motor no debe tener ninguna carga en su eje para que su velocidad se pueda aproximar tanto como sea posible a n_{sinc}.
3. Conectar el circuito de campo de cd a su fuente de potencia. Una vez que esto se lleva a cabo, el motor se fija a velocidad síncrona y se le pueden añadir cargas a su eje.

Efecto de los devanados de amortiguación en la estabilidad del motor

Si se añaden devanados de amortiguamiento a una máquina síncrona para el arranque se obtiene una ventaja extra: un incremento de la estabilidad de la máquina. El campo magnético del estator gira a una velocidad constante n_{sinc}, que varía sólo cuando varía la frecuencia del sistema. Si el rotor gira a n_{sinc}, entonces los devanados de amortiguamiento no tienen ningún voltaje inducido. Si el rotor gira *más lento* que n_{sinc}, entonces habrá un movimiento relativo entre el rotor y el campo magnético del estator y habrá un voltaje inducido en los devanados. Este voltaje produce un flujo de corriente y el flujo de corriente produce un campo magnético. La interacción entre los dos campos magnéticos produce un par que tiende a acelerar la máquina una vez más. Por otro lado, si el rotor gira *más rápido* que el campo magnético del estator, se producirá un par que intentará disminuir la velocidad del rotor. Por ello, *el par producido por los devanados de amortiguamiento acelera las máquinas lentas y disminuye la velocidad de las máquinas rápidas*.

Por lo tanto, estos devanados tienden a atenuar la carga u otros transitorios en la máquina. Por esta razón, a los devanados de amortiguamiento también se les llama *devanados de atenuación*. Los devanados de amortiguamiento también se utilizan en los generadores síncronos, donde cumplen una función similar de estabilización cuando un generador opera en paralelo con otros generadores en un bus infinito. Si se presenta una variación en el par del eje en el generador, su rotor se acelerará o perderá velocidad momentáneamente, cambios que serán contrarrestados por los devanados de amortiguamiento. Éstos mejoran la estabilidad general de los sistemas de potencia por medio de la reducción de la magnitud de los transitorios de potencia y de par.

Los devanados de amortiguamiento son los responsables de la mayoría de la corriente subtransitoria en una máquina síncrona en falla. Otra forma de transitorio es un cortocircuito en los terminales de un generador y los devanados de amortiguamiento responden con rapidez a este fenómeno.

5.4 GENERADORES SÍNCRONOS Y MOTORES SÍNCRONOS

Un generador síncrono es una máquina síncrona que convierte potencia mecánica en potencia eléctrica, mientras que un motor síncrono es una máquina síncrona que convierte potencia eléctrica en potencia mecánica. De hecho, son iguales físicamente.

Una máquina síncrona puede suministrar potencia real a un sistema de potencia o consumirla de éste y puede suministrar potencia reactiva a un sistema de potencia o consumirla de éste. Las cuatro combinaciones de flujos de potencias real y reactiva son posibles y la figura 5-20 muestra los diagramas fasoriales en estas condiciones.

Nótese de la figura que

1. La característica distintiva de un generador síncrono (que suministra P) es que $\mathbf{E}_A$ *está delante de* $\mathbf{V}_\phi$, mientras que en un motor $\mathbf{E}_A$ *está detrás de* $\mathbf{V}_\phi$.
2. La característica distintiva de una máquina que suministra potencia reactiva Q es que $\mathbf{E}_A \cos \delta > \mathbf{V}_\phi$ sin importar si la máquina actúa como generador o como motor. Si una máquina consume potencia reactiva Q, $\mathbf{E}_A \cos \delta < \mathbf{V}_\phi$.

	Suministra potencia reactiva Q $\quad E_A \cos\delta > V_\phi$	Consume potencia reactiva Q $\quad E_A \cos\delta < V_\phi$
Suministra potencia P Generador delante de $\mathbf{E}_A$ $\mathbf{V}_\phi$	δ $\mathbf{E}_A$ $\mathbf{V}_\phi$ $\mathbf{I}_A$	$\mathbf{I}_A$ $\mathbf{E}_A$ $\mathbf{V}_\phi$ δ
Consume potencia P Motor detrás de $\mathbf{E}_A$ $\mathbf{V}_\phi$	$\mathbf{I}_A$ $\mathbf{V}_\phi$ δ $\mathbf{E}_A$	δ $\mathbf{V}_\phi$ $\mathbf{I}_A$ $\mathbf{E}_A$

FIGURA 5-20 Diagramas fasoriales que muestran la generación y consumo de potencia real *P* y potencia reactiva *Q* en los motores y generadores síncronos.

5.5 VALORES NOMINALES EN LOS MOTORES SÍNCRONOS

Puesto que los motores síncronos son físicamente iguales a los generadores síncronos, los valores nominales básicos de la máquina son los mismos. La principal diferencia es que un valor alto de $\mathbf{E}_A$ produce un factor de potencia *en adelanto* en lugar de uno en retraso y, por lo tanto, el efecto del límite máximo de corriente de campo se expresa como un valor nominal con un factor de potencia *en adelanto*. Además, puesto que la salida de un motor síncrono es potencia mecánica, por lo general los valores nominales de un motor síncrono se expresan en caballos de potencia de salida (en Estados Unidos) o en kilowatts de salida (en cualquier otro lugar del mundo), en lugar de ser especificados por un voltampere nominal y factor de potencia de la manera en que lo son los generadores.

La figura 5-21 muestra la placa de características de un motor síncrono grande. Además de la información que se observa en la figura, un motor síncrono pequeño tendría también el factor de servicio en su placa de características.

En general, los motores síncronos son más adaptables a aplicaciones de bajas velocidades y altas potencias que los motores de inducción (véase el capítulo 6). Por lo tanto, se utilizan comúnmente para cargas de baja velocidad y alta potencia.

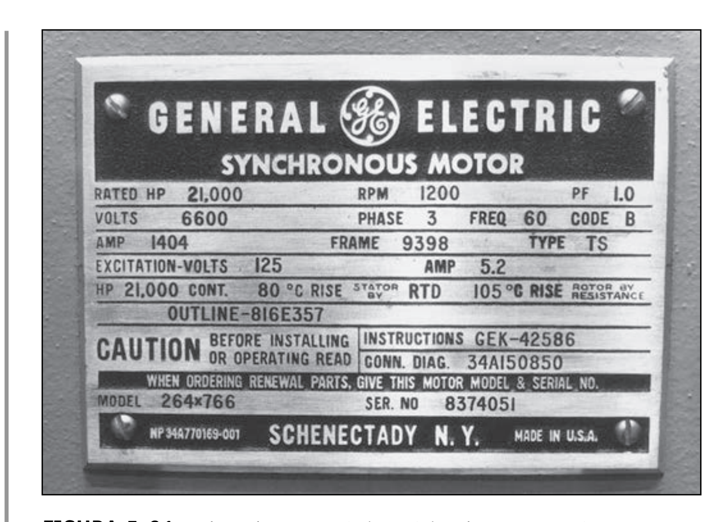


FIGURA 5-21 Placa de características típica de un motor síncrono grande. (*Cortesía de General Electric Company*.)

5.6 RESUMEN

Un motor síncrono es físicamente igual a un generador síncrono, excepto en que la dirección del flujo de potencia real

es inversa. Puesto que los motores síncronos se conectan por lo común a sistemas de potencia que contienen generadores mucho más grandes que los motores, la frecuencia y el voltaje en los terminales de un motor síncrono están fijos (esto es, el sistema de potencia es muy parecido a un bus infinito para el motor).

El circuito equivalente de un motor síncrono es el mismo que el circuito equivalente de un generador síncrono, salvo que la dirección supuesta de la corriente del inducido es inversa.

La velocidad de un motor síncrono es constante desde carga vacía hasta la carga máxima posible sobre el motor. La velocidad de rotación es

$$n_m = \frac{120 f_e}{P} \qquad \textbf{(5-3)}$$

desde carga vacía hasta la carga máxima posible. La potencia máxima posible que un motor síncrono puede producir es

$$P_{\text{máx}} = \frac{3V_\phi E_A}{X_S} \qquad \textbf{(4-21)}$$

Por su parte, el par máximo posible está dado por

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{3V_\phi E_A}{\omega X_S} \qquad \textbf{(4-22)}$$

Si se excede este valor, el rotor no podrá permanecer enclavado con los campos magnéticos, y el motor *deslizará polos*.

Si ignoramos el efecto de las pérdidas eléctricas y mecánicas, entonces la potencia convertida de eléctrica a mecánica en el motor está dada por

$$P_{\text{conv}} = \frac{3V_\phi E_A}{X_S} \operatorname{sen} \delta \qquad \textbf{(4-20)}$$

Si el voltaje de entrada $\mathbf{V}_\phi$ es constante, entonces la potencia convertida (y, por consiguiente, la potencia suministrada) es directamente proporcional a la cantidad E_A sen δ. Esta relación puede ser útil cuando se grafican diagramas fasoriales de motores síncronos. Por ejemplo, si se aumenta o se disminuye la corriente de campo, el voltaje generado interno del motor aumentará o disminuirá; pero la cantidad E_A sen δ permanecerá constante. Esta restricción facilita el graficado de cambios en el diagrama fasorial del motor (vea la figura 5-9), y el cálculo de curvas V de motores síncronos.

Si la corriente de campo de un motor síncrono se hace variar mientras su carga en el eje permanece constante, entonces la potencia reactiva que el motor suministra o consume variará. Si $E_A \cos \delta > V_\phi$, el motor suministrará potencia reactiva, mientras que si $E_A \cos \delta < V_\phi$, el motor consumirá potencia reactiva. Un motor síncrono normalmente se opera con $E_A \cos \delta > V_\phi$, de modo que el motor síncrono suministra potencia reactiva al sistema de potencia, y reduce el factor general de potencia de las cargas.

Un motor síncrono no tiene un par de arranque neto y, por lo tanto, no puede arrancar por sí mismo. Hay tres maneras para hacer arrancar un motor síncrono:

1. Reducir la frecuencia del estator a un nivel de arranque seguro.
2. Usar un motor primario externo.
3. Disponer devanados de amortiguamiento o atenuación en el motor para acelerado hasta llegar cerca de la velocidad síncrona antes de aplicar una corriente directa a sus devanados de campo.

Si un motor tiene devanados de atenuación, también se incrementará la estabilidad del motor durante los transitorios de carga.

PREGUNTAS

5-1. ¿Cuál es la diferencia entre un motor síncrono y un generador síncrono?

5-2. ¿Qué es la regulación de velocidad de un motor síncrono?

5-3. ¿Cuándo se utilizaría un motor síncrono a pesar de que no se necesitara su característica de velocidad constante?

5-4. ¿Por qué un motor síncrono no puede arrancar por sí mismo?

5-5. ¿Qué técnicas se pueden utilizar para hacer arrancar un motor síncrono?

5-6. ¿Qué son los devanados de amortiguamiento? ¿Por qué producen un par unidireccional en el arranque, mientras que el par que produce el devanado de campo cambia de dirección?

5-7. ¿Qué es un capacitor síncrono? ¿Para qué se utiliza?

5-8. Explique, mediante diagramas fasoriales, qué le sucede a un motor síncrono conforme varía su corriente de campo. Del diagrama fasorial obtenga la curva en V del motor síncrono.

5-9. ¿Cuándo corre más peligro de sobrecalentarse el circuito de campo de un motor síncrono: cuando opera con un factor de potencia en retraso o en adelanto? Explique por medio de diagramas fasoriales.

5-10. Un motor síncrono opera con una carga real fija y se incrementa su corriente de campo. Si cae la corriente en el inducido, ¿el motor operaba inicialmente con un factor de potencia en adelanto o en retraso?

5-11. ¿Por qué el voltaje aplicado a un motor síncrono se debe degradar para operar a frecuencias más bajas que la frecuencia nominal?

PROBLEMAS

5-1. Un motor síncrono de 480 V, 60 Hz, 400 hp, con un factor de potencia de 0.8 en adelanto, con ocho polos, conectado en Δ, tiene una reactancia síncrona de 0.6 Ω y una resistencia despreciable en el inducido. Pase por alto las pérdidas por fricción, por rozamiento con el aire y en el núcleo. Suponga que $|E_A|$ es directamente proporcional a la corriente de campo I_F (en otras palabras, suponga que el motor funciona en la parte lineal de la curva de magnetización) y que $|E_A| = 480$ V cuando $I_F = 4$ A.

a) ¿Cuál es la velocidad de este motor?

b) Si este motor suministra inicialmente 400 hp con un factor de potencia de 0.8 en retraso, ¿cuáles son las magnitudes y los ángulos de $\mathbf{E}_A$ e $\mathbf{I}_A$?

c) ¿Cuál es el valor del par que genera este motor? ¿Cuál es el ángulo del par δ? ¿Qué tan cerca está este valor del máximo par inducido posible del motor con este ajuste de corriente de campo?

d) Si se incrementa $|\mathbf{E}_A|$ 30%, ¿cuál es la nueva magnitud de la corriente en el inducido? ¿Cuál es el nuevo factor de potencia del motor?

e) Calcule y dibuje la curva en V del motor con estas condiciones de carga.

5-2. Suponga que el motor del problema 5-1 opera en condiciones nominales.

a) ¿Cuáles son las magnitudes y los ángulos de $\mathbf{E}_A$ e $\mathbf{I}_A$, y de I_F?

b) Suponga que se quita la carga del motor. ¿Cuáles son ahora las magnitudes y los ángulos de $\mathbf{E}_A$ y de $\mathbf{I}_A$?

5-3. Un motor síncrono de 230 V, 50 Hz, con dos polos, toma 40 A de una línea con un factor de potencia unitario a plena carga. Suponga que el motor no tiene pérdidas y responda las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es el par de salida de este motor? Exprese la respuesta tanto en newton-metros como en libras-pies.

b) ¿Qué se debe hacer para cambiar el factor de potencia a 0.85 en adelanto? Explique su respuesta por medio de diagramas fasoriales.

c) ¿Cuál será la magnitud de la corriente de línea si se ajusta el factor de potencia a 0.85 en adelanto?

5-4. Un motor síncrono de 2 300 V, 1 000 hp, con un factor de potencia de 0.8 en adelanto, 60 Hz, con dos polos, conectado en Y, tiene una reactancia síncrona de 5.0 Ω y una resistencia en el inducido de 0.3 Ω. A 60 Hz, las pérdidas por fricción y por rozamiento con el aire son de 30 kW y las pérdidas en el núcleo son de 20 kW. El circuito de campo tiene un voltaje de cd de 200 V y la I_F máxima es de 10 A. La característica de circuito abierto de este motor se muestra en la figura P5-1. Conteste las siguientes preguntas sobre el motor y suponga que lo alimenta un bus infinito.

a) ¿Cuánta corriente de campo se requiere para que esta máquina opere con un factor de potencia unitario cuando suministra su plena carga?

b) ¿Cuál es la eficiencia del motor a plena carga con un factor de potencia unitario?

c) Si se incrementa 5% la corriente de campo, ¿cuál será el nuevo valor de la corriente en el inducido? ¿Cuál será el nuevo factor de potencia? ¿Cuánta potencia reactiva consume o suministra el motor?

d) ¿Cuál es el par máximo que esta máquina es capaz de suministrar en teoría con un factor de potencia unitario? ¿Y con un factor de potencia de 0.8 en adelanto?

5-5. Dibuje las curvas en V (I_A contra I_F) del motor síncrono del problema 5-4 en condiciones de vacío, de media carga y de plena carga. (Nótese que la versión electrónica de las características de circuito abierto de la figura P5-1 está disponible en el sitio web del libro. Puede ayudar a simplificar el cálculo que requiere este problema.)

5-6. Si un motor síncrono de 60 Hz se opera a 50 Hz, ¿su reactancia síncrona será la misma que a 60 Hz o cambiará? (*Sugerencia:* Piense en la deducción de X_S.)

5-7. Un motor síncrono de 208 V, conectado en Y, toma 50 A con un factor de potencia unitario de un sistema de potencia de 208 V. La corriente de campo que fluye en estas condiciones es de 2.7 A. Su reactancia síncrona es de 1.6 Ω. Suponga que tiene una característica de circuito abierto lineal.

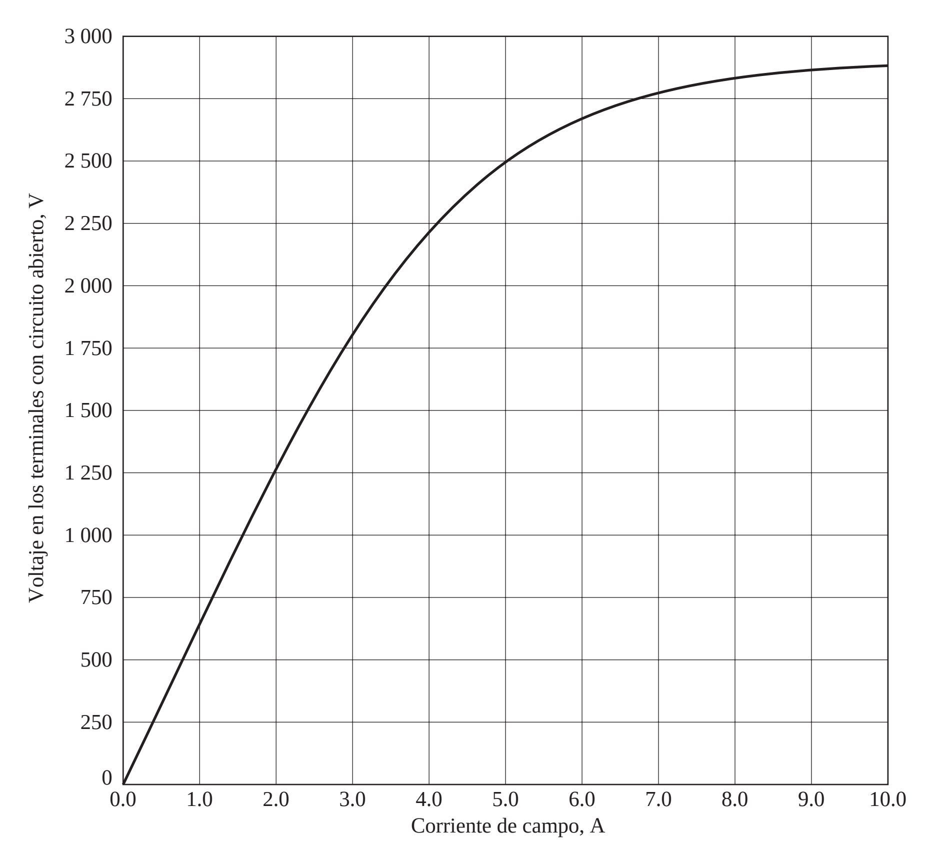


FIGURA P5-1 Característica de circuito abierto del motor de los problemas 5-4 y 5-5.

a) Encuentre $\mathbf{V}_\phi$ y $\mathbf{E}_A$ bajo estas condiciones.
b) Encuentre el ángulo del par δ.
c) ¿Cuál es el límite de potencia de estabilidad estática bajo estas condiciones?
d) ¿Cuánta corriente de campo se requiere para que el motor opere con un factor de potencia de 0.8 en adelanto?
e) ¿Cuál es el nuevo ángulo del par en el inciso *d*)?

5-8. Un motor síncrono trifásico de 4.12 kV, 60 Hz, 3 000 hp, 0.8 FP en adelanto, conectado en Δ, tiene una reactancia síncrona de 1.1 por unidad y una resistencia del inducido de 0.1 por unidad. Si este motor trabaja al voltaje nominal con una corriente de línea de 300 A a 0.85 FP en adelanto, ¿cuál es el voltaje generado interno por fase dentro del motor? ¿Cuál es el ángulo de par δ?

5-9. La figura P5-2 muestra el diagrama fasorial de un motor síncrono que opera como motor con un factor de potencia en adelanto sin R_A. El ángulo del par de este motor está dado por

$$\tan \delta = \frac{X_S I_A \cos \theta}{V_\phi + X_S I_A \operatorname{sen} \theta}$$

$$\delta = \tan^{-1}\left(\frac{X_S I_A \cos \theta}{V_\phi + X_S I_A \operatorname{sen} \theta}\right)$$

Desarrolle la ecuación del ángulo del par del motor síncrono *si se incluye la resistencia en el inducido.*

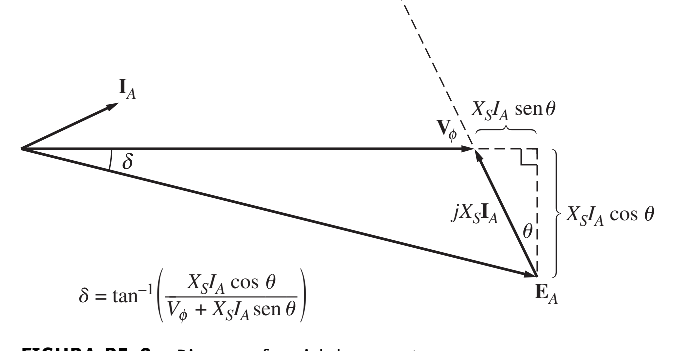


FIGURA P5-2 Diagrama fasorial de un motor con un factor de potencia en adelanto.

5-10. Una máquina síncrona tiene una reactancia síncrona de 1.0 Ω por fase y una resistencia en el inducido de 0.1 Ω por fase. Si $\mathbf{E}_A = 460 \angle -10°$ V y $\mathbf{V}_\phi = 480 \angle 0°$ V, ¿esta máquina es un motor o un generador? ¿Cuánta potencia *P* consume o suministra esta máquina del o al sistema eléctrico? ¿Cuánta potencia reactiva *Q* consume o suministra esta máquina del o al sistema eléctrico?

5-11. Un motor síncrono de 500 kVA, 600 V, 0.8 FP en adelanto, conectado en Y, tiene una reactancia síncrona de 1.0 por unidad y una resistencia del inducido de 0.1 por unidad. En el momento actual, $E_A = 1.00 \angle 12°$ pu y $V_\phi = 1 \angle 0°$ pu.

a) ¿Esta máquina actúa como motor o como generador?
b) ¿Cuánta potencia *P* consume del, o suministra al sistema eléctrico?

c) ¿Cuánta potencia reactiva Q está consumiendo o suministrando esta máquina al sistema eléctrico?
d) ¿Esta máquina opera dentro de sus límites nominales?

5-12. La figura P5-3 muestra una pequeña planta industrial alimentada por un suministro externo de 480 V, trifásica. La planta incluye tres cargas principales, como se muestra en la figura. Responda las siguientes preguntas acerca de la planta. El motor síncrono tiene valores nominales de 100 hp, 460 V y 0.8 FP en adelanto. La reactancia síncrona es de 1.1 pu, y la resistencia del inducido es de 0.01 pu. La OCC de este motor se muestra en la figura P5-4.

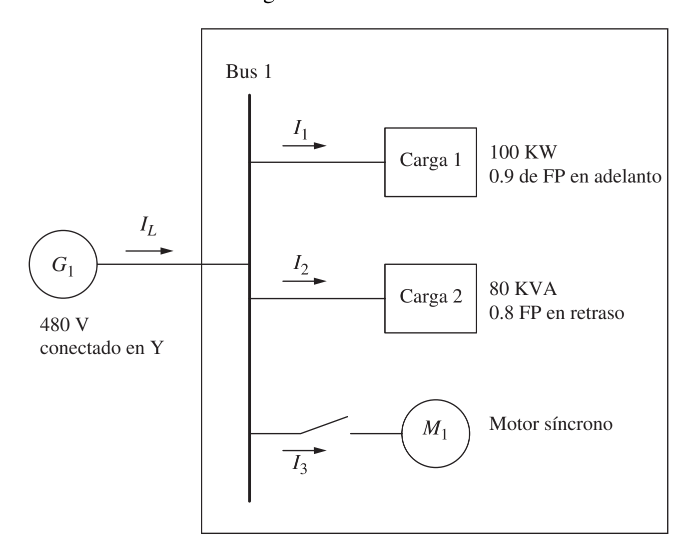


FIGURA P5-3 Una pequeña planta industrial.

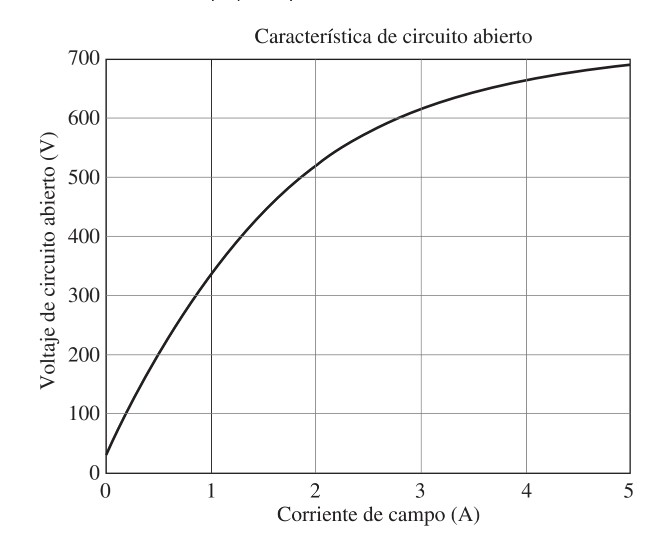


FIGURA P5-4 Circuito abierto característico de motor síncrono.

a) Si el interruptor del motor síncrono está abierto, ¿cuánta potencia real, reactiva y aparente se suministra a la planta? ¿Cuál es la corriente I_L en la línea de transmisión?
El interruptor está cerrado, y el motor síncrono suministra la potencia nominal con la corriente de campo ajustada a 1.5 A.
b) ¿Cuál es la potencia real y reactiva que se suministra al motor?
c) ¿Cuál es el ángulo del par del motor?
d) ¿Cuál es el factor de potencia del motor?
e) ¿Cuánta potencia real, reactiva y aparente se suministra ahora a la planta? ¿Cuál es la corriente I_L en la línea de transmisión?
Ahora suponga que la corriente de campo se aumenta a 3.0 A.
f) ¿Cuál es la potencia real y reactiva que se suministra al motor?
g) ¿Cuál es el ángulo del par del motor?
h) ¿Cuál es el factor de potencia del motor?
i) ¿Cuánta potencia real, reactiva y aparente se suministra ahora a la planta? ¿Cuál es la corriente I_L en la línea de transmisión?
j) ¿Cómo se compara la corriente de línea cuando la corriente de campo es de 1.5 A con la corriente de línea cuando la corriente de campo es de 3.0 A?

5-13. Un motor síncrono de 480 V, 100 kW, con un factor de potencia de 0.8 en adelanto, 50 Hz, con cuatro polos, conectado en Y, tiene una reactancia síncrona de 1.8 Ω y una resistencia despreciable en el inducido. También se pueden pasar por alto las pérdidas por rotación. Este motor se operará en un rango continuo de velocidades que van desde 300 hasta 1 500 r/min, y los cambios de velocidad se lograrán por medio del control de la frecuencia del sistema con un controlador en estado sólido.

a) ¿Dentro de qué intervalo se debe variar la frecuencia de entrada para tener esta gama de control de velocidad?
b) ¿Qué tan grande es E_A en las condiciones nominales del motor?
c) ¿Cuál es la potencia máxima que puede producir el motor a velocidad nominal con el E_A que se calculó en el inciso *b*)?
d) ¿Cuál es el valor mayor de E_A a 300 r/min?
e) Suponiendo que se degrada el voltaje aplicado $\mathbf{V}_\phi$ en la misma cantidad que E_A, ¿cuál es la potencia máxima que puede suministrar el motor a 300 r/min?
f) ¿Cómo se relaciona la capacidad de potencia de un motor síncrono con su velocidad?

5-14. Un motor síncrono de 2 300 V, 400 hp, 60 Hz, con ocho polos, conectado en Y, tiene un factor de potencia nominal de 0.85 en adelanto. A plena carga, su eficiencia es de 90%. La resistencia en el inducido es de 0.8 Ω y la reactancia síncrona es de 11 Ω. Encuentre las siguientes cantidades cuando la máquina opera a plena carga:

a) Par de salida
b) Potencia de entrada
c) n_m
d) $\mathbf{E}_A$
e) $|\mathbf{I}_A|$
f) P_{conv}
g) $P_{\text{mec}} + P_{\text{núc}} + P_{\text{disp}}$

5-15. El motor síncrono conectado en Y, cuya placa de características se muestra en la figura 5-21, tiene una reactancia síncrona por unidad de 0.70 y una resistencia por unidad de 0.02.

a) ¿Cuál es su potencia nominal de entrada?
b) ¿Cuál es la magnitud de $\mathbf{E}_A$ en condiciones nominales?
c) Si la potencia de entrada de este motor es de 12 MW, ¿cuál es la potencia reactiva máxima que puede suministrar simultáneamente? Lo que limita la potencia reactiva de salida ¿es la corriente en el inducido o la corriente de campo?

d) ¿Cuánta potencia consume el circuito de campo en condiciones nominales?
e) ¿Cuál es la eficiencia de este motor a plena carga?
f) ¿Cuál es el par de salida del motor en condiciones nominales? Exprese la respuesta tanto en newtons-metros como en libras-pies.

5-16. Un generador síncrono de 480 V, 500 kVA, con un factor de potencia de 0.8 en retraso, conectado en Y, tiene una reactancia síncrona de 0.4 Ω y una resistencia despreciable en el inducido. Este generador suministra potencia a un motor síncrono de 480 V, 80 kW, con un factor de potencia de 0.8 en adelanto, conectado en Y, con una reactancia síncrona de 2.0 Ω y una resistencia despreciable en el inducido. Se ajusta el generador síncrono para tener un voltaje en los terminales de 480 V cuando el motor toma la potencia nominal con un factor de potencia unitario.

a) Calcule las magnitudes y ángulos de $\mathbf{E}_A$ en ambas máquinas.
b) Si el flujo del motor se incrementa en 10%, ¿qué sucede con el voltaje en los terminales del sistema de potencia? ¿Cuál es su nuevo valor?
c) ¿Cuál es el factor de potencia del motor después del incremento del flujo del motor?

5-17. Un motor síncrono de 440 V, trifásico, 60 Hz, conectado en Y, tiene una reactancia síncrona de 1.5 Ω por fase. Se ajusta la corriente de campo para que el ángulo del par δ sea de 25° cuando la potencia que suministra el generador es de 90 kW.

a) ¿Cuál es la magnitud del voltaje interno generado $\mathbf{E}_A$ de esta máquina?
b) ¿Cuál es la magnitud y ángulo de la corriente en el inducido en la máquina? ¿Cuál es el factor de potencia del motor?
c) Si la corriente de campo permanece constante, ¿cuál es la potencia máxima absoluta que el motor puede suministrar?

5-18. Un motor síncrono de 460 V, 200 kVA, con un factor de potencia de 0.85 en adelanto, 400 Hz, con cuatro polos, conectado en Y, tiene una resistencia despreciable en el inducido y una reactancia síncrona de 0.90 por unidad. Ignore todas las pérdidas.

a) ¿Cuál es la velocidad de rotación del motor?
b) ¿Cuál es el par de salida del motor en condiciones nominales?
c) ¿Cuál es el voltaje interno que genera el motor en condiciones nominales?
d) Si la corriente de campo tiene el mismo valor que en el inciso *c*), ¿cuál es la potencia de salida máxima posible de la máquina?

5-19. Un motor síncrono de 100 hp, 440 V, con un factor de potencia de 0.8 en adelanto, conectado en Δ, tiene una resistencia en el inducido de 0.3 Ω y una reactancia síncrona de 4.0 Ω. Su eficiencia a plena carga es de 96%.

a) ¿Cuál es la potencia de entrada al motor en condiciones nominales?
b) ¿Cuál es la corriente de línea del motor en condiciones nominales? ¿Cuál es la corriente de fase del motor en condiciones nominales?
c) ¿Cuál es la potencia reactiva que consume o suministra el motor en condiciones nominales?
d) ¿Cuál es el voltaje interno generado $\mathbf{E}_A$ del motor en condiciones nominales?
e) ¿Cuáles son las pérdidas en el cobre del estator del motor en condiciones nominales?
f) ¿Cuál es el valor de P_{conv}, en condiciones nominales?
g) Si disminuye E_A en 10%, ¿cuánta potencia reactiva consumirá o suministrará el motor?

5-20. Responda las siguientes preguntas sobre la máquina del problema 5-19.

a) Si $\mathbf{E}_A = 430 \angle 15°$ V y $\mathbf{V}_\phi = 440 \angle 0°$ V, ¿la máquina consume potencia real o suministra potencia real del o al sistema de potencia? ¿Consume potencia reactiva o suministra potencia reactiva del o al sistema de potencia?
b) Calcule la potencia real P y la potencia reactiva Q que suministra o consume la máquina en las condiciones del inciso *a*). ¿La máquina opera dentro de sus valores nominales en estas circunstancias?
c) Si $\mathbf{E}_A = 470 \angle -20°$ V y $\mathbf{V}_\phi = 440 \angle 0°$ V, ¿la máquina consume potencia real o suministra potencia real del o al sistema de potencia? ¿Consume potencia reactiva o suministra potencia reactiva del o al sistema de potencia?
d) Calcule la potencia real P y la potencia reactiva Q que suministra o consume la máquina en las condiciones del inciso *c*). ¿La máquina opera dentro de sus valores nominales en estas circunstancias?

BIBLIOGRAFÍA

1. Chaston, A.N., *Electric Machinery*, Reston Publishing, Reston, Va., 1986.
2. Del Toro, V., *Electric Machines and Power Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, Nueva Jersey, 1985.
3. Fitzgerald. A.E. y C. Kingsley, Jr., *Electric Machinery,* McGraw-Hill, Nueva York, 1952.
4. Fitzgerald. A.E., C. Kingsley, Jr. y S.D. Umans, *Electric Machinery*, McGraw-Hill, 6a. ed., Nueva York, 2003.
5. Kosow, Irving L., *Control of Electric Motors*, Englewood Cliffs, Prentice-Hall, Nueva Jersey, 1972.
6. Liwschitz-Garik, Michael y Clyde Whipple, *Alternating-Current Machinery*, Van Nostrand, Princeton, Nueva Jersey, 1961.
7. Nasar, Syed A. (ed.), *Handbook of Electric Machines*, McGraw-Hill, Nueva York, 1987.
8. Slemon, G.R. y A. Straughen, *Electric Machines*, Addison- Wesley, Reading, Mass., 1980.
9. Vithayathil, Joseph, *Power Electronics: Principles and Applications*, McGraw-Hill, Nueva York, 1995.
10. Werninck, E.H. (ed.), *Electric Motor Handbook*, McGraw-Hill, Londres, 1978.

CAPÍTULO 6 Motores de inducción

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

- Entender las diferencias clave entre un motor síncrono y un motor de inducción.
- Comprender el concepto de deslizamiento de rotor y su relación con la frecuencia de rotor.
- Entender y saber cómo usar el circuito equivalente de un motor de inducción.
- Comprender los flujos de potencia y el diagrama de flujo de potencia de un motor de inducción.
- Poder usar la ecuación de la curva característica par-velocidad.
- Entender cómo varía la curva característica par-velocidad con diferentes diseños de rotor.
- Entender las técnicas que se usan para el arranque de motores de inducción.
- Comprender cómo se puede controlar la velocidad de motores de inducción.
- Entender cómo medir los parámetros de modelo de circuito de motores de inducción.
- Entender el comportamiento de la máquina de inducción cuando se utiliza como generador.
- Entender los valores nominales de los motores de inducción.

En el capítulo 5 se estudió cómo los devanados de amortiguamiento pueden desarrollar un par de arranque en un motor síncrono sin la necesidad de suministrarles una corriente de campo externa. De hecho, los devanados de amortiguamiento trabajan tan bien que se puede construir un motor sin el circuito de campo de cd principal del motor síncrono. Una máquina que sólo tiene un conjunto continuo de devanados de amortiguamiento se llama *máquina de inducción*. Se les llama así porque el voltaje en el rotor (que produce la corriente y el campo magnético del rotor) se *induce* en los devanados del rotor en lugar de estar físicamente conectados por cables. La característica distintiva de un motor de inducción es que *no se necesita de corriente de campo de cd* para que la máquina funcione.

A pesar de que es posible utilizar una máquina de inducción como motor o como generador, presenta muchas desventajas como generador y, por lo tanto, rara vez se utiliza como tal. Por esta razón a las máquinas de inducción normalmente se les llama motores de inducción.

6.1 CONSTRUCCIÓN DE UN MOTOR DE INDUCCIÓN

Un motor de inducción tiene físicamente el mismo estator que una máquina síncrona, pero con un rotor de construcción diferente. En la figura 6-1 se muestra un típico estator con dos polos. Se parece (y es igual) al estator de una máquina síncrona. Hay dos tipos diferentes de rotores de motores de inducción que pueden utilizarse dentro del estator. Uno se llama *rotor de jaula de ardilla* o *rotor de jaula* y el otro se conoce como *rotor devanado*.

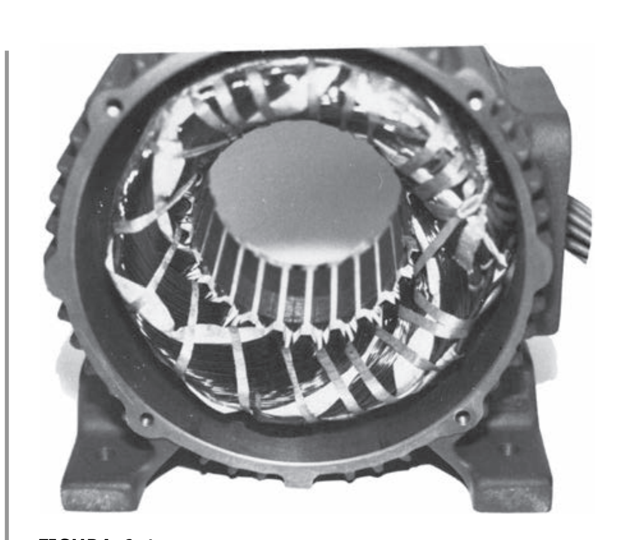
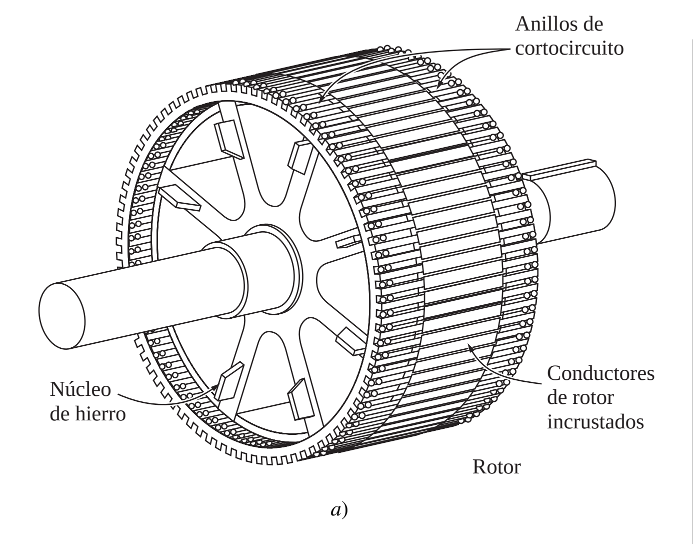
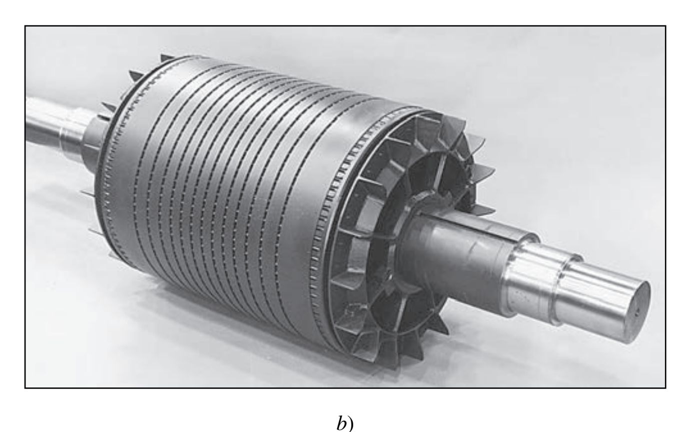


FIGURA 6-1 Estator de un motor de inducción típico que muestra los devanados del estator. (*Cortesía de MagneTek, Inc.*)

Las figuras 6-2 y 6-3 muestran los rotores tipo jaula de ardilla de los motores de inducción. Éstos constan de una serie de barras conductoras dispuestas dentro de ranuras labradas en la cara del rotor y



a)



b)

FIGURA 6-2 *a*) Dibujo de un rotor de jaula de ardilla. *b*) Rotor de jaula de ardilla típico. (*Cortesía de General Electric Company*.)

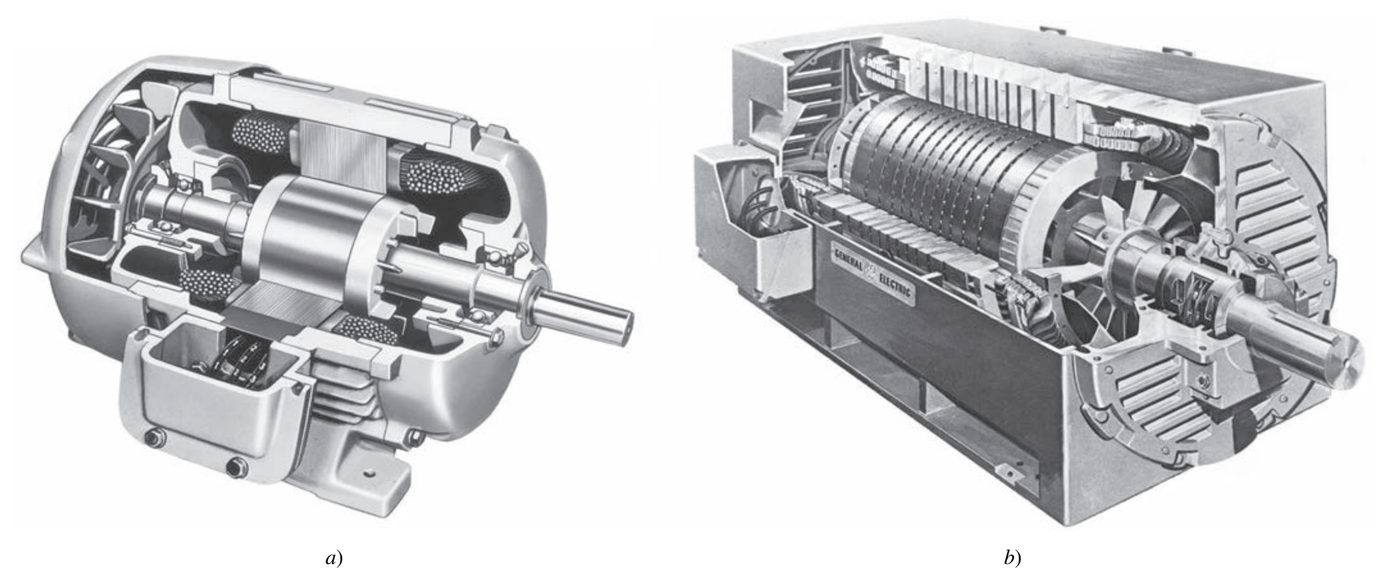
en cortocircuito en alguno de sus extremos mediante grandes *anillos de cortocircuito*. A este diseño se le llama rotor de jaula de ardilla porque los conductores, si se examinan por sí solos, parecen una de las ruedas de ejercicio donde corren las ardillas o hámsters.

El otro tipo de rotor es un rotor devanado. Un *rotor devanado* tiene un conjunto completo de devanados trifásicos que son imágenes especulares de los devanados del estator. Por lo general, las tres fases de los devanados del rotor están conectadas en Y, y los extremos de los tres alambres del rotor están unidos a los anillos rozantes en el eje del rotor. Los devanados del rotor están en cortocircuito por medio de escobillas montadas en los anillos rozantes. Por lo tanto, los rotores devanados de los motores de inducción tienen corrientes en el rotor accesibles en las escobillas del estator, donde se pueden examinar y donde es posible insertar una resistencia extra en el circuito del rotor. Se puede sacar ventaja de este hecho para modificar la característica par-velocidad del motor. En la figura 6-4 se observan dos rotores devanados y en la figura 6-5 se muestra un motor de inducción de rotor devanado.

Los rotores devanados de los motores de inducción son más grandes que los motores de inducción de jaula y requieren mucho más mantenimiento debido al desgaste asociado con las escobillas y con los anillos rozantes. Como resultado, rara vez se utilizan en los motores de inducción.

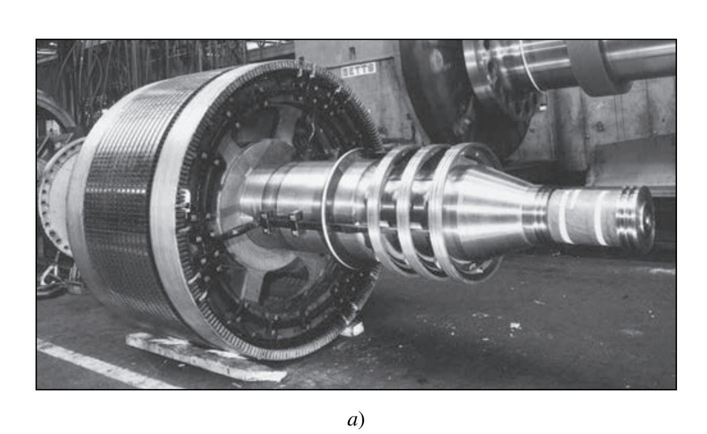
6.2 CONCEPTOS BÁSICOS DE LOS MOTORES DE INDUCCIÓN

La operación de los motores de inducción es básicamente igual a la de los motores síncronos con devanados de amortiguamiento. A continuación se hará un repaso de esta opera-

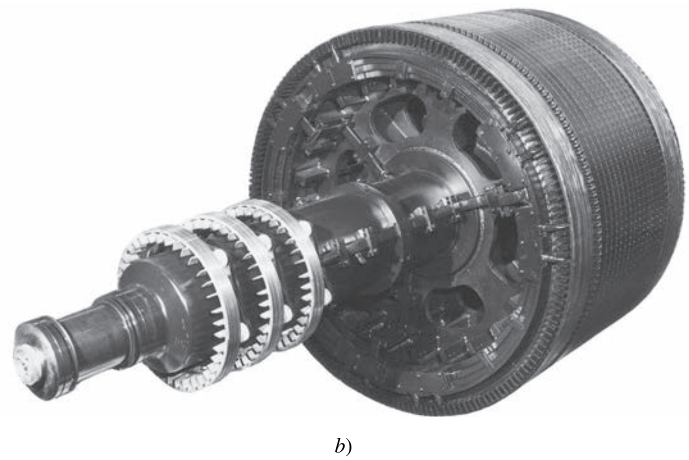


a) *b*)

FIGURA 6-3 *a*) Diagrama de corte del rotor de jaula de ardilla de un pequeño motor de inducción típico. (*Cortesía de MagneTek, Inc.*) *b*) Diagrama de corte del rotor de jaula de ardilla de un gran motor de inducción típico. (*Cortesía de General Electric Company*.)



a)



b)

FIGURA 6-4 Rotores devanados típicos de motores de inducción. Nótense los anillos rozantes y las barras que los conectan con los devanados del motor. (*Cortesía de General Electric Company*.)

ción básica y se definirán ciertos términos importantes de los motores de inducción.

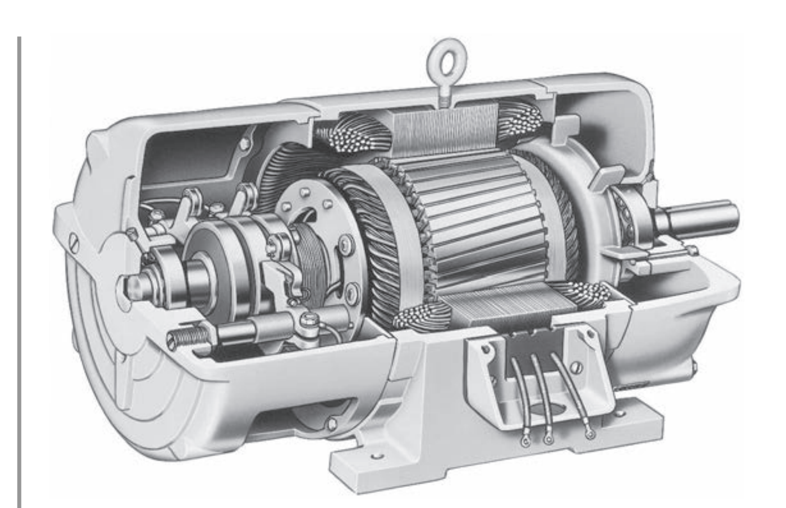


FIGURA 6-5 Diagrama de corte de un motor de inducción con rotor devanado. Nótense las escobillas y los anillos rozantes. También nótese que los devanados del rotor están sesgados para eliminar los armónicos de ranura. (*Cortesía de MagneTek, Inc*.)

Desarrollo del par inducido en un motor de inducción

La figura 6-6 muestra un motor de inducción con un rotor de jaula de ardilla. Se aplicó un conjunto trifásico de voltajes al estator y fluye de él un conjunto trifásico de corrientes. Estas corrientes producen un campo magnético $\mathbf{B}_S$ que gira en sentido contrario al de las manecillas del reloj. La velocidad de rotación del campo magnético está dada por

$$n_{\text{sinc}} = \frac{120\, f_e}{P} \tag{6-1}$$

donde f_e es la frecuencia del sistema en hertz y P es el número de polos en la máquina. Este campo magnético giratorio $\mathbf{B}_S$ pasa sobre las barras del rotor e induce un voltaje en ellas.

El voltaje inducido en cierta barra de rotor está dado por la ecuación

$$e_{\text{ind}} = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{l} \tag{1-45}$$

donde

$\mathbf{v}$ = velocidad de la barra *en relación con el campo magnético*
$\mathbf{B}$ = vector de densidad de flujo magnético
$\mathbf{l}$ = longitud del conductor en el campo magnético

Lo que produce el voltaje *inducido* en la barra del rotor es el movimiento *relativo* del rotor en comparación con el campo magnético del estator. La velocidad de las barras superiores del rotor en relación con el campo magnético es hacia la derecha, por lo que el voltaje inducido en las barras superiores va hacia afuera de la página, mientras que el voltaje inducido en las barras inferiores va hacia adentro de la página. Esto tiene como resultado la generación de un flujo de corriente hacia

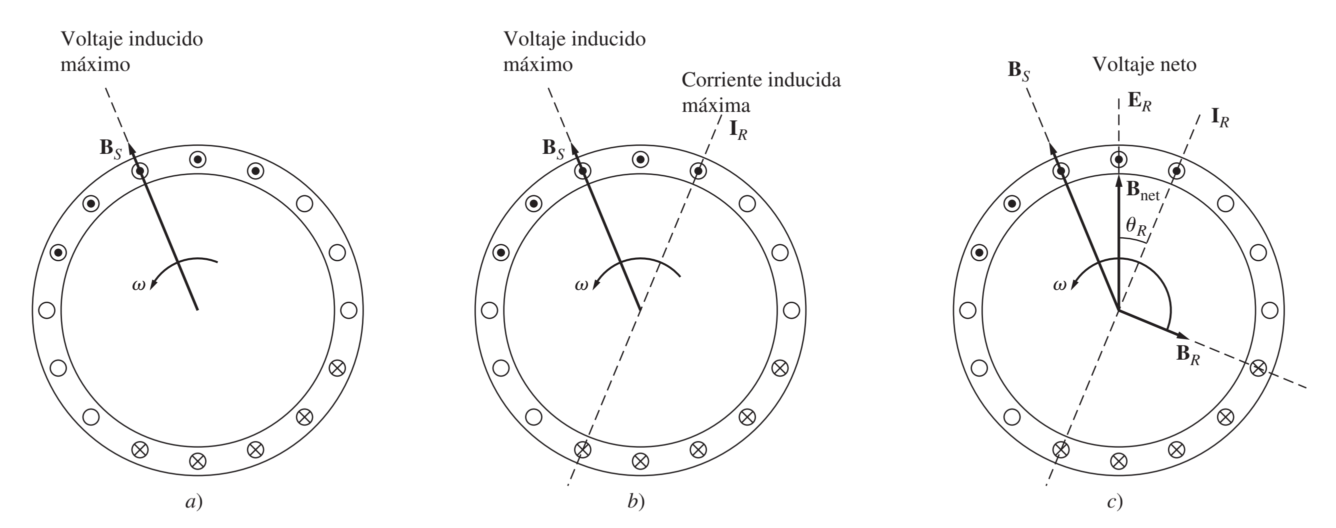


FIGURA 6-6 Desarrollo de un par inducido en un motor de inducción. *a*) El campo magnético giratorio del estator $\mathbf{B}_S$ induce un voltaje en las barras del rotor; *b*) el voltaje del rotor produce un flujo de corriente en el rotor, que está en retraso con el voltaje debido a la inductancia del rotor; *c*) la corriente en el rotor produce un campo magnético en el rotor $\mathbf{B}_R$ 90° en retraso con respecto a sí mismo y $\mathbf{B}_R$ interactúa con $\mathbf{B}_{net}$ para producir un par en sentido contrario al de las manecillas del reloj en la máquina.

afuera de las barras superiores y hacia adentro de las barras inferiores. Sin embargo, puesto que el ensamblado del rotor es inductivo, la corriente pico del rotor está detrás del voltaje pico del rotor (véase la figura 6-6*b*). El flujo de corriente en el rotor produce un campo magnético en el rotor $\mathbf{B}_R$.

Por último, puesto que el par inducido en la máquina está dado por

$$\tau_{ind} = k\mathbf{B}_R \times \mathbf{B}_S \qquad \textbf{(3-58)}$$

el par resultante va en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Debido a que el par inducido en el rotor va en sentido contrario al de las manecillas del reloj, el rotor acelera en esa dirección.

Sin embargo, hay un límite superior finito para la velocidad del motor. Si el rotor del motor de inducción gira a *velocidad síncrona*, entonces las barras del rotor estarán estacionarias *en relación con el campo magnético* y no habrá ningún voltaje inducido. Si e_{ind} fuera igual a cero, entonces no habría corriente en el rotor y no habría campo magnético en él. Sin campo magnético en el rotor, el par inducido sería cero y el rotor reduciría su velocidad como resultado de las pérdidas por fricción. Por lo tanto, un motor de inducción puede acelerar hasta llegar cerca de la velocidad síncrona, pero nunca puede llegar exactamente a ella.

Nótese que durante la operación normal los *campos magnéticos en el rotor y en el estator* $\mathbf{B}_R$ *y* $\mathbf{B}_S$ *giran juntos a velocidad síncrona* n_{sinc}, *mientras que el rotor gira a una velocidad menor*.

Concepto de deslizamiento del rotor

El voltaje inducido en la barra del rotor de un motor de inducción depende de la velocidad del rotor *en relación con los campos magnéticos*. Puesto que la conducta de un motor de inducción depende del voltaje y corriente del rotor, es más lógico hablar de la velocidad relativa. Hay dos términos que se usan regularmente para definir el movimiento relativo del rotor y los campos magnéticos. Uno es la *velocidad de deslizamiento*, que se define como la diferencia entre la velocidad síncrona y la velocidad del rotor:

$$n_{des} = n_{sinc} - n_m \qquad \textbf{(6-2)}$$

donde

n_{des} = velocidad de deslizamiento de la máquina
n_{sinc} = velocidad de los campos magnéticos
n_m = velocidad mecánica del eje del motor

El otro término que se utiliza para describir el movimiento relativo es el de *deslizamiento*, que es igual a la velocidad relativa expresada como una fracción de la unidad o un porcentaje. Esto quiere decir que el deslizamiento se define como

$$s = \frac{n_{\text{des}}}{n_{\text{sinc}}}(\times\ 100\%) \tag{6-3}$$

$$s = \frac{n_{\text{sinc}} - n_m}{n_{\text{sinc}}}(\times\ 100\%) \tag{6-4}$$

Esta ecuación también se puede escribir en términos de velocidad angular ω (radianes por segundo) de la siguiente manera

$$s = \frac{\omega_{\text{sinc}} - \omega_m}{\omega_{\text{sinc}}}(\times\ 100\%) \tag{6-5}$$

Nótese que si el rotor gira a velocidad síncrona, $s = 0$, mientras que si el rotor está estacionario o en reposo, $s = 1$. Todas las velocidades normales del motor caen dentro de estos dos límites.

Se puede expresar la velocidad mecánica del eje del rotor en términos de la velocidad síncrona y del deslizamiento. Si se despeja la velocidad mecánica de las ecuaciones (6-4) y (6-5) se tiene

$$n_m = (1 - s)n_{\text{sinc}} \tag{6-6}$$

o

$$\omega_m = (1 - s)\omega_{\text{sinc}} \tag{6-7}$$

Estas ecuaciones son muy útiles para deducir el par del motor de inducción y las relaciones de potencia.

Frecuencia eléctrica en el rotor

Un motor de inducción funciona por medio de la inducción de voltajes y corrientes en el rotor de la máquina y por esta razón a veces se le llama *transformador rotatorio*. Al igual que un transformador, el primario (estator) induce un voltaje en el secundario (rotor), pero a *diferencia* de un transformador, la frecuencia secundaria no es necesariamente igual a la frecuencia primaria.

Si el rotor de un motor se bloquea y no se puede mover, entonces tendrá la misma frecuencia que el estator. Por otro lado, si el rotor gira a velocidad síncrona, la frecuencia en el rotor será cero. ¿Cuál será la frecuencia del rotor dada una tasa arbitraria de rotación del rotor?

En el caso de $n_m = 0$ r/min, la frecuencia en el rotor es $f_r = f_e$, y el deslizamiento es $s = 1$. En el de $n_m = n_{\text{sinc}}$, la frecuencia en el rotor es $f_r = 0$ Hz y el deslizamiento es $s = 0$. Para cualquier velocidad entre ellas, la frecuencia del rotor es directamente proporcional a la *diferencia* entre la velocidad del campo magnético n_{sinc} y la velocidad del rotor n_m. Puesto que el deslizamiento del rotor se define como

$$s = \frac{n_{\text{sinc}} - n_m}{n_{\text{sinc}}} \tag{6-4}$$

la frecuencia en el rotor se puede expresar como

$$f_r = sf_e \tag{6-8}$$

Hay varias maneras útiles de escribir esta expresión. Una de las más comunes se obtiene sustituyendo la ecuación (6-4) del deslizamiento en la ecuación (6-8) y luego sustituyendo por n_{sinc} en el denominador de la expresión:

$$f_r = \frac{n_{\text{sinc}} - n_m}{n_{\text{sinc}}} f_e$$

Pero $n_{sinc} = 120 f_e/P$ [ecuación (6-1)], por lo que

$$f_r = (n_{sinc} - n_m)\frac{P}{120 f_e} f_e$$

Por lo tanto,

$$f_r = \frac{P}{120}(n_{sinc} - n_m) \qquad \textbf{(6-9)}$$

EJEMPLO 6-1

Un motor de inducción de 208 V, 10 hp, cuatro polos, 60 Hz, conectado en Y, tiene un deslizamiento a plena carga de 5%.

a) ¿Cuál es la velocidad síncrona del motor?
b) ¿Cuál es la velocidad del rotor con carga nominal?
c) ¿Cuál es la frecuencia del rotor con carga nominal?
d) ¿Cuál es el par en el eje del motor con carga nominal?

Solución

a) La velocidad síncrona del motor es

$$n_{sinc} = \frac{120 f_e}{P}$$
$$= \frac{120(60 \text{ Hz})}{4 \text{ polos}} = 1\,800 \text{ r/min}$$

b) La velocidad del rotor está dada por

$$n_m = (1 - s)n_{sinc} \qquad \textbf{(6-6)}$$
$$= (1 - 0.05)(1\,800 \text{ r/min}) = 1\,710 \text{ r/min}$$

c) La frecuencia del rotor está dada por

$$f_r = sf_e = (0.05)(60 \text{ Hz}) = 3 \text{ Hz} \qquad \textbf{(6-8)}$$

De manera alterna, la frecuencia se puede encontrar con la ecuación (6-9):

$$f_r = \frac{P}{120}(n_{sinc} - n_m) \qquad \textbf{(6-9)}$$
$$= \frac{4}{120}(1\,800 \text{ r/min} - 1\,710 \text{ r/min}) = 3 \text{ Hz}$$

d) El par de carga aplicado al eje está dado por

$$\tau_{carga} = \frac{P_{sal}}{\omega_m}$$
$$= \frac{(10 \text{ hp})(746 \text{ W/hp})}{(1\,710 \text{ r/min})(2\pi \text{ rad/r})(1 \text{ min}/60 \text{ s})} = 41.7 \text{ N} \cdot \text{m}$$

El par de carga aplicado al eje en sistema inglés está dado por la ecuación (1-17):

$$\tau_{carga} = \frac{5\,252 P}{n}$$

donde τ está en libras-pie, P en caballos de fuerza y n_m en revoluciones por minuto. Por lo tanto,

$$\tau_{carga} = \frac{5\,252(10 \text{ hp})}{1\,710 \text{ r/min}} = 30.7 \text{ lb} \cdot \text{ft}$$

6.3 CIRCUITO EQUIVALENTE DE UN MOTOR DE INDUCCIÓN

Para su operación, los motores de inducción dependen de la inducción de voltajes y corrientes en el circuito del rotor desde el circuito del estator (acción transformadora). Puesto que la inducción de voltajes y corrientes en el circuito del rotor de un motor de inducción es esencialmente una operación transformadora, el circuito equivalente de un motor de inducción será muy similar al circuito equivalente de un transformador. A los motores de inducción se les llama máquinas de *excitación única* (a diferencia de las máquinas síncronas de *doble excitación*) porque sólo se suministra potencia al circuito del estator. Puesto que un motor de inducción no tiene un circuito de campo independiente, su modelo no contiene una fuente de voltaje interna como el voltaje interno generado $\mathbf{E}_A$ en las máquinas síncronas.

Se puede deducir el circuito equivalente de un motor de inducción a partir del conocimiento de los transformadores y de lo que se establece en los capítulos anteriores sobre la variación de la frecuencia del rotor con la velocidad en los motores de inducción. El modelo de un motor de inducción se desarrollará a partir del modelo de transformador del capítulo 2 y luego decidiendo cómo tomar en cuenta los efectos de la frecuencia variable del rotor y otros efectos similares en los motores de inducción.

Modelo de transformador de un motor de inducción

En la figura 6-7 se muestra un circuito equivalente transformador por fase que representa la operación de un motor de inducción. Como cualquier otro transformador, hay cierta resistencia y autoinductancia en los devanados primarios (estator) que se deben representar en el circuito equivalente de la máquina. La resistencia del estator se llama R_1 y la reactancia de dispersión del estator X_1. Estos dos componentes se pueden ver justo en la entrada del modelo de la máquina.

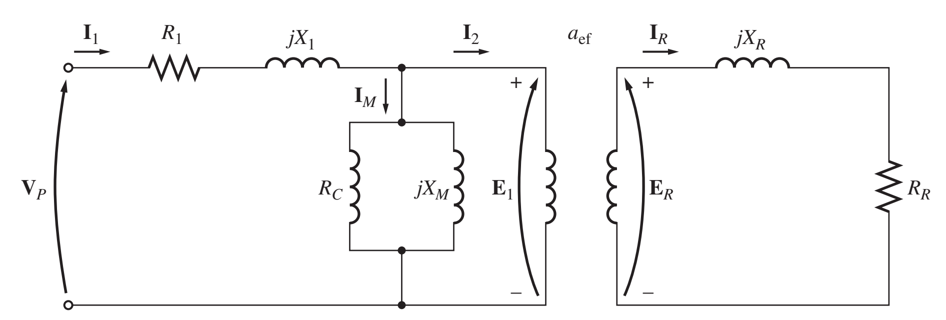


FIGURA 6-7 Modelo de transformador de un motor de inducción, con el rotor y el estator conectados por un transformador ideal con una relación de vueltas de a_{ef}.

Además, como cualquier otro transformador con núcleo de hierro, el flujo en la máquina se relaciona con la integral del voltaje aplicado $\mathbf{E}_1$. En la figura 6-8 se compara la curva de la fuerza magnetomotriz y el flujo (curva de magnetización) de esta máquina con la curva de un transformador de potencia. Nótese que la pendiente de la curva de la fuerza magnetomotriz y el flujo del motor de inducción es mucho menos pronunciada que la curva de un buen transformador. Esto es porque debe haber un entrehierro en los motores de inducción, que incremente fuertemente la reluctancia del camino del flujo y, por lo tanto, reduzca el acoplamiento entre los devanados primario y secundario. Mientras más alta sea la reluctancia que provoca el entrehierro, mayor será la corriente de magnetización que se requiera para obtener cierto nivel de flujo. Por lo tanto, la reactancia de magnetización X_M en el circuito equivalente tendrá que ser mucho menor (o la susceptancia B_M tendrá que ser mucho mayor) de lo que sería en un transformador ordinario.

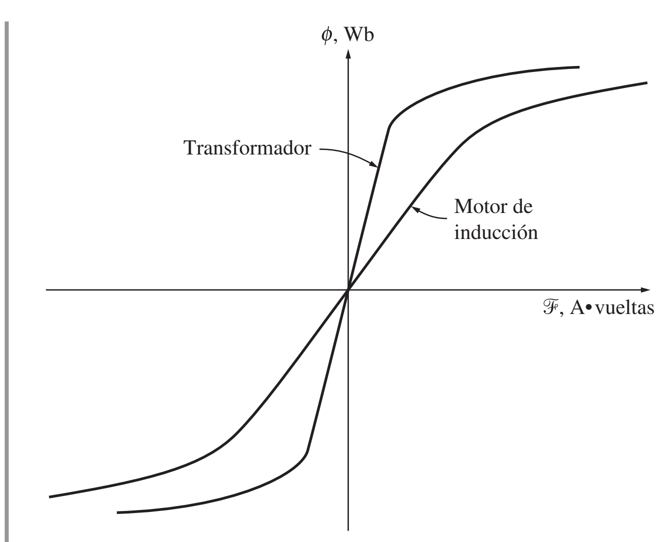


FIGURA 6-8 Curva de magnetización de un motor de inducción en comparación con la de un transformador.

El voltaje primario interno del estator $\mathbf{E}_1$ se acopla al secundario $\mathbf{E}_R$ por medio de un transformador ideal con una re-

lación efectiva de vueltas a_{ef}. La relación efectiva de vueltas a_{ef} es bastante fácil de determinar en un motor con rotor devanado: básicamente es la relación entre los conductores por fase del estator y los conductores por fase del rotor, modificada por las diferencias entre los factores de paso y de distribución. Es bastante difícil ver claramente a_{ef} en el caso de un motor con rotor de jaula de ardilla porque no hay diferencias entre los devanados en este tipo de rotor. En cualquier caso, *hay* una relación efectiva de vueltas en el motor.

El voltaje $\mathbf{E}_R$ producido en el rotor en turno produce un flujo de corriente en el circuito del rotor (o del secundario) en cortocircuito de la máquina.

Las impedancias del primario y la corriente de magnetización del motor de inducción son similares a los componentes correspondientes en el circuito equivalente de un transformador. El circuito equivalente de un motor de inducción difiere del circuito equivalente de un transformador, principalmente, en los efectos de variación de la frecuencia en el rotor sobre el voltaje del rotor $\mathbf{E}_R$ y las impedancias del rotor R_R y jX_R.

Modelo de circuito del rotor

Cuando se aplica voltaje a los devanados del estator de un motor de inducción, se induce un voltaje en los devanados del rotor de la máquina. En general, *mientras mayor sea el movimiento relativo entre los campos magnéticos del rotor y del estator, mayor será el voltaje resultante del rotor y la frecuencia del rotor*. El movimiento relativo es más grande cuando el rotor está estacionario y se llama condición *de rotor bloqueado* o *de rotor detenido*, de manera que se inducen el mayor voltaje y frecuencia en el rotor. El menor voltaje (0 V) y frecuencia (0 Hz) se presentan cuando el rotor se mueve a la misma velocidad que el campo magnético del estator, que tiene como resultado que no haya movimiento relativo. La magnitud y frecuencia del voltaje inducido en el rotor en cualquier velocidad entre estos dos extremos es *directamente proporcional al deslizamiento del rotor*. Por lo tanto, si se llama E_{R0} a la magnitud del voltaje inducido del rotor en condición de rotor bloqueado, la magnitud del voltaje inducido con cualquier deslizamiento está dada por la siguiente ecuación

$$E_R = sE_{R0} \tag{6-10}$$

y la frecuencia del voltaje inducido con cualquier deslizamiento está dada por la siguiente ecuación

$$f_r = sf_e \tag{6-8}$$

Este voltaje se induce en un rotor que consta tanto de resistencia como de reactancia. La resistencia del rotor R_R es constante (excepto por el efecto superficial o pelicular), independientemente del deslizamiento, mientras que la reactancia del rotor se ve afectada de manera más compleja por el deslizamiento.

La reactancia del rotor de un motor de inducción depende de la inductancia del rotor y de la frecuencia del voltaje y corriente en el rotor. Con una inductancia del rotor de L_R, la reactancia del rotor está dada por

$$X_R = \omega_r L_R = 2\pi f_r L_R$$

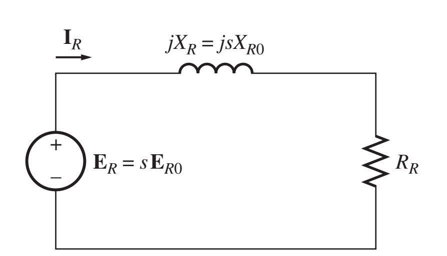


FIGURA 6-9 Modelo de circuito de rotor de un motor de inducción.

De la ecuación (6-8), $f_r = sf_e$, tal que

$$\begin{aligned} X_R &= 2\pi s f_e L_R \\ &= s(2\pi f_e L_R) \\ &= sX_{R0} \end{aligned} \tag{6-11}$$

donde X_{R0} es la reactancia del rotor en estado bloqueado o detenido.

En la figura 6-9 se muestra el circuito equivalente resultante del rotor. El flujo de corriente del rotor es

$$\mathbf{I}_R = \frac{\mathbf{E}_R}{R_R + jX_R}$$

$$\mathbf{I}_R = \frac{\mathbf{E}_R}{R_R + jsX_{R0}} \tag{6-12}$$

o

$$\mathbf{I}_R = \frac{\mathbf{E}_{R0}}{R_R/s + jX_{R0}} \tag{6-13}$$

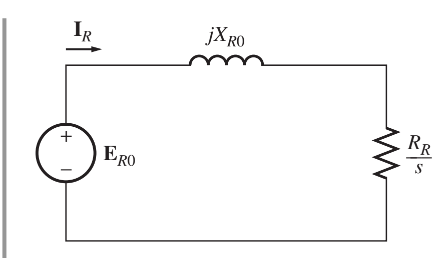


FIGURA 6-10 Modelo del circuito de rotor con todos los efectos de frecuencia (deslizamientos) concentrados en el resistor R_R.

Nótese de la ecuación (6-13) que es posible tratar todos los efectos del rotor, debidos a la variación de velocidad de éste, como ocasionados por una *impedancia variable* suministrada con la potencia de una fuente de voltaje constante $\mathbf{E}_{R0}$. La impedancia del rotor equivalente desde este punto de vista es

$$Z_{R,\,\text{eq}} = R_R/s + jX_{R0} \tag{6-14}$$

y el circuito equivalente del rotor que utiliza esta convención se puede observar en la figura 6-10. En el circuito equivalente de la figura 6-10, el voltaje del rotor es una constante $\mathbf{E}_{R0}$ V y su impedancia $Z_{R,\,\text{eq}}$ contiene todos los efectos de variación del deslizamiento del rotor. En la figura 6-11 se muestra una gráfica del flujo de corriente en el rotor, como se dedujo en las ecuaciones (6-12) y (6-13).

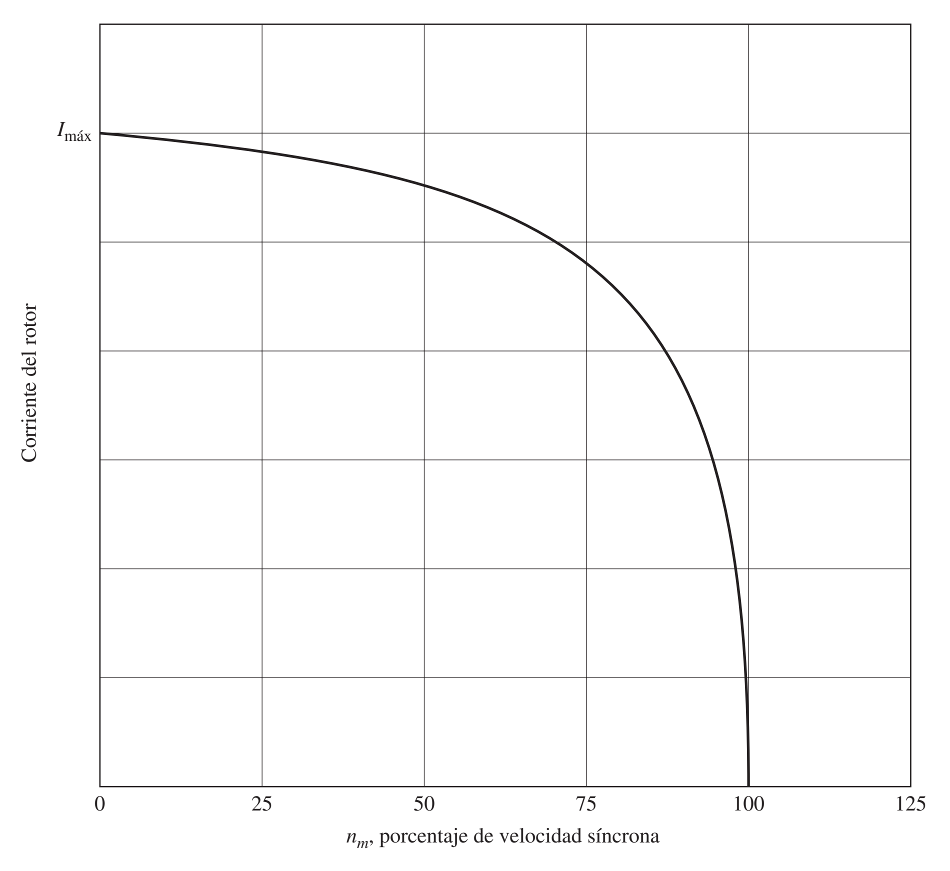


FIGURA 6-11 Corriente del rotor en función de la velocidad del rotor.

Nótese que con deslizamientos muy bajos, el término resistivo $R_R/s >> X_{R0}$, por lo que predomina la resistencia del rotor mientras que su corriente varía *linealmente* con el deslizamiento. Con deslizamientos altos, X_{R0} es mucho mayor que R_R/s y la corriente del rotor *se aproxima al valor en estado estacionario o de rotor bloqueado* conforme el deslizamiento crece.

Circuito equivalente final

Para producir el circuito equivalente por fase final de un motor de inducción, es necesario referir la parte del rotor del modelo al lado del estator. En la figura 6-10 se muestra el modelo de circuito del rotor al que se referirá el lado del estator, el cual tiene todos los efectos de variación de velocidad concentrados en el término de impedancia.

En un transformador ordinario se pueden referir los voltajes, corrientes e impedancias del lado secundario del aparato al lado primario por medio de la relación de vueltas del transformador:

$$\mathbf{V}_P = \mathbf{V}'_S = a\mathbf{V}_S \tag{6-15}$$

$$\mathbf{I}_P = \mathbf{I}'_S = \frac{\mathbf{I}_S}{a} \tag{6-16}$$

y

$$Z'_S = a^2 Z_S \tag{6-17}$$

donde el superíndice prima se refiere a los valores referidos de voltaje, corriente e impedancia.

Se puede realizar exactamente el mismo tipo de transformación en el caso del circuito del rotor del motor de inducción. Si la relación efectiva de vueltas de un motor de inducción es a_{ef}, entonces el voltaje transformado del rotor es

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}'_R = a_{ef}\,\mathbf{E}_{R0} \tag{6-18}$$

la corriente del rotor es

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{I}_R}{a_{ef}} \tag{6-19}$$

y la impedancia del rotor es

$$Z_2 = a_{ef}^2\left(\frac{R_R}{s} + jX_{R0}\right) \tag{6-20}$$

Si ahora se define

$$R_2 = a_{ef}^2\,R_R \tag{6-21}$$

$$X_2 = a_{ef}^2\,X_{R0} \tag{6-22}$$



entonces el circuito equivalente por fase final del motor de inducción es el que se muestra en la figura 6-12.

La resistencia del rotor R_R y la reactancia del rotor en estado bloqueado X_{R0} son muy difíciles o incluso imposibles de determinar directamente en los rotores de jaula de ardilla y la relación efectiva de vueltas a_{ef} también es muy engorrosa de obtener en los rotores de jaula de ardilla. Por suerte, es posible llevar a cabo mediciones que conducirán directamente a la *resistencia* y *reactancia referidas* R_2 y X_2, aun cuando R_R, X_{R0} y a_{ef} no se conozcan por separado. La sección 6.7 se dedicará a la medición de los parámetros de los motores de inducción.

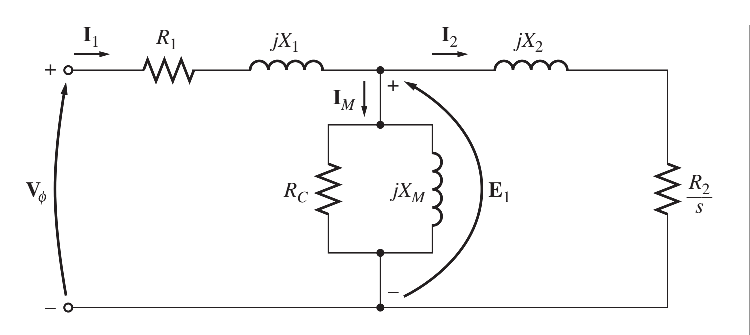


FIGURA 6-12 Circuito equivalente por fase de un motor de inducción.

6.4 POTENCIA Y PAR EN LOS MOTORES DE INDUCCIÓN

Puesto que los motores de inducción son máquinas de una sola excitación, sus relaciones de potencia y par difieren considerablemente de las relaciones en las máquinas síncronas ya estudiadas. Esta sección se dedica a las relaciones de potencia y par en los motores de inducción.

Pérdidas y diagrama de flujo de potencia

Se puede describir a un motor de inducción básicamente como un transformador rotatorio. Su entrada es un sistema trifásico de voltajes y corrientes. En un transformador ordinario, la salida es la potencia eléctrica de los devanados secundarios. Los devanados secundarios de un motor de inducción (el rotor) están en cortocircuito, por lo que no hay salida de electricidad de los motores normales de inducción. En cambio, la salida es mecánica. La relación entre la potencia eléctrica de entrada y la potencia mecánica de salida del motor se muestra en el diagrama de flujo de potencia de la figura 6-13.

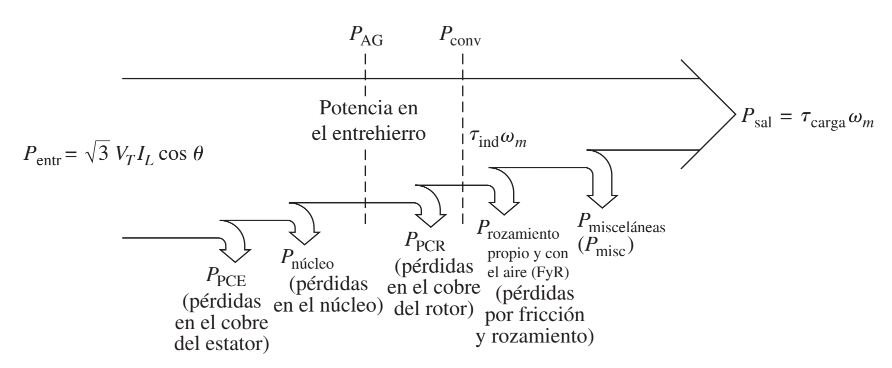


FIGURA 6-13 Diagrama de flujo de potencia de un motor de inducción.

La potencia de entrada de un motor de inducción P_{entr} se presenta en forma de voltajes y corrientes eléctricas trifásicas. Las primeras pérdidas que se encuentran en la máquina son las pérdidas I^2R en los devanados del estator (las *pérdidas en el cobre del estator* P_{PCE}). Luego se pierde cierta cantidad de potencia por la histéresis y las corrientes parásitas del estator ($P_{núcl}$). La potencia restante en este punto se transfiere al rotor de la máquina a través del entrehierro entre el estator y el rotor. Esta potencia se llama *potencia en el entrehierro* P_{EH} de la máquina. Una vez que se transfiere la potencia al rotor, una parte de ella se elimina en pérdidas I^2R (las *pérdidas en el cobre del rotor* P_{PCR}) y el resto se convierte de su forma eléctrica a mecánica (P_{conv}). Por último, se restan las pérdidas por fricción y rozamiento con el aire P_{FyR} y las pérdidas misceláneas P_{misc}. La potencia restante es la salida del motor P_{sal}.

Las *pérdidas en el núcleo* no siempre aparecen en el diagrama de flujo de potencia en el punto en que se muestra en la figura 6-13. Debido a la naturaleza de las pérdidas en el núcleo, es un tanto arbitrario dónde se toman en cuenta en la máquina. Las pérdidas en el núcleo de un motor de inducción vienen parcialmente del circuito del estator y del circuito del rotor. Puesto que un motor de inducción de manera usual opera a una velocidad muy cercana a la velocidad síncrona, el movimiento relativo de los campos magnéticos sobre la superficie del rotor es muy lento y las pérdidas en el núcleo del rotor son muy pequeñas en comparación con las pérdidas en el núcleo del estator. Puesto que la mayor parte de estas pérdidas en el núcleo se presentan en el circuito del estator, todas las pérdidas en el núcleo se agrupan en ese punto en el diagrama. Estas pérdidas se representan en el circuito equivalente del motor de inducción por medio del resistor R_C (o de la conductancia G_C). Si las pérdidas en el núcleo se describen simplemente con un X número de watts, en lugar de un elemento de circuito, a menudo se agrupan con las pérdidas mecánicas y se restan en el punto del diagrama donde se ubican las pérdidas mecánicas.

Mientras *mayor* sea la velocidad del motor de inducción, *mayores* serán las pérdidas por fricción, por rozamiento con el aire y misceláneas. Por otro lado, mientras *más alta* sea la velocidad del motor (hasta n_{sinc}), *menores* serán las pérdidas en el núcleo. Por lo tanto, a veces estas tres categorías de pérdidas se agrupan y se denominan *pérdidas rotacionales*. Con frecuencia, las pérdidas rotacionales totales de un motor se consideran constantes frente a la velocidad variable puesto que las pérdidas que la componen cambian en direcciones opuestas frente a un cambio de velocidad.

EJEMPLO 6-2

A un motor de inducción trifásico de 480 V, 60 Hz y 50 hp se le suministran 60 A con un factor de potencia de 0.85 en retraso. Las pérdidas de cobre del estator son de 2 kW y las pérdidas en el cobre del rotor son de 700 W. Las pérdidas por fricción y rozamiento con el aire son de 600 W, las pérdidas en el núcleo son de 1 800 W y las misceláneas son despreciables. Encuentre las siguientes cantidades:

a) Potencia en el entrehierro P_{EH}
b) Potencia convertida P_{conv}
c) Potencia de salida P_{sal}
d) Eficiencia del motor

Solución

Para responder estas preguntas, remítase al diagrama de flujo de potencia de un motor de inducción (figura 6-13).

a) La potencia en el entrehierro es la potencia de entrada menos las pérdidas I^2R en el estator y en el núcleo. La potencia de entrada está dada por

$$\begin{aligned} P_{entr} &= \sqrt{3}V_T I_L \cos\theta \\ &= \sqrt{3}(480 \text{ V})(60 \text{ A})(0.85) = 42.4 \text{ kW} \end{aligned}$$

Por el diagrama de flujo de potencia, la potencia en el entrehierro está dada por

$$\begin{aligned} P_{EH} &= P_{entr} - P_{PCE} - P_{núcl} \\ &= 42.4 \text{ kW} - 2 \text{ kW} - 1.8 \text{ kW} = 38.6 \text{ kW} \end{aligned}$$

b) Por el diagrama de flujo de potencia, la potencia convertida de forma eléctrica a mecánica es

$$\begin{aligned} P_{conv} &= P_{EH} - P_{PCE} \\ &= 38.6 \text{ kW} - 700 \text{ W} = 37.9 \text{ kW} \end{aligned}$$

c) Por el diagrama de flujo de potencia, la potencia de salida está dada por

$$\begin{aligned} P_{sal} &= P_{conv} - P_{FyR} - P_{misc} \\ &= 37.9 \text{ kW} - 600 \text{ W} - 0 \text{ W} = 37.3 \text{ kW} \end{aligned}$$

o, en caballos de fuerza

$$P_{sal} = (37.3 \text{ kW}) \frac{1 \text{ hp}}{0.746 \text{ kW}} = 50 \text{ hp}$$

d) Por lo tanto, la eficiencia del motor de inducción es

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{P_{sal}}{P_{entr}} \times 100\% \\ &= \frac{37.3 \text{ kW}}{42.4 \text{ kW}} \times 100\% = 88\% \end{aligned}$$

Potencia y par de un motor de inducción

La figura 6-12 muestra el circuito equivalente por fase de un motor de inducción. Si se examina de cerca el circuito equivalente, se puede utilizar para deducir las ecuaciones de la potencia y del par que gobiernan la operación del motor.

La corriente de entrada a una fase del motor se puede encontrar dividiendo el voltaje de entrada entre la impedancia equivalente total:

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{V}_\phi}{Z_{eq}} \tag{6-23}$$

donde

$$Z_{eq} = R_1 + jX_1 + \frac{1}{G_C - jB_M + \dfrac{1}{V_2/s + jX_2}} \tag{6-24}$$

Por lo tanto, se pueden encontrar las pérdidas en el cobre del estator, las pérdidas en el núcleo y las pérdidas en el cobre del rotor. Las pérdidas en el cobre del estator en las tres fases están dadas por

$$P_{PCE} = 3I_1^2 R_1 \tag{6-25}$$

Las pérdidas en el núcleo están dadas por

$$P_{núcl} = 3E_1^2 G_C \tag{6-26}$$

por lo que la potencia en el entrehierro es de

$$P_{EH} = P_{entr} - P_{PCE} - P_{núcl} \tag{6-27}$$

Si se mira de cerca el circuito equivalente del rotor, el *único* elemento del circuito equivalente donde se puede consumir potencia en el entrehierro es en el resistor R_2/s. Por lo tanto, la *potencia en el entrehierro* también se puede obtener así

$$P_{EH} = 3I_2^2 \frac{R_2}{s} \tag{6-28}$$

Las pérdidas resistivas reales en el circuito del rotor están dadas por la ecuación

$$P_{PCR} = 3I_R^2 R_R \tag{6-29}$$

Puesto que la potencia no cambia cuando se refiere a través de un transformador ideal, las pérdidas en el cobre del rotor se pueden expresar como

$$P_{PCR} = 3I_2^2 R_2 \tag{6-30}$$

Una vez que se restan de la potencia de entrada al motor las pérdidas en el cobre del estator, las pérdidas en el núcleo y las pérdidas en el cobre del rotor, la potencia restante se convierte de su forma eléctrica a mecánica. Esta potencia convertida, que a veces se llama *potencia mecánica desarrollada*, está dada por

$$\begin{aligned} P_{conv} &= P_{EH} - P_{PCR} \\ &= 3I_2^2 \frac{R_2}{s} - 3I_2^2 R_2 \\ &= 3I_2^2 R_2 \left(\frac{1}{s} - 1\right) \end{aligned}$$

$$P_{conv} = 3I_2^2 R_2 \left(\frac{1 - s}{s}\right) \tag{6-31}$$

Nótese de las ecuaciones (6-28) y (6-30) que las pérdidas en el cobre del rotor son iguales a la potencia en el entrehierro multiplicada por el deslizamiento:

$$P_{\text{PCR}} = sP_{\text{EH}} \tag{6-32}$$

Por lo tanto, mientras menor sea el deslizamiento del motor, menores serán las pérdidas del rotor. Nótese también que si el rotor no gira, el deslizamiento es $s = 1$ y el *rotor consume toda la potencia en el entrehierro*. Esto es lógico puesto que si el rotor no gira, la potencia de salida P_{sal} ($= \tau_{\text{carga}}\omega_m$) debe ser cero. Puesto que $P_{\text{conv}} = P_{\text{EH}} - P_{\text{PCR}}$, esto también representa otra relación entre la potencia en el entrehierro y la potencia convertida de forma eléctrica a mecánica:

$$\begin{aligned} P_{\text{conv}} &= P_{\text{EH}} - P_{\text{PCR}} \\ &= P_{\text{EH}} - sP_{\text{EH}} \end{aligned}$$

$$P_{\text{conv}} = (1 - s)P_{\text{EH}} \tag{6-33}$$

Por último, si se conocen las pérdidas por fricción y por rozamiento con el aire y las pérdidas misceláneas, la potencia de salida se puede encontrar de la siguiente manera

$$P_{\text{sal}} = P_{\text{conv}} - P_{\text{FyR}} - P_{\text{misc}} \tag{6-34}$$

El *par inducido* τ_{ind} en una máquina se definió como el par generado por la conversión de potencia interna de eléctrica a mecánica. Este par difiere del par realmente disponible en los terminales del motor por una cantidad igual a los pares de fricción y de rozamiento con el aire en la máquina. El par inducido está dado por la ecuación

$$\tau_{\text{ind}} = \frac{P_{\text{conv}}}{\omega_m} \tag{6-35}$$

A este par también se le llama *par desarrollado* de la máquina.

El par inducido de un motor de inducción se puede expresar también de otra forma. La ecuación (6-7) expresa la velocidad real en términos de velocidad síncrona y deslizamiento, mientras que la ecuación (6-33) expresa P_{conv} en términos de P_{EH} y deslizamiento. Sustituyendo ambas ecuaciones en la ecuación (6-35) nos da como resultado

$$\tau_{\text{ind}} = \frac{(1 - s)P_{\text{EH}}}{(1 - s)\omega_{\text{sinc}}}$$

$$\tau_{\text{ind}} = \frac{P_{\text{EH}}}{\omega_{\text{sinc}}} \tag{6-36}$$

Esta última ecuación es en particular útil porque expresa el par inducido de manera directa en términos de potencia en el entrehierro y *velocidad síncrona*, la cual no varía. El conocimiento de P_{EH} brinda automáticamente el valor de τ_{ind}.

Separación de las pérdidas en el cobre del rotor y la potencia convertida en el circuito equivalente de un motor de inducción

Parte de la potencia que pasa a través del entrehierro de un motor de inducción se consume en las pérdidas en el cobre del rotor y parte se convierte en potencia mecánica para hacer girar el eje del motor. Es posible separar los dos usos de la potencia del entrehierro y representarlos por separado en el circuito equivalente del motor.

La ecuación (6-28) nos indica la expresión de la potencia en el entrehierro total de motor de inducción, mientras que la ecuación (6-30) muestra las pérdidas reales en el rotor en el motor. La

potencia en el entrehierro es la potencia que se consumiría en un resistor con valor de R_2/s, mientras que las pérdidas en el cobre del rotor es la potencia que se consumiría en un resistor con valor de R_2. La diferencia entre ellos es P_{conv}, que, por lo tanto, debe ser la potencia consumida en un resistor con valor de

$$R_{conv} = \frac{R_2}{s} - R_2 = R_2\left(\frac{1}{s} - 1\right)$$

$$R_{conv} = R_2\left(\frac{1-s}{s}\right) \tag{6-37}$$

En la figura 6-14 se muestra el circuito equivalente por fase con las pérdidas en el cobre del rotor y la potencia convertida en forma mecánica separadas en dos elementos distintos.

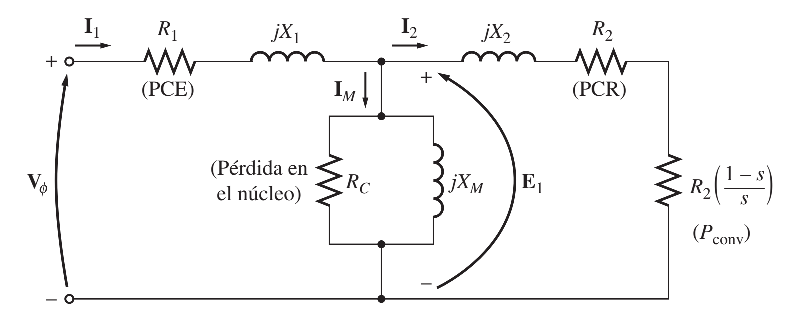


FIGURA 6-14 Circuito equivalente por fase con pérdidas en el rotor y $P_{núcl}$ separadas.

EJEMPLO 6-3

Un motor de inducción con cuatro polos, de 460 V, 25 hp, 60 Hz, conectado en Y, tiene las siguientes impedancias en ohms por fase referidas al circuito del estator:

$$R_1 = 0.641\ \Omega \qquad R_2 = 0.332\ \Omega$$
$$X_1 = 1.106\ \Omega \qquad X_2 = 0.464\ \Omega \qquad X_M = 26.3\ \Omega$$

Las pérdidas por rotación totales son de 1 100 W y se supone que son constantes. Las pérdidas en el núcleo se agrupan con las pérdidas por rotación. Para un deslizamiento del rotor de 2.2% a voltaje y frecuencia nominales, encuentre las siguientes cantidades del motor:

a) Velocidad
b) Corriente del estator
c) Factor de potencia
d) P_{conv} y P_{sal}
e) τ_{ind} y τ_{carga}
f) Eficiencia

Solución

En la figura 6-12 se muestra el circuito equivalente por fase de este motor y en la 6-13 se puede observar el diagrama de flujo de potencia. Puesto que las pérdidas en el núcleo están agrupadas con las pérdidas por fricción y por rozamiento con el aire y con las pérdidas misceláneas, se tratarán como las pérdidas mecánicas y luego se restarán de P_{conv} en el diagrama de flujo de potencia.

a) La velocidad síncrona es

$$n_{sinc} = \frac{120 f_e}{P} = \frac{120(60\text{ Hz})}{4\text{ polos}} = 1\,800\text{ r/min}$$

o

$$\omega_{sinc} = (1\,800\text{ r/min})\left(\frac{2\pi\text{ rad}}{1\text{ r}}\right)\left(\frac{1\text{ min}}{60\text{ s}}\right) = 188.5\text{ rad/s}$$

La velocidad mecánica del eje del rotor es

$$n_m = (1 - s)n_{\text{sinc}}$$
$$= (1 - 0.022)(1\,800 \text{ r/min}) = 1\,760 \text{ r/min}$$

o

$$\omega_m = (1 - s)\omega_{\text{sinc}}$$
$$= (1 - 0.022)(188.5 \text{ rad/s}) = 184.4 \text{ rad/s}$$

b) Para encontrar la corriente del estator, obtenga la impedancia equivalente del circuito. El primer paso es combinar la impedancia referida del rotor en paralelo con la rama de magnetización y luego añadir la impedancia del estator a esa combinación en serie. La impedancia referida del rotor es

$$Z_2 = \frac{R_2}{s} + jX_2$$
$$= \frac{0.332}{0.022} + j0.464$$
$$= 15.09 + j0.464\ \Omega = 15.10\angle 1.76^\circ\ \Omega$$

La impedancia combinada de magnetización más la del rotor está dada por

$$Z_f = \frac{1}{1/jX_M + 1/Z_2}$$
$$= \frac{1}{-j0.038 + 0.0662\angle -1.76^\circ}$$
$$= \frac{1}{0.0773\angle -31.1^\circ} = 12.94\angle 31.1^\circ\ \Omega$$

Por lo tanto, la impedancia total es

$$Z_{\text{tot}} = Z_{\text{estat}} + Z_f$$
$$= 0.641 + j1.106 + 12.94\angle 31.1^\circ\ \Omega$$
$$= 11.72 + j7.79 = 14.07\angle 33.6^\circ\ \Omega$$

La corriente resultante del estator es

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{V}_\phi}{Z_{\text{tot}}}$$
$$= \frac{266\angle 0^\circ \text{ V}}{14.07\angle 33.6^\circ\ \Omega} = 18.88\angle -33.6^\circ \text{ A}$$

c) El factor de potencia de la potencia del motor es

$$\text{FP} = \cos 33.6^\circ = 0.833 \qquad \text{en retraso}$$

d) La potencia de entrada del motor es

$$P_{\text{entr}} = \sqrt{3}V_T I_L \cos\theta$$
$$= \sqrt{3}(460 \text{ V})(18.88 \text{ A})(0.833) = 12\,530 \text{ W}$$

Las pérdidas en el cobre del estator de esta máquina son

$$P_{\text{PCE}} = 3I_1^2 R_1 \tag{6-25}$$
$$= 3(18.88 \text{ A})^2(0.641\ \Omega) = 685 \text{ W}$$

La potencia en el entrehierro está dada por

$$P_{\text{EH}} = P_{\text{entr}} - P_{\text{PCE}} = 12\,530 \text{ W} - 685 \text{ W} = 11\,845 \text{ W}$$

Por lo tanto, la potencia convertida es

$$P_{\text{conv}} = (1 - s)P_{\text{EH}} = (1 - 0.022)(11\,845 \text{ W}) = 11\,585 \text{ W}$$

La potencia P_{sal} está dada por

$$P_{sal} = P_{conv} - P_{rot} = 11\,585\text{ W} - 1\,100\text{ W} = 10\,485\text{ W}$$
$$= 10\,485\text{ W}\left(\frac{1\text{ hp}}{746\text{ W}}\right) = 14.1\text{ hp}$$

e) El par inducido está dado por

$$\tau_{ind} = \frac{P_{EH}}{\omega_{sinc}}$$
$$= \frac{11\,845\text{ W}}{188.5\text{ rad/s}} = 62.8\text{ N}\cdot\text{m}$$

y el par de salida está dado por

$$\tau_{carga} = \frac{P_{sal}}{\omega_m}$$
$$= \frac{10\,485\text{ W}}{184.4\text{ rad/s}} = 56.9\text{ N}\cdot\text{m}$$

(En el sistema inglés, estos pares son de 46.3 y 41.9 lb-pie, respectivamente.)

f) La eficiencia del motor en estas condiciones de operación es

$$\eta = \frac{P_{sal}}{P_{entr}} \times 100\%$$
$$= \frac{10\,485\text{ W}}{12\,530\text{ W}} \times 100\% = 83.7\%$$

6.5 CARACTERÍSTICA PAR-VELOCIDAD DE LOS MOTORES DE INDUCCIÓN

¿Cómo cambia el par de un motor de inducción conforme cambia la carga? ¿Cuánto par puede suministrar un motor de inducción en condiciones de arranque? ¿Cuánto se reduce la velocidad de un motor de inducción a medida que se incrementa la carga en su eje? Para encontrar las respuestas a estas preguntas y a otras similares, se deben entender claramente las relaciones entre el par, la velocidad y la potencia del motor.

A continuación se examinará primero la relación par-velocidad desde el punto de vista físico del comportamiento del campo magnético del motor. Luego se deducirá la ecuación general del par en función del deslizamiento a partir del circuito equivalente del motor de inducción (figura 6-12).

Par inducido desde el punto de vista físico

La figura 6-15*a*) muestra el rotor de jaula de un motor de inducción que opera inicialmente en vacío y, por lo tanto, muy cerca de su velocidad síncrona. El campo magnético neto $\mathbf{B}_{net}$ en esta máquina lo produce la corriente de magnetización $\mathbf{I}_M$ que fluye en el circuito equivalente del motor (véase la figura 6-12). La magnitud de la corriente de magnetización y, por consiguiente, de $\mathbf{B}_{net}$, es directamente proporcional al voltaje $\mathbf{E}_1$. Si $\mathbf{E}_1$ es constante, entonces el campo magnético neto en el motor es constante. En una máquina real, $\mathbf{E}_1$ varía conforme cambia la carga porque las impedancias del estator R_1 y X_1 causan caídas en el voltaje variable ante una carga variable. Sin embargo, estas caídas en los devanados del estator son relativamente pequeñas, por lo que $\mathbf{E}_1$ (y por lo tanto $\mathbf{I}_M$ y $\mathbf{B}_{net}$) es aproximadamente constante ante cambios en la carga.

La figura 6-15*a*) muestra el motor de inducción en vacío, en cuyo caso, el deslizamiento del rotor es muy reducido y por esto el movimiento relativo entre el rotor y los campos magnéticos es mínimo y también la frecuencia del rotor es muy pequeña. Puesto que el movimiento relativo es mínimo, el voltaje $\mathbf{E}_R$ inducido en las barras del rotor es muy reducido y el flujo de corriente resultante $\mathbf{I}_R$ es pequeño. Además, debido a que la frecuencia del rotor es tan pequeña, la reactancia del rotor

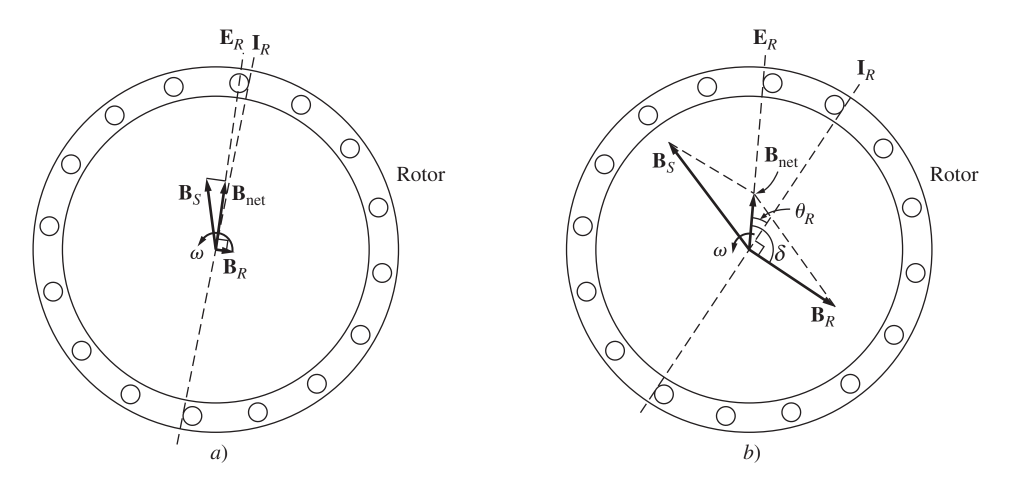


FIGURA 6-15 *a*) Campos magnéticos en un motor de inducción con cargas ligeras. *b*) Campos magnéticos en un motor de inducción con cargas pesadas.

es casi igual a cero y la corriente máxima del rotor $\mathbf{I}_R$ está casi en fase con el voltaje del rotor $\mathbf{E}_R$. Entonces, la corriente del rotor produce un pequeño campo magnético $\mathbf{B}_R$ con un ángulo un poco mayor a 90° por detrás del campo magnético neto $\mathbf{B}_{net}$. Nótese que la corriente del estator debe ser bastante grande incluso en vacío, puesto que debe alimentar la mayor parte de $\mathbf{B}_{net}$. (Ésta es la razón por la que los motores de inducción tienen grandes corrientes en vacío en comparación con otros tipos de máquinas.)

El par inducido, que mantiene girando al rotor, está dado por la ecuación

$$\tau_{ind} = k\mathbf{B}_R \times \mathbf{B}_{net} \tag{3-60}$$

Y su magnitud está dada por

$$\tau_{ind} = k\mathbf{B}_R \times \mathbf{B}_{net} \operatorname{sen} \delta \tag{3-61}$$

Puesto que el campo magnético del rotor es muy reducido, el par inducido también es bastante pequeño, pero lo suficientemente grande como para contrarrestar las pérdidas por rotación del motor.

Ahora supóngase que se carga el motor de inducción (figura 6-15*b*). Conforme se incrementa la carga del motor, aumenta su deslizamiento y se reduce la velocidad del rotor. Puesto que la velocidad del rotor es menor, *el movimiento relativo es mayor* entre el rotor y los campos magnéticos del estator de la máquina. Un mayor movimiento relativo produce un voltaje del rotor $\mathbf{E}_R$ más fuerte que a su vez genera una mayor corriente del rotor $\mathbf{I}_R$. Con una mayor corriente del rotor, también se incrementa el campo magnético del rotor $\mathbf{B}_R$. Sin embargo, el ángulo de la corriente del rotor y $\mathbf{B}_R$ también cambian. Puesto que el deslizamiento del rotor es mayor, la frecuencia del rotor aumenta ($f_r = sf_e$) y se incrementa la reactancia del rotor ($\omega_r L_R$). Por lo tanto, la corriente del rotor ahora está más retrasada en comparación con el voltaje del rotor, cuyo campo magnético se desplaza con la corriente. La figura 6-15*b*) muestra el motor de inducción en operación con una carga bastante grande. Nótese que se elevó la corriente del rotor y que se incrementó el ángulo δ. El aumento en B_R tiende a incrementar el par, mientras que el incremento del ángulo δ tiende a disminuir el par (τ_{ind} es proporcional a sen δ, y $\delta > 90°$). Puesto que el primer efecto es mayor que el segundo, el par inducido total se eleva para alimentar el incremento de carga del motor.

¿Cuándo alcanza un motor de inducción el par máximo? Esto sucede cuando se llega al punto en que, con un aumento de la carga en el eje, el término sen δ disminuye más de lo que B_R se incrementa. En este punto, con otro incremento en la carga disminuirá τ_{ind} y el motor se detendrá.

Se puede utilizar el conocimiento de los campos magnéticos de la máquina para deducir aproximadamente la característica de par de salida contra velocidad de un motor de inducción. Recuérdese que la magnitud del par inducido en la máquina está dada por

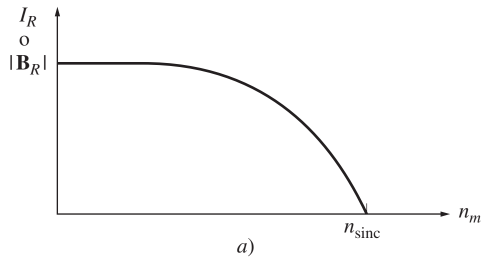
$$\tau_{ind} = kB_R B_{net} \operatorname{sen} \delta \tag{3-61}$$

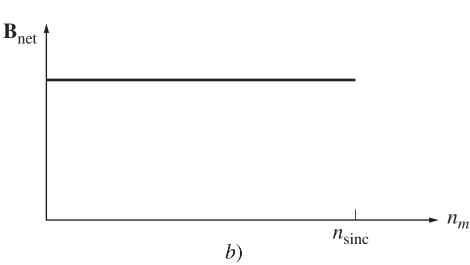
Cada término de esta expresión puede ser considerado por separado para deducir el comportamiento general de la máquina. Los términos individuales son:

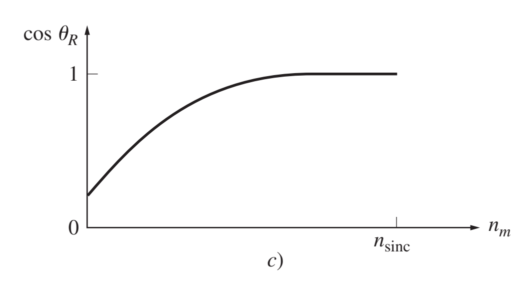
1. B_R. El campo magnético del rotor es directamente proporcional a la corriente que fluye en él siempre y cuando el rotor no esté saturado. El flujo de corriente en el rotor se eleva cuando se incrementa el deslizamiento (disminución de la velocidad) de acuerdo con la ecuación (6-13). En la figura 6-11 y también en la figura 6-16*a*) se muestra la gráfica del flujo de corriente.
2. B_{net}. El campo magnético neto en el motor es proporcional a E_1 y, por lo tanto, es aproximadamente constante (E_1 disminuye en realidad con un incremento del flujo de corriente, pero este efecto es bastante pequeño en comparación con los otros dos y se despreciará en este desarrollo gráfico). En la figura 6-16*b*) se muestra la curva de B_{net} y la velocidad.
3. sen δ. El ángulo δ entre los campos magnéticos del rotor y el neto se puede expresar de una manera muy útil. Obsérvese la figura 6-15*b*). En ella se ve claramente que *el ángulo δ es igual al ángulo del factor de potencia del rotor más* 90°:



$$\delta = \theta_R + 90° \tag{6-38}$$







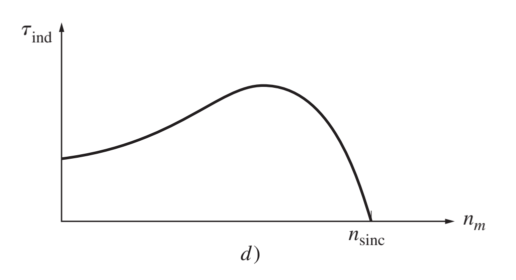


FIGURA 6-16 Desarrollo gráfico de la característica par-velocidad de un motor de inducción. *a*) Gráfica de la corriente del rotor (y por lo tanto de $|\mathbf{B}_R|$) y la velocidad de un motor de inducción; *b*) gráfica del campo magnético neto y la velocidad del motor; *c*) gráfica del factor de potencia del rotor y la velocidad del motor; *d*) característica par-velocidad resultante.

Por lo tanto, sen δ = sen (θ_R + 90°) = cos θ_R. Este término es el factor de potencia del rotor. El ángulo del factor de potencia del rotor se puede calcular con la ecuación

$$\theta_R = \tan^{-1}\frac{X_R}{R_R} = \tan^{-1}\frac{sX_{R0}}{R_R} \tag{6-39}$$

El factor de potencia del rotor resultante está dado por

$$\text{PF}_R = \cos\theta_R$$

$$\text{PF}_R = \cos\left(\tan^{-1}\frac{sX_{R0}}{R_R}\right) \tag{6-40}$$

En la figura 6-l6*c*) se muestra una gráfica del factor de potencia del rotor y la velocidad.

Puesto que el par inducido es proporcional al producto de estos tres términos, la característica par-velocidad de un motor de inducción se puede construir a partir de la multiplicación gráfica de las tres gráficas anteriores (figura 6-16*a*) a *c*). En la figura 6-16*d*) se muestra la característica par-velocidad de un motor de inducción calculada de esta manera.

La curva de esta característica se puede dividir aproximadamente en tres regiones. La primera es la *región de bajo deslizamiento*. En esta región, el deslizamiento del motor se incrementa de manera aproximadamente lineal conforme aumenta la carga y la velocidad mecánica del rotor disminuye de manera aproximadamente lineal con la carga. En esta región de operación la reactancia del rotor es despreciable, por lo que el factor de potencia del rotor es aproximadamente unitario, mientras que la corriente del rotor se incrementa en forma lineal con el desplazamiento. *Todo el intervalo de operación normal en estado estacionario de un motor de inducción se incluye en esta región de bajo deslizamiento*. Por lo tanto, en la operación normal, un motor de inducción tiene una caída de velocidad lineal.

La segunda región en la curva del motor de inducción se llama *región de deslizamiento moderado*. En esta región la frecuencia del rotor es más alta que antes y la reactancia del rotor tiene el mismo orden de magnitud que la resistencia del rotor. Además, la corriente del rotor ya no se incrementa tan rápidamente como antes y el factor de potencia comienza a disminuir. El par pico (el *par máximo*) del motor se presenta en el punto en que, ante un incremento gradual en la carga, el aumento en la corriente del rotor está perfectamente equilibrado con la disminución del factor de potencia del rotor.

La tercera región en la curva del motor de inducción se llama *región de alto deslizamiento*. En esta región, el par inducido en realidad disminuye ante un incremento de la carga, puesto que el aumento en la corriente del rotor no se percibe debido a la disminución del factor de potencia del rotor.

En un motor de inducción típico, el par máximo en la curva será de 200 a 250% del par nominal a plena carga de la máquina y el *par de arranque* (el par a velocidad cero) será de más o menos 150% del par a plena carga. A diferencia de un motor síncrono, el motor de inducción puede arrancar con plena carga adherida a su eje.

Deducción de la ecuación del par inducido en el motor de inducción

Se puede utilizar el circuito equivalente de un motor de inducción y el diagrama de flujo de potencia del motor para deducir una expresión general del par inducido en función de la velocidad. El par inducido en un motor de inducción está dado por la ecuación (6-35) o (6-36):

$$\tau_{\text{ind}} = \frac{P_{\text{conv}}}{\omega_m} \tag{6-35}$$

$$\tau_{\text{ind}} = \frac{P_{\text{EH}}}{\omega_{\text{sinc}}} \tag{6-36}$$

La última ecuación es especialmente útil, puesto que la velocidad síncrona es constante para una frecuencia y número de polos dados. Puesto que ω_{sinc} es constante, el conocimiento de la potencia en el entrehierro permite hallar el par inducido en el motor.

La potencia en el entrehierro es la potencia que cruza el espacio entre el circuito del estator y el circuito del rotor. Es igual a la potencia que absorbe la resistencia R_2/s. ¿Cómo se puede encontrar el valor de esta potencia?

Remítase al circuito equivalente de la figura 6-17. En ella se puede ver que la potencia en el entrehierro que se suministra a una fase del motor es

$$P_{\text{EH},1\phi} = I_2^2 \frac{R_2}{s}$$

Por lo tanto, la potencia total en el entrehierro es

$$P_{\text{EH}} = 3I_2^2 \frac{R_2}{s}$$

Si se puede determinar I_2, entonces se conocen la potencia en el entrehierro y el par inducido.

FIGURA 6-17 Circuito equivalente por fase de un motor de inducción.

Aun cuando hay muchas maneras de resolver el circuito de la figura 6-17 para calcular la corriente I_2, posiblemente la más fácil es determinar el equivalente de Thevenin de la porción del circuito a la derecha de las X en la figura. El teorema de Thevenin dice que cualquier circuito lineal que se pueda separar del resto del sistema en dos terminales, se puede reemplazar por una sola fuente de voltaje conectada en serie con una impedancia equivalente. Si se aplicara este teorema al circuito equivalente del motor de inducción, el circuito resultante sería una simple combinación en serie de elementos, como se muestra en la figura 6-18*c*).

Para calcular el equivalente de Thevenin del lado de entrada del circuito equivalente del motor de inducción, primero se abren los terminales de las X y se encuentra el voltaje de circuito abierto resultante presente en ese lugar. Luego, para encontrar la impedancia de Thevenin, se hace cortocircuito el voltaje de fase y se encuentra la Z_{eq} "mirando" hacia adentro de los terminales.

La figura 6-18*a*) muestra los terminales abiertos que se utilizaron para encontrar el voltaje de Thevenin. De la regla del divisor de voltaje se tiene:

$$\mathbf{V}_{TH} = \mathbf{V}_{\phi} \frac{Z_M}{Z_M + Z_1}$$

$$= \mathbf{V}_{\phi} \frac{jX_M}{R_1 + jX_1 + jX_M}$$

La magnitud del voltaje de Thevenin $\mathbf{V}_{TH}$ es

$$V_{TH} = V_{\phi} \frac{X_M}{\sqrt{R_1^2 + (X_1 + X_M)^2}} \quad \textbf{(6-41a)}$$

$$\mathbf{V}_{TH} = \frac{jX_M}{R_1 + jX_1 + jX_M} \mathbf{V}_{\phi}$$

$$V_{TH} = \frac{X_M}{\sqrt{R_1{}^2 + (X_1 + X_M)^2}} V_{\phi}$$

a)

$$Z_{TH} = \frac{jX_M (R_1 + jX_1)}{R_1 + j(X_1 + X_M)}$$

b)

c)

FIGURA 6-18 *a*) Voltaje equivalente de Thevenin del circuito de entrada de un motor de inducción. *b*) Impedancia equivalente de Thevenin del circuito de entrada. *c*) Circuito equivalente resultante simplificado de un motor de inducción.

Puesto que la reactancia de magnetización $X_M \gg X_1$ y $X_M \gg R_1$, la magnitud del voltaje de Thevenin es aproximadamente

$$V_{TH} \approx V_\phi \frac{X_M}{X_1 + X_M} \tag{6-41b}$$

con un alto grado de exactitud.

La figura 6-18*b*) muestra el circuito de entrada con el voltaje de entrada en cortocircuito. Las dos impedancias están en paralelo y la impedancia de Thevenin está dada por

$$Z_{TH} = \frac{Z_1 Z_M}{Z_1 + Z_M} \tag{6-42}$$

Esta impedancia se reduce a

$$Z_{TH} = R_{TH} + jX_{TH} = \frac{jX_M(R_1 + jX_1)}{R_1 + j(X_1 + X_M)} \tag{6-43}$$

Puesto que $X_M \gg X_1$ y $X_M + X_1 \gg R_1$, la resistencia y reactancia de Thevenin están dadas aproximadamente por

$$R_{TH} \approx R_1\left(\frac{X_M}{X_1 + X_M}\right)^2 \tag{6-44}$$

$$X_{TH} \approx X_1 \tag{6-45}$$

El circuito equivalente resultante se muestra en la figura 6-18*c*). En este circuito, la corriente $\mathbf{I}_2$ está dada por

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{V}_{TH}}{Z_{TH} + Z_2} \tag{6-46}$$

$$= \frac{\mathbf{V}_{TH}}{R_{TH} + R_2/s + jX_{TH} + jX_2} \tag{6-47}$$

La magnitud de esta corriente es

$$I_2 = \frac{V_{TH}}{\sqrt{(R_{TH} + R_2/s)^2 + (X_{TH} + X_2)^2}} \tag{6-48}$$

Por lo tanto, la potencia en el entrehierro está dada por

$$P_{EH} = 3I_2^2 \frac{R_2}{s}$$

$$= \frac{3V_{TH}^2 R_2/s}{(R_{TH} + R_2/s)^2 + (X_{TH} + X_2)^2} \tag{6-49}$$

y el par inducido del rotor está dado por

$$\tau_{ind} = \frac{P_{EH}}{\omega_{sinc}}$$

$$\tau_{ind} = \frac{3V_{TH}^2 R_2/s}{\omega_{sinc}[(R_{TH} + R_2/s)^2 + (X_{TH} + X_2)^2]} \tag{6-50}$$

En la figura 6-19 se observa la gráfica del par de un motor de inducción en función de la velocidad (y deslizamiento), y en la figura 6-20 se muestra una gráfica de las velocidades por arriba y por debajo del intervalo normal del motor.

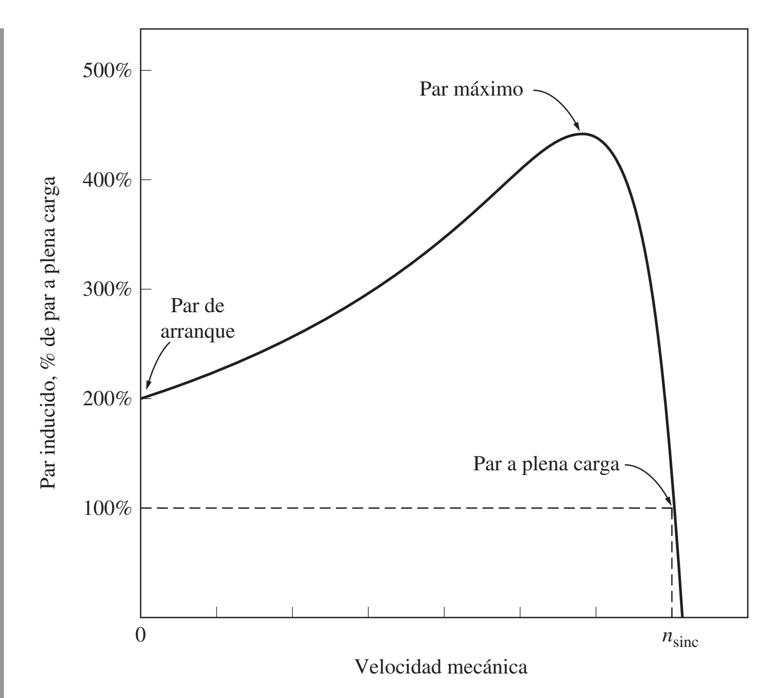


FIGURA 6-19 Curva característica par-velocidad de un motor de inducción típico.

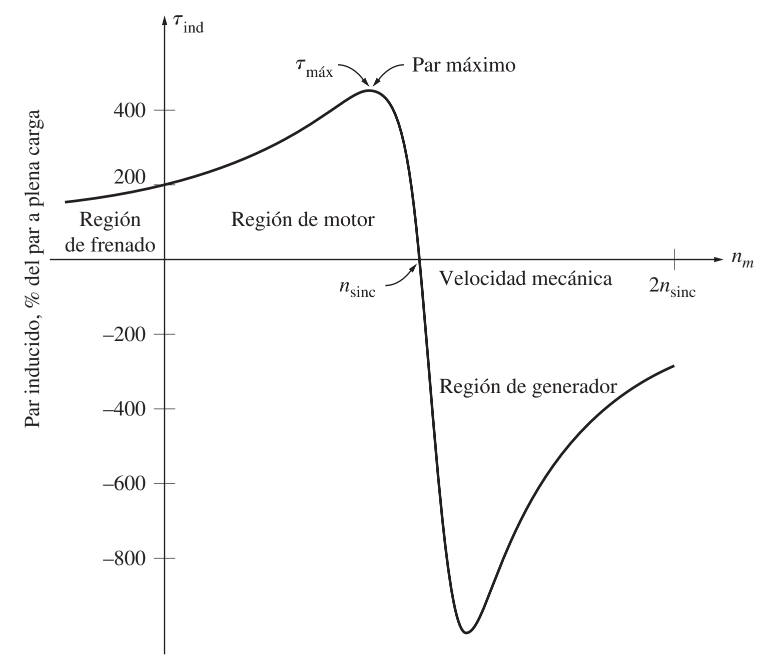


FIGURA 6-20 Curva característica par-velocidad de un motor de inducción que muestra los intervalos extendidos de operación (región de frenado y región de generador).

Comentarios sobre la curva par-velocidad del motor de inducción

La curva característica par-velocidad del motor de inducción que se muestra en las figuras 6-19 y 6-20 brinda varios elementos importantes de información sobre la operación de los motores de inducción. Esta información se resume a continuación:

1. El par inducido del motor es cero a velocidad síncrona. Este hecho ya se analizó.
2. La curva par-velocidad es casi lineal entre vacío y plena carga. En este intervalo, la resistencia del rotor es mucho más grande que la reactancia, por lo que la corriente del rotor, su campo magnético y el par inducido aumentan linealmente conforme aumenta el deslizamiento.
3. Hay un par máximo posible que no se puede exceder. Este par, llamado *par máximo* o *par de desviación*, es dos o tres veces el par nominal a plena carga del motor. La siguiente sección de este capítulo contiene un método para calcular el par máximo.
4. El par de arranque del motor es un poco mayor que el par a plena carga, por lo que este motor puede arrancar con cualquier carga que pueda alimentar a plena potencia.
5. Nótese que el par del motor, dado cierto deslizamiento, varía con el cuadrado del voltaje aplicado. Este hecho es útil para una forma de control de velocidad de los motores de inducción que se describirá más adelante.
6. Si la velocidad del rotor del motor de inducción es mayor que la velocidad síncrona, se invierte la dirección del par inducido en la máquina y ésta se convierte en *generador*, que transforma potencia mecánica en potencia eléctrica. Más adelante se describirá el uso de motores de inducción como generadores.
7. Si el motor gira en sentido contrario en relación con la dirección de los campos magnéticos, el par inducido en la máquina la detendrá rápidamente y tratará de hacerla girar en la otra dirección. Puesto que invertir la dirección de rotación de un campo magnético es sólo cuestión de conmutar dos fases del estator, este hecho se puede utilizar para detener con rapidez un motor de inducción. La acción de conmutar dos fases para detener con prontitud el motor se llama *frenado por contracorriente*.

La potencia convertida a su forma mecánica en un rotor de inducción es igual a

$$P_{\text{conv}} = \tau_{\text{ind}}\omega_M$$

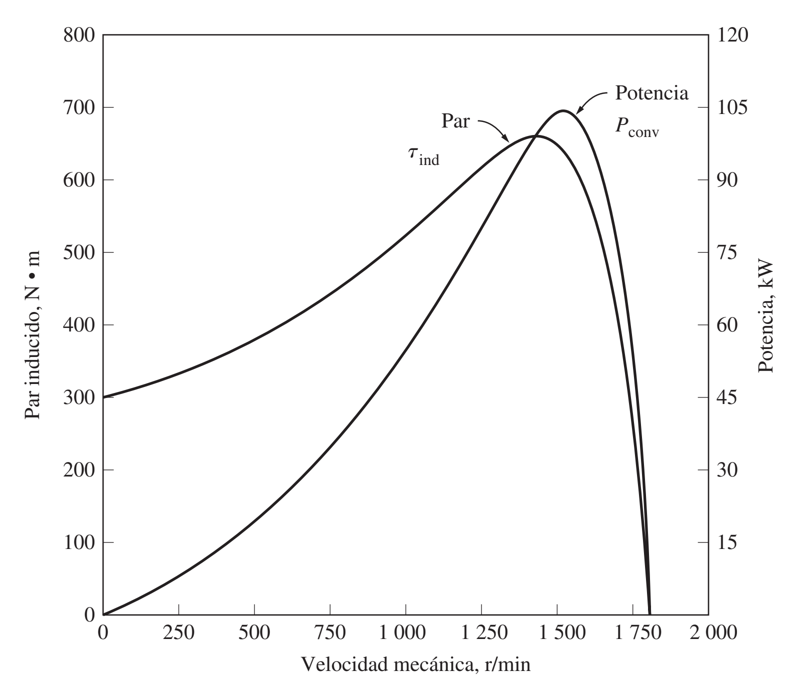


FIGURA 6-21 Par inducido y potencia convertida contra la velocidad del motor en revoluciones por minuto como ejemplo de un motor de inducción con cuatro polos.

y su gráfica se muestra en la figura 6-21. Nótese que la potencia pico que suministra el motor de inducción se presenta en una velocidad diferente a la del par máximo; y, por supuesto, cuando el rotar tiene una velocidad igual a cero no se convierte potencia a su forma mecánica.

Par máximo (par de desviación) en un motor de inducción

Puesto que el par inducido es igual a P_{EH}/ω_{sinc}, el par máximo posible se presenta cuando la potencia en el entrehierro es máxima. Puesto que la potencia en el entrehierro es igual a la potencia consumida por el resistor R_2/s, el *par máximo inducido se presentará cuando la potencia consumida por este resistor sea máxima*.

¿Cuándo es máxima la potencia suministrada a R_2/s? Remítase al circuito equivalente simplificado de la figura 6-18*c*). En una situación donde el ángulo de la impedancia de la carga es fijo, el teorema de máxima transferencia de potencia dice que la potencia máxima que se transfiere al resistor de la carga R_2/s se presentará cuando la *magnitud* de esta impedancia sea igual a la *magnitud* de la impedancia de la fuente. La impedancia equivalente de la fuente en el circuito es

$$Z_{fuente} = R_{TH} + jX_{TH} + jX_2 \tag{6-51}$$

por lo que la potencia máxima de transferencia se presenta cuando

$$\frac{R_2}{s} = \sqrt{R_{TH}^2 + (X_{TH} + X_2)^2} \tag{6-52}$$

Si se resuelve la ecuación (6-52) para el deslizamiento, se puede ver que *el deslizamiento para el par máximo está dado por*

$$s_{máx} = \frac{R_2}{\sqrt{R_{TH}^2 + (X_{TH} + X_2)^2}} \tag{6-53}$$

Nótese que la resistencia del rotor R_2 sólo aparece en el numerador, por lo que el deslizamiento del rotor para el par máximo es directamente proporcional a la resistencia del rotor.

El valor del par máximo se puede encontrar insertando la expresión del deslizamiento del par máximo en la ecuación del par [ecuación (6-50)]. La ecuación resultante del par máximo es

$$\tau_{máx} = \frac{3V_{TH}^2}{2\omega_{sinc}[R_{TH} + \sqrt{R_{TH}^2 + (X_{TH} + X_2)^2}]} \tag{6-54}$$

Este par es proporcional al cuadrado del voltaje suministrado y también está inversamente relacionado con el tamaño de las impedancias del estator y de la reactancia del rotor. Mientras más pequeñas sean las reactancias de la máquina, mayor será el par máximo que es capaz de alcan-

zar. Nótese que el *deslizamiento* que presenta el par máximo es directamente proporcional a la resistencia del rotor [ecuación (6-53)], pero el *valor* del par máximo es independiente del valor de la resistencia del rotor [ecuación (6-54)].

En la figura 6-22 se muestra la característica par-velocidad de un motor de inducción con rotor devanado. Recuérdese que es posible insertar resistencia en el circuito de un rotor devanado porque el circuito del rotor sale al estator a través de los anillos rozantes. En la figura se puede ver que a medida que se incrementa la resistencia del rotor, la velocidad del par máximo del motor disminuye, pero el par máximo permanece constante.

Es posible sacar ventaja de esta característica del motor de inducción con rotor devanado para arrancar cargas muy pesadas. Si se inserta una resistencia en el circuito del rotor, se puede ajustar el par máximo para que se presente en el arranque. Por lo tanto, el par máximo posible estaría disponible para arrancar cargas pesadas. Por otro lado, una vez que la carga gira, la resistencia extra se puede eliminar del circuito y el par máximo se acelerará hasta llegar casi a la velocidad síncrona de la operación normal.

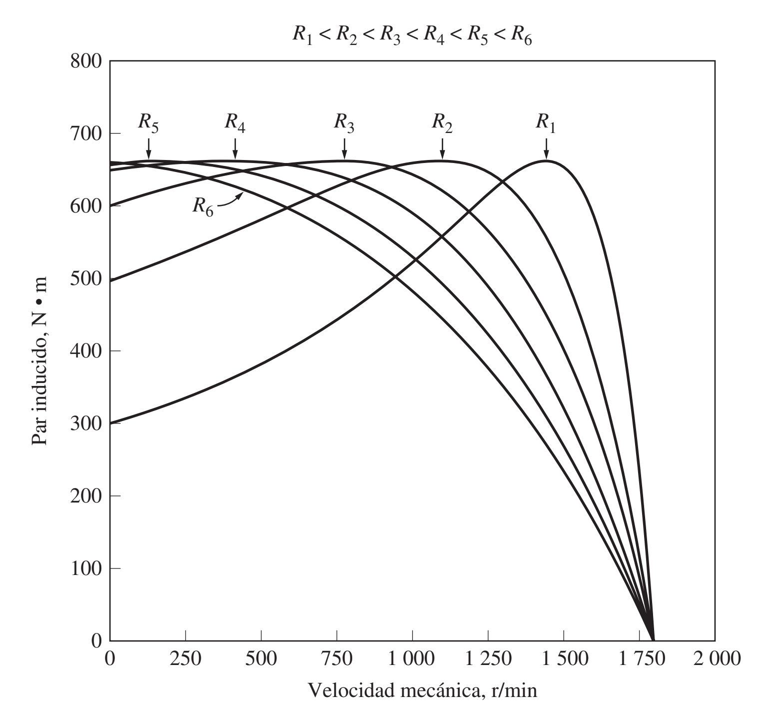


FIGURA 6-22 Efecto del cambio de la resistencia del rotor en la característica par-velocidad de un motor de inducción con rotor devanado.

EJEMPLO 6-4

Un motor de inducción con dos polos y 50 Hz suministra 15 kW a una carga a una velocidad de 2 950 r/min.

a) ¿Cuál es el deslizamiento del motor?
b) ¿Cuál es el par inducido en el motor en N • m en estas condiciones?
c) ¿Cuál es la velocidad de operación del motor si se duplica el par?
d) ¿Cuánta potencia suministra el motor cuando se duplica el par?

Solución

a) La velocidad síncrona del motor es

$$n_{\text{sinc}} = \frac{120 f_e}{P} = \frac{120(50\text{ Hz})}{2\text{ polos}} = 3\,000\text{ r/min}$$

Por lo tanto, el deslizamiento del motor es

$$s = \frac{n_{\text{sinc}} - n_m}{n_{\text{sinc}}}(\times 100\%) \qquad \textbf{(6-4)}$$

$$= \frac{3\,000\text{ r/min} - 2\,950\text{ r/min}}{3\,000\text{ r/min}}(\times 100\%)$$

$$= 0.0167 \text{ o } 1.67\%$$

b) Se debe suponer que el par inducido en el motor es igual al par de carga y también que P_{conv} es igual a P_{carga}, puesto que no se asignó valor alguno a las pérdidas mecánicas. Entonces, el par es

$$\tau_{\text{ind}} = \frac{P_{\text{conv}}}{\omega_m}$$

$$= \frac{15\text{ kW}}{(2\,950\text{ r/min})(2\pi\text{ rad/r})(1\text{ min}/60\text{ s})}$$

$$= 48.6\text{ N} \bullet \text{m}$$

c) En la región de bajo deslizamiento, la curva par-velocidad es lineal y el par inducido es directamente proporcional al deslizamiento. Por lo tanto, si se duplica el par, entonces el nuevo deslizamiento será de 3.33%. Entonces, la velocidad de operación del motor es

$$n_m = (1 - s)n_{\text{sinc}} = (1 - 0.0333)(3\,000 \text{ r/min}) = 2\,900 \text{ r/min}$$

d) La potencia que suministra el motor está dada por

$$\begin{aligned} P_{\text{conv}} &= \tau_{\text{ind}}\omega_m \\ &= (97.2 \text{ N} \cdot \text{m})(2\,900 \text{ r/min})(2\pi \text{ rad/r})(1 \text{ min/60 s}) \\ &= 29.5 \text{ kW} \end{aligned}$$

EJEMPLO 6-5

Un motor de inducción con rotor devanado de 460 V, 25 hp, 60 Hz, con cuatro polos, conectado en Y, tiene las siguientes impedancias en ohms por fase referidas al circuito del estator:

$$\begin{aligned} R_1 &= 0.641\ \Omega \qquad R_2 = 0.332\ \Omega \\ X_1 &= 1.106\ \Omega \qquad X_2 = 0.464\ \Omega \qquad X_M = 26.3\ \Omega \end{aligned}$$

a) ¿Cuál es el par máximo de este motor? ¿A qué velocidad y deslizamiento se presenta?
b) ¿Cuál es el par de arranque del motor?
c) ¿Cuándo se duplica la resistencia del rotor? ¿Cuál es la velocidad en que se presenta ahora el par máximo? ¿Cuál es el nuevo par de arranque del motor?
d) Calcule y haga la gráfica de la característica par-velocidad del motor tanto con la resistencia del rotor original como con la resistencia del rotor al doble.

Solución

El voltaje Thevenin del motor es

$$V_{\text{TH}} = V_\phi \frac{X_M}{\sqrt{R_1^2 + (X_1 + X_M)^2}} \tag{6-41a}$$

$$= \frac{(266 \text{ V})(26.3\ \Omega)}{\sqrt{(0.641\ \Omega)^2 + (1.106\ \Omega + 26.3\ \Omega)^2}} = 255.2 \text{ V}$$

La resistencia Thevenin es

$$R_{\text{TH}} \approx R_1 \left(\frac{X_M}{X_1 + X_M}\right)^2 \tag{6-44}$$

$$\approx (0.641\ \Omega)\left(\frac{26.3\ \Omega}{1.106\ \Omega + 26.3\ \Omega}\right)^2 = 0.590\ \Omega$$

La reactancia Thevenin es

$$X_{\text{TH}} \approx X_1 = 1.106\ \Omega$$

a) El deslizamiento al cual ocurre el par máximo está dada por la ecuación (6-53):

$$s_{\text{máx}} = \frac{R_2}{\sqrt{R_{\text{TH}}^2 + (X_{\text{TH}} + X_2)^2}} \tag{6-53}$$

$$= \frac{0.332\ \Omega}{\sqrt{(0.590\ \Omega)^2 + (1.106\ \Omega + 0.464\ \Omega)^2}} = 0.198$$

Esto corresponde a una velocidad mecánica de

$$n_m = (1 - s)n_{\text{sinc}} = (1 - 0.198)(1\,800 \text{ r/min}) = 1\,444 \text{ r/min}$$

El par a esta velocidad es

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{3V_{\text{TH}}^2}{2\omega_{\text{sinc}}\left[R_{\text{TH}} + \sqrt{R_{\text{TH}}^2 + (X_{\text{TH}} + X_2)^2}\right]} \tag{6-54}$$

$$= \frac{3(255.2 \text{ V})^2}{2(188.5 \text{ rad/s})[0.590\ \Omega + \sqrt{(0.590\ \Omega)^2 + (1.106\ \Omega + 0.464\ \Omega)^2}]}$$

$$= 229 \text{ N} \bullet \text{m}$$

b) El par de arranque del motor se encuentra estableciendo $s = 1$ en la ecuación (6-50):

$$\tau_{\text{arranque}} = \frac{3V_{\text{TH}}^2 R_2}{\omega_{\text{sinc}}[(R_{\text{TH}} + R_2)^2 + (X_{\text{TH}} + X_2)^2]}$$

$$= \frac{3(255.2 \text{ V})^2(0.332\ \Omega)}{(188.5 \text{ rad/s})[(0.590\ \Omega + 0.332\ \Omega)^2 + (1.106\ \Omega + 0.464\ \Omega)^2]}$$

$$= 104 \text{ N} \bullet \text{m}$$

c) Si se duplica la resistencia del rotor, entonces se duplica también el desplazamiento al cual se presenta el par máximo. Por lo tanto,

$$s_{\text{máx}} = 0.396$$

y la velocidad con el par máximo es

$$n_m = (1 - s)n_{\text{sinc}} = (1 - 0.396)(1\ 800 \text{ r/min}) = 1\ 087 \text{ r/min}$$

El par máximo sigue siendo

$$\tau_{\text{máx}} = 229 \text{ N} \bullet \text{m}$$

El par de arranque ahora es

$$\tau_{\text{arranque}} = \frac{3(255.2 \text{ V})^2(0.664\ \Omega)}{(188.5 \text{ rad/s})[(0.590\ \Omega + 0.664\ \Omega)^2 + (1.106\ \Omega + 0.464\ \Omega)^2]}$$

$$= 170 \text{ N} \bullet \text{m}$$

d) Se creará un archivo M de MATLAB para calcular y hacer una gráfica de la característica par-velocidad del motor tanto con la resistencia del rotor original como con la resistencia del rotor al doble. El archivo M calculará la impedancia de Thevenin con las ecuaciones exactas de V_{TH} y Z_{TH} [ecuaciones (6-41*a*) y (6-43)] en lugar de las ecuaciones aproximadas, puesto que la computadora puede realizar fácilmente las operaciones exactas. Luego calculará el par inducido con la ecuación (6-50) y hará una gráfica con los resultados. El archivo M resultante se muestra a continuación:

```
% Archivo M: torque_speed_curve.m
% Archivo M para crear una gráfica de la curva par-velocidad del
% motor de inducción del ejemplo 6-5.

% Primero, inicializar los valores requeridos en el programa.
r1 = 0.641;                        % Resistencia del estator
x1 = 1.106;                        % Reactancia del estator
r2 = 0.332;                        % Resistencia del rotor
x2 = 0.464;                        % Reactancia del rotor
xm = 26.3;                         % Reactancia de la rama de magnetización
v_phase = 460 / sqrt(3);           % Voltaje de fase
n_sync = 1800;                     % Velocidad síncrona (r/min)
w_sync = 188.5;                    % Velocidad síncrona (rad/s)

% Calcular el voltaje e impedancia de las
% ecuaciones 6-41a y 6-43.
v_th = v_phase * ( xm / sqrt(r1^2 + (xl + xm)^2) );
```

```
z_th = ((j*xm) * (r1 + j*x1)) / (r1 + j* (x1 + xm));
r_th = real (z_th);
x th = imag(z_th);

% Ahora calcular la característica par-velocidad para muchos
% deslizamientos entre 0 y 1. Nótese que el primer valor de
% deslizamiento será 0.001 en lugar de 0 exactamente para evitar
% problemas con
% la división entre 0.
s = (0:1:50) / 50;                 % Deslizamiento
s(1) = 0.001;
nm = (1 - s) * n_sync;             % Velocidad mecánica

% Calcular el par para la resistencia del rotor original
for ii = 1:51
  t_ind1(ii) = (3 * v_th^2 * r2 / s(ii)) / ...
          (w_sync * (r_th + r2/s(ii))^2 + (x_th + x2)^2) );
end

% Calcular el par para la resistencia del rotor al doble
for ii = 1:51
  t_ind2(ii) = (3 * v_th^2 * (2*r2) / s(ii)) / ...
          (w_sync * ((r_th + (2*r2)/s(ii))^2 + (x_th + x2)^2) );
end

% Hacer la gráfica de la curva par-velocidad
plot(nm,t_ind1, 'Color', 'k', 'LineWidth',2.0);
hold on;
plot(nm,t_ind2,'Color','k','LineWidth',2.0,'LineStyle','-.');  xlabel('\bf\itn_
{m};
ylabel('\bf\tau_{ind};
title ('\bf Característica par-velocidad de un motor de inducción');
legend ('R_{2) original', 'R_{2} duplicada');
grid on;
hold off;
```

En la figura 6-23 se muestra la característica par-velocidad resultante. Nótese que los valores del par pico y del par de arranque en las curvas son iguales a los que se obtuvieron del inciso *a*) al *c*). Además, nótese que el par de arranque del motor se eleva conforme se incrementa R_2.

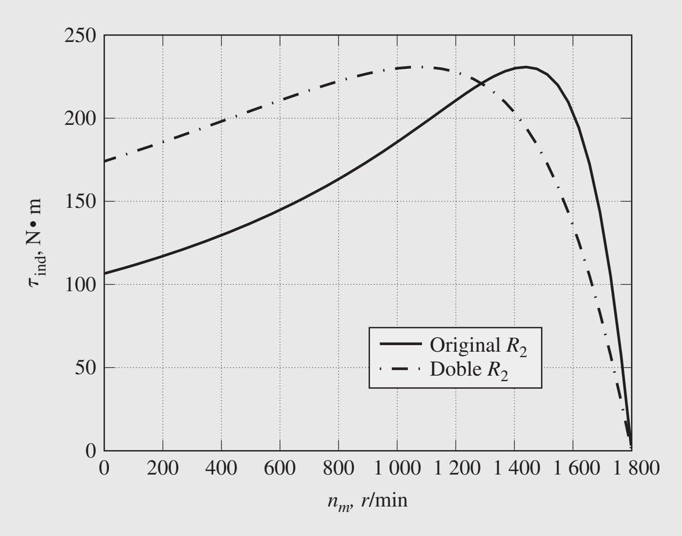


FIGURA 6-23 Características par-velocidad del motor del ejemplo 6-5.

6.6 VARIACIONES EN LAS CARACTERÍSTICAS PAR-VELOCIDAD DEL MOTOR DE INDUCCIÓN

La sección 6.5 contiene la deducción de la característica par-velocidad de un motor de inducción. De hecho, se mostraron varias curvas de la característica, dependiendo de la resistencia del rotor. El ejemplo 6-5 ilustra el dilema de un diseñador de motores de inducción: si se diseña un rotor con alta resistencia, entonces el par de arranque del motor es bastante alto, pero el deslizamiento también es bastante alto en condiciones normales de operación. Recuérdese que $P_{\text{conv}} = (1 - s)P_{\text{EH}}$, de tal manera que *mientras más grande sea el deslizamiento, menor será la fracción de potencia en el entrehierro que en realidad se convierte a su forma mecánica*, y entonces menor será la eficiencia del motor. Un motor con una alta resistencia del rotor tiene un buen par de arranque pero una eficiencia pobre en condiciones normales de operación. Por otro lado, un motor con una baja resistencia del rotor tiene un par de arranque bajo y una corriente de arranque alta, pero su eficiencia en condiciones normales de operación es bastante alta. El diseñador de motores de inducción se ve forzado a elegir entre estos requerimientos en conflicto de un alto par de arranque y una buena eficiencia.

En la sección 6.5 se sugirió una solución posible para superar este problema: utilizar un motor de inducción con rotor devanado e insertar resistencia extra en el rotor durante el arranque. Esta resistencia extra se puede eliminar por completo durante la operación normal para mejorar la eficiencia. Desafortunadamente, los motores con rotores devanados son más caros, necesitan más mantenimiento y requieren un circuito de control automático mucho más complejo que los motores con rotores de jaula de ardilla. Además, a veces es importante sellar por completo el motor cuando se ubica en un ambiente peligroso o explosivo, lo que se logra de manera más fácil con un rotor de una sola pieza. Sería bueno encontrar alguna forma de añadir una resistencia extra del rotor en el arranque y de retirarla durante la operación normal sin anillos corredizos y *sin intervención de un operador o de un circuito de control*.

En la figura 6-24 se observan las características del motor deseado. Esta figura muestra dos características de un motor con rotor devanado, una con alta resistencia y otra con baja resistencia. Si los deslizamientos son altos, el motor deseado se debería comportar de acuerdo con la curva de un motor con rotor devanado de alta resistencia; si los deslizamientos son pequeños, se debería comportar de acuerdo con la curva de un motor con rotor devanado de baja resistencia.

Afortunadamente, es posible lograr este efecto aprovechando la ventaja de *la reactancia de dispersión* en el diseño del rotor de los motores de inducción.

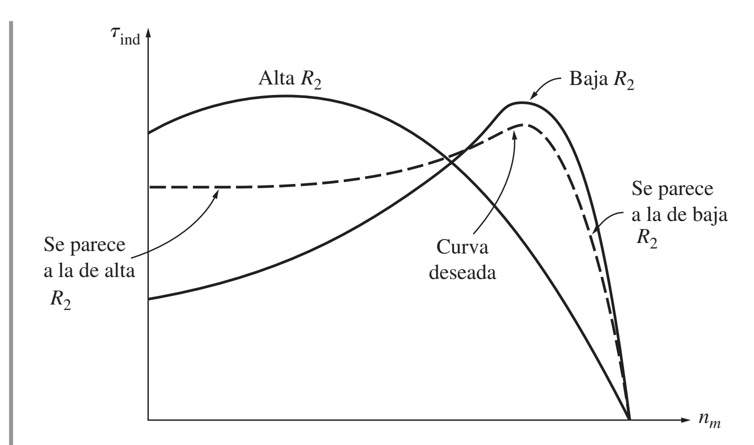


FIGURA 6-24 Curva característica par-velocidad que combina los efectos de alta resistencia a bajas velocidades (deslizamiento alto) con efectos de baja resistencia a altas velocidades (deslizamiento bajo).

Control de las características del motor mediante el diseño del rotor de jaula de ardilla

En el circuito equivalente de un motor de inducción, la reactancia X_2 representa la forma referida de la reactancia de dispersión del rotor. Recuérdese que la reactancia de dispersión se debe a las líneas de flujo del rotor que no se acoplan con los devanados del estator. En general, mientras más lejos del rotor se encuentre la barra o parte de la barra del rotor, mayor será la reactancia de dispersión, puesto que un menor porcentaje del flujo de la barra llegará al estator. Por lo tanto, si las barras de un rotor de jaula de ardilla se ubican cerca de la superficie del rotor, tendrán sólo un pequeño flujo disperso y la reactancia X_2 será pequeña en el circuito equivalente. Por otro lado, si las barras del

rotor se ubican más adentro de la superficie del rotor, habrá más dispersión y será mayor la reactancia del rotor X_2.

Por ejemplo, en la figura 6-25*a*) se puede ver la fotografía de un rotor laminado que muestra la sección transversal de las barras en el rotor, que en la figura son bastante grandes y están ubicadas cerca de la superficie del rotor. Este diseño tiene una baja resistencia (debido a su gran sección transversal) y una baja reactancia de dispersión y X_2 (debido a la ubicación de las barras cerca del estator). En función de la baja resistencia del rotor, el par máximo será muy cercano a la velocidad síncrona [véase ecuación (6-53)] y el motor será bastante eficiente. Recuérdese que

$$P_{\text{conv}} = (1 - s)P_{\text{EH}} \tag{6-33}$$

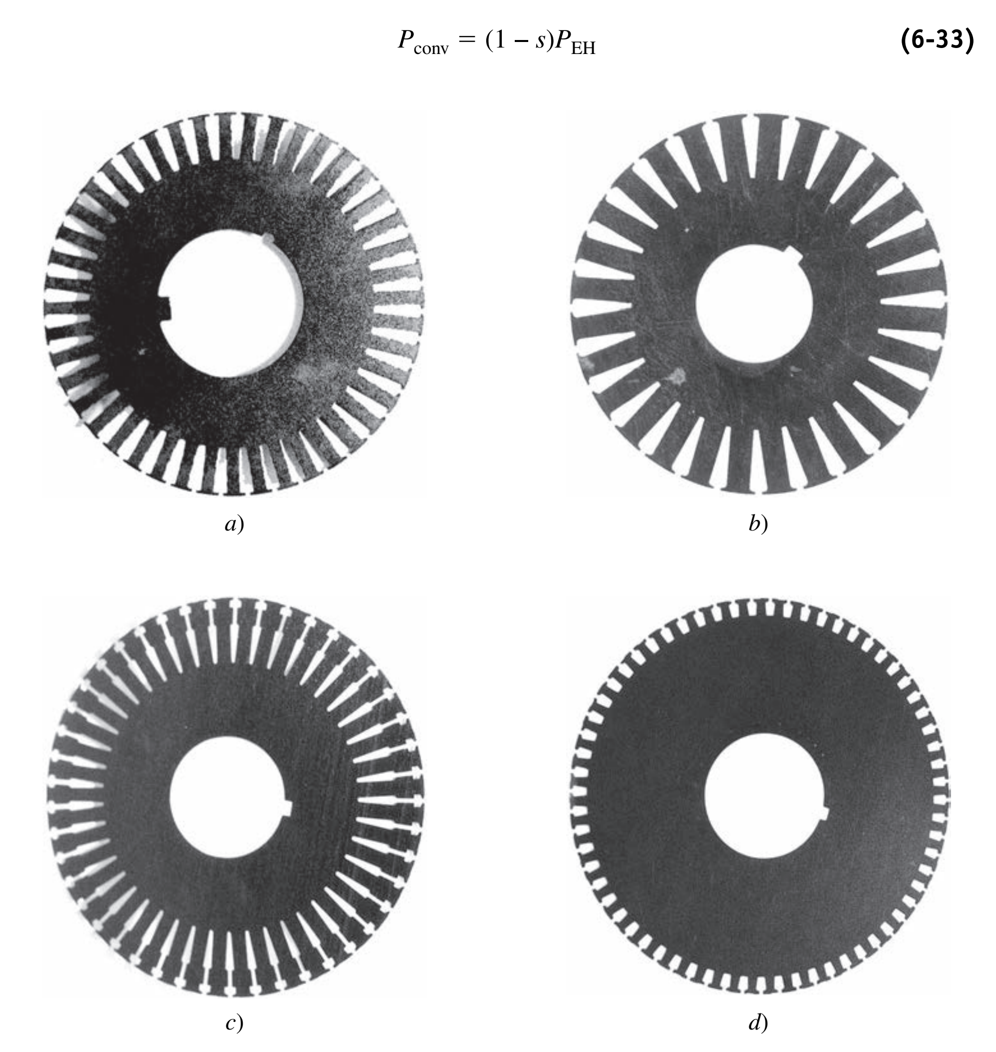


FIGURA 6-25 Laminados de rotores de jaula de motor de inducción típicos que muestran la sección transversal de las barras del rotor: *a*) diseño NEMA clase A, barras largas cerca de la superficie; *b*) diseño NEMA clase B, barras de rotor profundas y largas; *c*) diseño NEMA clase C, diseño de rotor de doble jaula; *d*) diseño NEMA clase D, barras pequeñas cerca de la superficie. (*Cortesía de MagneTek, Inc.*)

por lo que se perderá muy poca potencia en el entrehierro en la resistencia del rotor. Sin embargo, ya que R_2 es pequeño, el par de arranque del motor será pequeño y la corriente de arranque será alta. Este tipo de diseño se llama diseño clase A de la National Electrical Manufacturers Association (NEMA). Es más o menos igual a un motor de inducción típico y sus características son básicamente las mismas que las de un motor con rotor devanado sin resistencia extra. En la figura 6-26 se puede observar su característica par-velocidad.

La figura 6-25*d*) muestra la sección transversal del rotor de un motor de inducción con barras *pequeñas* ubicadas cerca de la superficie del rotor. Puesto que el área de la sección transversal de las barras es pequeña, la resistencia del estator es relativamente alta. Debido a que las barras están

ubicadas cerca del estator, la reactancia de dispersión del rotor aún es pequeña. Este motor se parece mucho a un motor de inducción con rotor devanado con resistencia extra en el rotor. Debido a esta gran resistencia, este motor tiene un par máximo que ocurre con un gran deslizamiento, y su par de arranque es bastante alto. Un motor de jaula de ardilla con este tipo de rotor se llama diseño clase D de NEMA. En la figura 6-26 se muestra su característica par-velocidad.

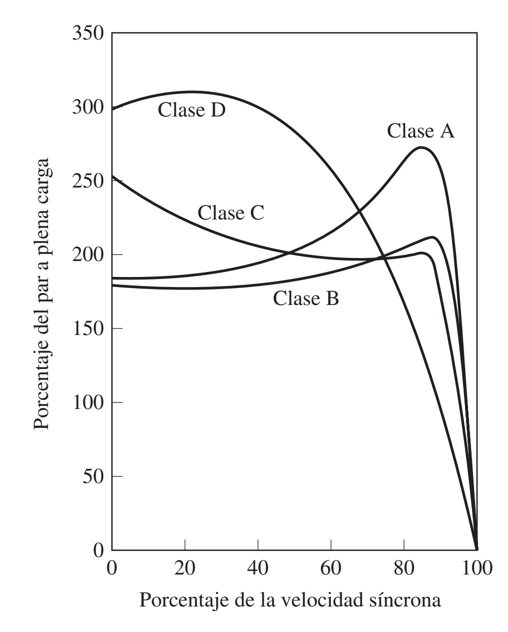


FIGURA 6-26 Curvas par-velocidad típicas para los diferentes diseños de rotor.

Diseños de rotores de barra profunda y de doble jaula

Los dos diseños de rotores descritos con anterioridad son esencialmente iguales a los motores con rotor devanado con un conjunto de resistencia de rotor. ¿Cómo se puede producir una resistencia de rotor *variable* para combinar un par de arranque alto con una corriente de arranque baja del diseño clase D con el bajo deslizamiento en operación normal y alta eficiencia del diseño clase A?

Se puede producir una resistencia variable de rotor al utilizar barras profundas de rotor o rotores de doble jaula. En la figura 6-27 se ilustra este concepto básico con un rotor de barra profunda. En la figura 6-27*a*) se muestra una corriente que fluye a través de la parte superior de la barra profunda de un rotor. Puesto que la corriente que fluye en esta área está fuertemente acoplada al estator, la inductancia de dispersión es pequeña en esta región. En la figura 6-27*b*) se puede ver la corriente que fluye de la parte más profunda de la barra. Aquí es mayor la inductancia de dispersión. Puesto que todas las partes de la barra del rotor están en paralelo eléctricamente, la barra representa en esencia una serie de circuitos eléctricos en paralelo, los superiores tienen una inductancia menor y los inferiores tienen una inductancia más grande (figura 6-27*c*).

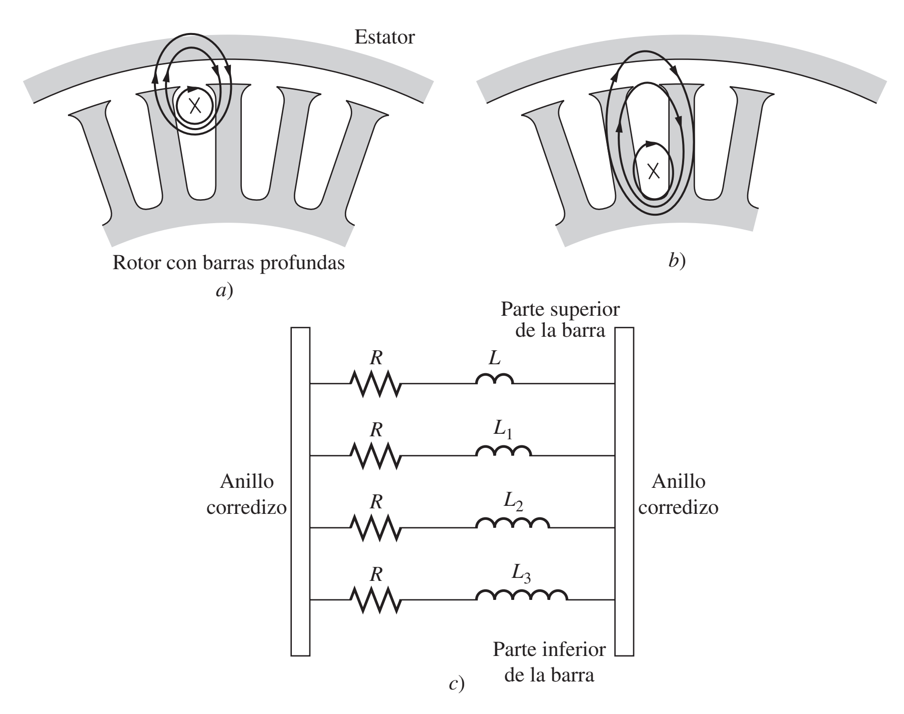


FIGURA 6-27 Flujo disperso en un rotor de barra profunda. *a*) Para una corriente que fluye en la parte superior de la barra, el flujo está fuertemente ligado al estator y la inductancia de dispersión es pequeña; *b*) para una corriente que fluye en la parte inferior de la barra, el flujo está débilmente ligado al estator y la inductancia de dispersión es grande; *c*) circuito equivalente resultante del rotor de barra en función de la profundidad en el rotor.

Si el deslizamiento es bajo, la frecuencia del rotor es muy baja y las reactancias de todos los caminos en paralelo a través de la barra son pequeñas en comparación con sus resistencias. Las impedancias de todas las partes de la barra son aproximadamente iguales, por lo que la corriente fluye por igual a través de todas las partes de las barras. La gran área transversal resultante hace que la resistencia del rotor sea bastante pequeña, lo que causa una muy alta eficiencia con deslizamientos bajos. Si los deslizamientos son altos (condiciones de arranque), las reactancias son grandes en comparación con las resistencias en las barras del rotor, por lo que toda la corriente se ve forzada a fluir por la parte de baja reactancia de la barra cercana al estator. Puesto que la sección transversal *efectiva* es menor, la resistencia del rotor es más alta que antes. Cuando la resistencia del rotor es alta en las condiciones de arranque, el par de arranque es relativamente más alto y la corriente de arranque es relativamente más baja que en un diseño clase A. La característica par-velocidad típica de esta construcción es la curva de diseño clase B que se muestra en la figura 6-26.

En la figura 6-25*c*) se muestra la vista transversal de un rotor de doble jaula. Consta de un conjunto de barras grandes de baja resistencia incrustadas profundamente en el rotor y un grupo de barras pequeñas de alta resistencia colocadas cerca de la superficie del rotor. Es similar al rotor de barra profunda, excepto en que la diferencia entre la operación con deslizamiento alto y bajo es aún mayor. En condiciones de arranque, sólo la barra pequeña es efectiva y la resistencia del rotor es *bastante* alta. Esta resistencia alta causa un par de arranque alto. Sin embargo, a velocidades normales de operación, ambas barras son efectivas y la resistencia es casi tan baja como la del rotor de barra profunda. Los rotores de doble jaula de este tipo se utilizan para producir características NEMA clases B y C. Entre las posibles características par-velocidad de un rotor con este diseño están las designadas como diseño clase B y diseño clase C de la figura 6-26.

Los rotores de doble jaula tienen la desventaja de ser más caros que otros tipos de rotores de jaula, pero son más baratos que los diseños de rotor devanado. Permiten alcanzar algunas de las mejores características posibles de los motores con rotor devanado (un alto par de arranque con una baja corriente de arranque y alta eficiencia en condiciones normales de operación) a bajo costo y sin la necesidad de mantenimiento de los anillos rozantes y de las escobillas.

Clases de diseño de los motores de inducción

Se puede producir una gran variedad de curvas par-velocidad si se cambian las características del rotor de los motores de inducción. Para ayudar a la industria a seleccionar los motores apropiados para las diferentes aplicaciones en la gama completa de caballos de fuerza, la NEMA en Estados Unidos y la International Electrotechnical Commission (IEC) en Europa han definido una serie de diseños estándar con diferentes curvas de par-velocidad. A estos diseños estándar se les llama *clases de diseño* y a un motor individual se le puede llamar motor de diseño clase X. Éstas son clases de diseño NEMA e IEC a las que se hizo referencia. La figura 6-26 muestra las curvas par-velocidad típicas de las cuatro clases estándar de diseño NEMA. A continuación se describen las características distintivas de cada clase estándar de diseño.

DISEÑO CLASE A Los motores de diseño clase A son de diseño estándar, con un par de arranque normal, una corriente de arranque normal y bajo deslizamiento. El deslizamiento a plena carga de los motores de diseño A debe ser menor a 5% y debe ser menor aún en los motores de diseño B con valores nominales equivalentes. El par máximo es 200 o 300% del par a plena carga y se presenta a un bajo deslizamiento (menos de 20%). El par de arranque de este diseño es por lo menos el par nominal en los motores grandes y es 200% o más del par nominal de motores más pequeños. El problema principal con esta clase de diseño es su extremadamente alta corriente de irrupción en el arranque. Por lo regular, los flujos de corriente en el arranque son de 500 a 800% de la corriente nominal. En tamaños mayores a 7.5 hp, se debe utilizar alguna forma de arranque de voltaje reducido en estos motores para prevenir problemas de caída de voltaje en el arranque en el sistema de potencia al cual están conectados. En el pasado, los motores de diseño clase A eran el diseño estándar de la mayoría de las aplicaciones por debajo de 7.5 hp y por arriba de 200 hp, pero, en los últimos años, la mayoría han sido reemplazadas por motores de diseño clase B. Los motores de diseño clase A se utilizan por lo regular en ventiladores, sopladores, bombas, tornos y en otras máquinas herramientas.

DISEÑO CLASE B Los motores de diseño clase B tienen un par de arranque normal, una corriente de arranque más baja y un bajo deslizamiento. Este motor produce alrededor del mismo par de arranque que un motor clase A con 25% menos de corriente. El par máximo es mayor o igual a 200% de su par de carga nominal, pero menor al de diseño clase A debido al incremento de la reactancia del rotor. El deslizamiento del rotor es aún relativamente bajo (menor a 5%) a plena carga. Las aplicaciones que tiene son muy parecidas a las del diseño A, pero se prefiere el diseño B porque requiere menos corriente de arranque. Los motores de diseño clase B han reemplazado ampliamente los motores de diseño clase A en instalaciones nuevas.

DISEÑO CLASE C Los motores de diseño clase C tienen un par de arranque alto con corrientes de arranque bajas y deslizamiento bajo (menos de 5%) a plena carga. El par máximo es un poco mayor al de los motores clase A, mientras que el par de arranque es hasta 250% del par a plena carga. Estos motores se construyen con rotores de doble jaula, por lo que son más caros que los motores de las clases anteriores. Se utilizan para cargas con alto par de arranque, tales como bombas, compresores y bandas transportadoras.

DISEÑO CLASE D Los motores de diseño clase D tienen un par de arranque muy alto (275% o más del par nominal) y una baja corriente de arranque, pero también tienen un alto deslizamiento a plena carga. Básicamente son motores de inducción clase A ordinarios, pero las barras del rotor son más pequeñas y están hechas con un material que tiene una resistencia más alta. La alta resistencia del rotor desplaza el par pico a una velocidad muy baja. Incluso es posible que el par más alto se presente a velocidad cero (100% de deslizamiento). El deslizamiento a plena carga de estos motores es bastante alto debido a la alta resistencia del rotor. Normalmente es de 7 a 11%, pero puede llegar hasta 17% o más. Estos motores se utilizan en aplicaciones que requieren la aceleración de cargas

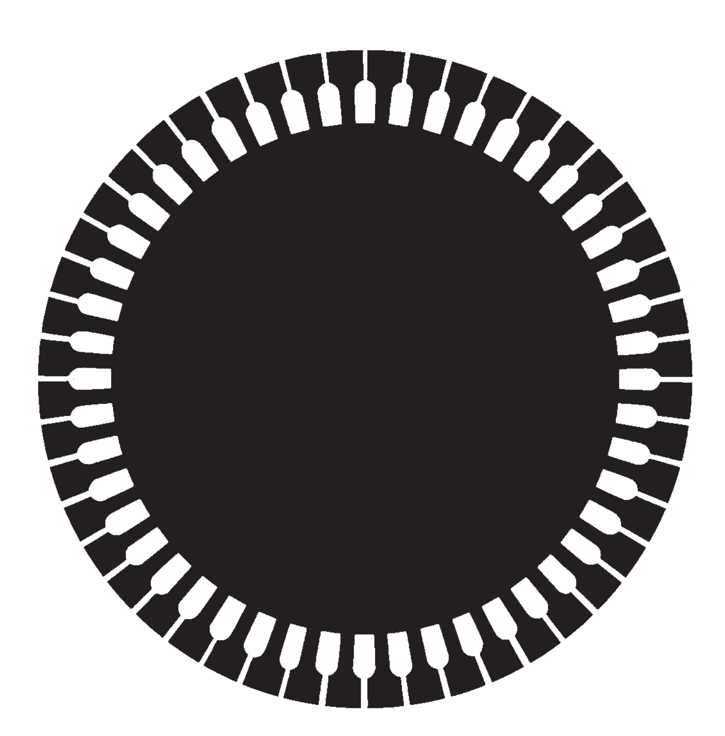


FIGURA 6-28 Sección transversal del rotor que muestra la construcción del diseño clase F anterior de un motor de inducción. Puesto que las barras de rotor están profundamente incrustadas, tienen una reactancia de dispersión muy pequeña. Una reactancia de dispersión alta disminuye el par de arranque y la corriente de este motor, por lo que se llama *diseño de arranque suave*. (*Cortesía de MagneTek, Inc.*)

con inercias muy altas, en especial grandes volantes que se utilizan en troqueladoras o en cortadoras. En dichas aplicaciones estos motores aceleran un gran volante en forma gradual hasta alcanzar su plena velocidad, que luego se transmite a la troqueladora. Después de la acción de troquelado, el motor vuelve a acelerar el volante por un tiempo bastante largo hasta la próxima operación.

Además de estas cuatro clases de diseño, la NEMA reconocía los diseños clases E y F, que se llamaron motores de inducción de *arranque suave* (véase la figura 6-28). Estos diseños se distinguían de los demás por tener corrientes de arranque muy bajas y se utilizaban para cargas con un par de arranque bajo en situaciones donde las corrientes de arranque fueran un problema. Estos diseños son obsoletos hoy en día.

EJEMPLO 6-6

Un motor de inducción de 460 V, 30 hp, 60 Hz, con cuatro polos, conectado en Y, tiene dos diseños de rotor posibles, un rotor de jaula de ardilla sencilla y un rotor de doble jaula. (El estator es idéntico en ambos.) El motor con el rotor de jaula de ardilla sencilla se puede modelar con las siguientes impedancias en ohms por fase referidas al circuito del estator:

$$R_1 = 0.641\ \Omega \qquad R_2 = 0.300\ \Omega$$
$$X_1 = 0.750\ \Omega \qquad X_2 = 0.500\ \Omega \qquad X_M = 26.3\ \Omega$$

El motor con el rotor de doble jaula se puede considerar como una jaula exterior de fuerte acoplamiento y alta resistencia en paralelo y una jaula interior de bajo acoplamiento y baja resistencia (similar a la estructura de la figura 6-25*c*). El estator y la resistencia y reactancias de magnetización son idénticos a las del diseño de jaula de ardilla.

La resistencia y la reactancia de la jaula exterior del rotor son:

$$R_{2o} = 3.200\ \Omega \qquad X_{2o} = 0.500\ \Omega$$

Nótese que la resistencia es alta porque la barra exterior tiene una sección transversal muy pequeña, mientras que la reactancia es igual que la reactancia del rotor de jaula de ardilla puesto que la jaula exterior está muy cerca del estator y la reactancia de dispersión es pequeña.

La resistencia y la reactancia de la jaula interior del rotor son:

$$R_{2i} = 0.400\ \Omega \qquad X_{2i} = 3.300\ \Omega$$

En este caso la resistencia es baja porque las barras tienen un área transversal grande, pero la reactancia de dispersión es bastante alta.

Calcule las características par-velocidad asociadas con los dos rotores distintos. ¿Cómo se desempeñan uno en comparación con el otro?

Solución

La característica par-velocidad del motor con rotor de jaula sencilla se puede calcular de la misma manera que en el ejemplo 6-5. La característica par-velocidad del motor con rotor de doble jaula también se puede calcular de la misma forma, *excepto* que con cada deslizamiento la resistencia y reactancia del rotor son la combinación en paralelo de las impedancias de las jaulas interna y externa. A bajos deslizamientos, la reactancia del rotor carecerá relativamente de importancia, y la gran jaula interior desempeñará un papel más importante en la operación de la máquina. A altos deslizamientos, la alta reactancia de la jaula interior casi la remueve del circuito.

A continuación se muestra un archivo M de MATLAB que calcula y hace la gráfica de las dos características par-velocidad:

```
% Archivo M: torque_speed_2.m
% Archivo M para calcular y hacer la gráfica de la curva par-
%   velocidad de un motor de inducción con rotor de jaula doble.
```

```
% Primero, inicializar los valores que requiere el programa.
r1 = 0.641;                         % Resistencia del estator
x1 = 0.750;                         % Reactancia del estator
r2 = 0.300;                         % Resistencia del rotor con jaula sencilla
r2i = 0.400;                        % Resistencia de la jaula interna del rotor
                                    % con motor de doble jaula
r2o = 3.200;                        % Resistencia de la jaula externa del rotor
                                    % con motor de doble jaula
x2 = 0.500;                         % Reactanciadelrotordelmotordejaulasencilla
X2i = 3.300;                        % Reactancia de la jaula interna del rotor
                                    % del motor de doble jaula
X2o = 0.500;                        % Reactancia de la jaula externa del rotor
                                    % del motor de doble jaula
xm = 26.3;                          % Reactancia de la rama de magnetización
v_phase = 460 / sqrt(3);            % Voltaje de fase
n_sync = 1800;                      % Velocidad síncrona (r/min)
w_sync = 188.5;                     % Velocidad síncrona (rad/s)

% Calcular el voltaje y la impedancia de Thevenin con las
% ecuaciones 6-41a y 6-43.
v_th = v_phase * ( xm / sqrt(r1^2 + (x1 + xm)^2) );
z_th = ((j*xm) * (r1 + j*x1)) / (r1 + j*(x1 + xm));
r_th = real(z_th);
x_th = imag(z_th);

% Ahora, calcular la velocidad del motor para varios
% deslizamientos entre 0 y 1. Nótese que el primer valor
% de deslizamiento es 0.001 en lugar de 0 exactamente para
% evitar la división entre cero.
s = (0:1:50) / 50;                  % Deslizamiento
s(1) = 0.001;                       % Evitar división entre cero
nm = (1 - s) * n_sync;              % Velocidad mecánica

% Calcular el par del rotor de jaula sencilla.
for ii = 1:51
  t_ind1(ii) = (3 * v_th^2 * r2 / s (ii)) / ...
     (w_sync * ((r_th + r2/s(ii))^2 + (x_th + x2)^2) );
end

% Calcular la resistencia y reactancia del rotor de doble
% jaula con este deslizamiento y luego utilizar estos valores
% para calcular el par inducido.
for ii = 1:51
  y_r = 1/(r2i + j*s(ii)*x2i) + 1/(r2o + j*s(ii)*x2o);
  z_r = 1/y_r;                      % Impedancia efectiva del rotor
  r2eff = real(z_r);                % Resistencia efectiva del rotor
  x2eff = imag(z_r);                % Reactancia efectiva del rotor

  % Calcular el par inducido del rotor de doble jaula.
  t_ind2(ii) = (3 * v_th^2 * r2eff / s(ii)) / ...
     (w_sync * ((r_th + r2eff/s(ii) )^2 + (x_th + x2eff)^2) );
end

% Hacer la gráfica de las curvas par-velocidad
plot (nm,t_ind1,'b','LineWidth',2. 0);
hold on;
plot(nm,t_ind2,'k-','LineWidth',2.0);
xlabel('bf\itn_{m}'¡
ylabel('\bf\tau_{ind}';
title ('\bfCaracterísticas par-velocidad de un motor de inducción';
legend ('Diseño de jaula sencilla', 'Diseño de doble jaula');
grid on;
hold off;
```

En la figura 6-29 se muestran las características par-velocidad resultantes. Nótese que el diseño de doble jaula tiene un deslizamiento un poco mayor en el intervalo de operación normal, un par máximo menor y un par de arranque más alto en comparación con el diseño de jaula sencilla correspondiente. Este comportamiento concuerda con las explicaciones teóricas que se dieron en esta sección.

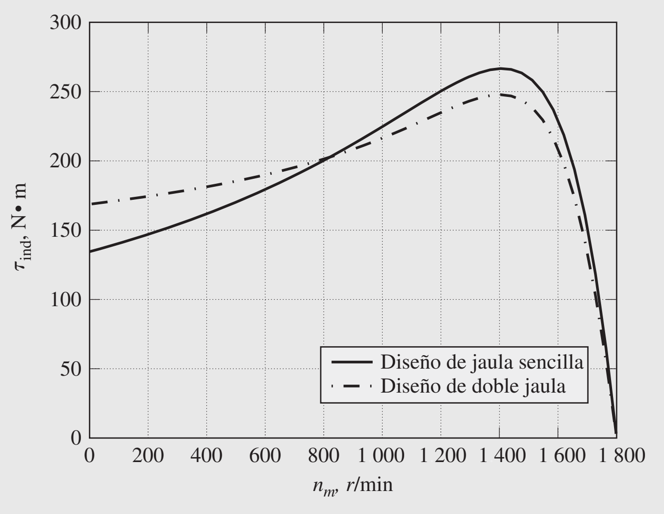


FIGURA 6-29 Comparación de las características par-velocidad de los rotores de jaula sencilla y doble jaula del ejemplo 6-6.

6.7 TENDENCIAS EN EL DISEÑO DE MOTORES DE INDUCCIÓN

Las ideas fundamentales sobre los motores de inducción las desarrolló a finales de la década de 1880 Nicola Tesla, quien recibió la patente por sus ideas en 1888. En esa época presentó un artículo ante el American Institute of Electrical Engineers [AIEE, predecesor del Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE)] en el que describía los principios básicos del motor de inducción con rotor devanado, junto con ideas sobre otros dos importantes motores de ca: el motor síncrono y el motor de reluctancia.

A pesar de que en 1888 se describió la idea básica del motor de inducción, el motor no estaba completo aún. Hubo un periodo inicial de desarrollo rápido seguido por una serie de mejoras lentas que continuaron con la evolución del motor hasta el día de hoy.

El motor de inducción adquirió su forma moderna entre 1888 y 1895. Durante ese periodo se desarrollaron las fuentes de potencia bifásicas y trifásicas para producir los campos magnéticos giratorios dentro del motor, se desarrollaron los devanados distribuidos del estator y se introdujo el rotor de jaula de ardilla. En 1896 se comenzaron a comercializar los motores de inducción trifásicos plenamente funcionales.

Entre ese entonces y principios de la década de 1970 se han presentado mejoras continuas en la calidad del acero, las técnicas de fundición, el aislamiento y las características de construcción utilizadas en los motores de inducción. Estas tendencias dieron como resultado un motor más pequeño con una potencia de salida determinada, lo que genera ahorros considerables en los costos de construcción. En realidad, un motor moderno de 100 hp tiene el mismo tamaño que uno de 7.5 hp de 1897. En la figura 6-30 se ilustra el progreso de los

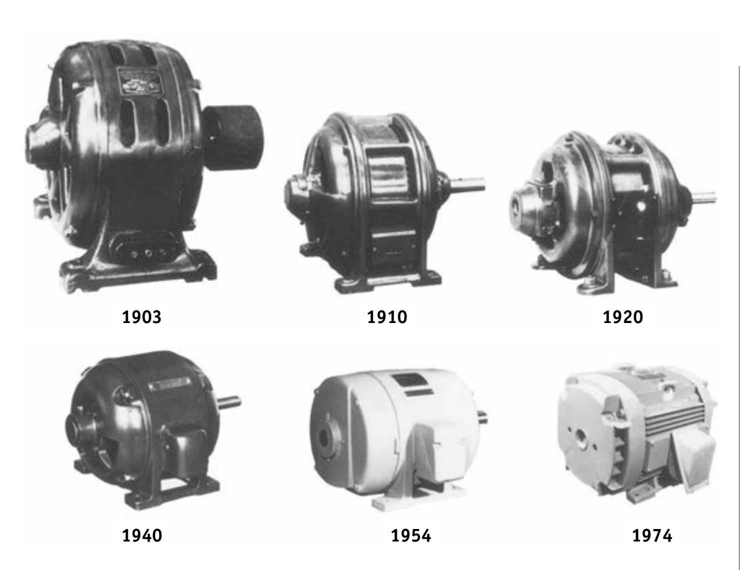


FIGURA 6-30 Evolución del motor de inducción. Los motores que se muestran en la figura están dimensionados para 220 V y 15 hp. Ha habido una disminución drástica del tamaño y los requerimientos de los materiales de los motores de inducción desde que se produjeron los primeros en la década de 1890. (*Cortesía de General Electric Company*.)

motores de inducción de 15 hp. (Véase también la figura 6-31.)

Sin embargo, estas mejoras en el diseño de los motores de inducción *no* llevaron necesariamente a mejoras en su eficiencia de operación. El esfuerzo de diseño más fuerte se concentró en la reducción de los costos de los materiales de las máquinas y no en el incremento de su eficiencia, lo que se debió a que el precio tan bajo de la electricidad convertía el costo directo del motor en el principal criterio de selección de compra.

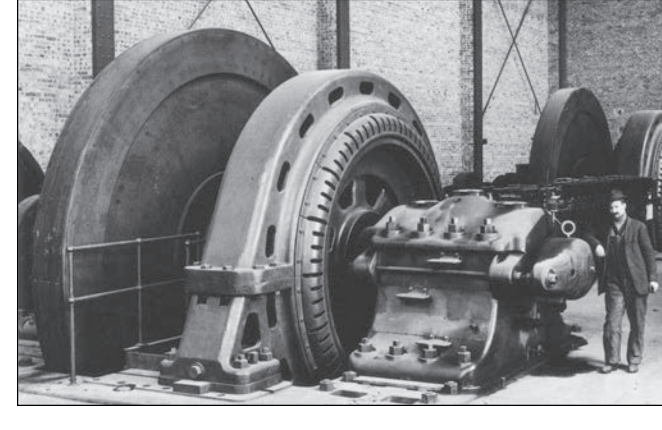


FIGURA 6-31 Uno de los primeros motores típicos de inducción de gran tamaño. Los motores mostrados tenían una capacidad de 2 000 hp. (*Cortesía de General Electric Company*.)

Puesto que en 1973 el precio del petróleo sufrió un incremento espectacular, el costo de operación de las máquinas ha adquirido cada vez mayor importancia y el costo inicial de instalación la ha perdido. Como resultado de estas tendencias, se ha puesto mayor interés en la eficiencia del motor tanto por parte de los diseñadores como de los usuarios finales de ellos.

En la actualidad, los fabricantes más importantes producen nuevas líneas de motores de inducción de alta eficiencia y están logrando una participación cada vez más grande en el mercado de los motores de inducción. Se utilizan varias técnicas para mejorar la eficiencia de estos motores en comparación con los diseños de eficiencia estándar tradicional, a saber:

1. Se utiliza más cobre en los devanados del estator para reducir las pérdidas en el cobre.
2. Se incrementa la longitud del núcleo del rotor y del estator para reducir la densidad de flujo magnético en el entrehierro de la máquina. Esto disminuye la saturación magnética de la máquina, lo que abate las pérdidas en el núcleo.
3. Se utiliza más acero en el estator, lo que permite que se transfiera una mayor cantidad de calor hacia afuera del motor y se reduce su temperatura de operación. Se rediseñó el ventilador del rotor para reducir las pérdidas por rozamiento con el aire.
4. El metal que se utiliza en el estator es acero eléctrico de alto grado con bajas pérdidas por histéresis.
5. El acero, de muy alta resistividad interna, se lamina en calibres especialmente delgados (esto es, las láminas se ubican muy cerca las unas de las otras). Ambos efectos tienden a reducir las pérdidas por corrientes parásitas en el motor.
6. El rotor se maquina cuidadosamente para producir un entrehierro uniforme, lo que reduce las pérdidas misceláneas en el motor.

Además de estas técnicas generales, cada fabricante tiene su enfoque especial para mejorar la eficiencia del motor. En la figura 6-32 se muestra un típico motor de inducción de alta eficiencia.

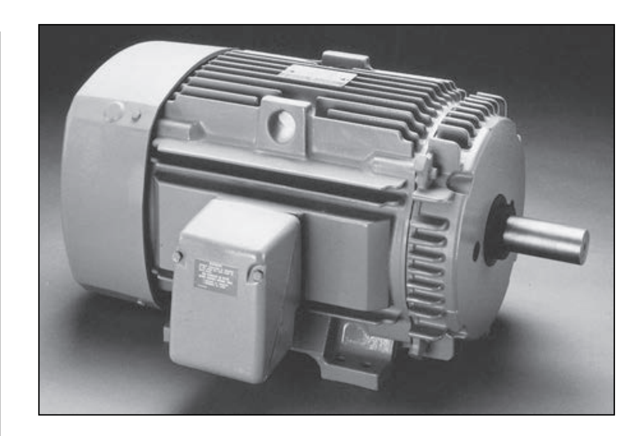


FIGURA 6-32 Motor ahorrador de energía General Electric, es un típico motor moderno de inducción de alta eficiencia. (*Cortesía de General Electric Company*.)

Para ayudar a comparar la eficiencia de los motores, la NEMA adoptó una técnica estándar para medir la eficiencia del motor con base en el Método B de la norma IEEE 112, *Procedimiento de prueba para motores y generadores de inducción polifásicos*. La NEMA también introdujo una clasificación llamada *eficiencia nominal NEMA*, que aparece en las placas de características de los motores de diseño clases A, B y C. La eficiencia nominal identifica la eficiencia promedio de una gran cantidad de motores de cierto modelo y también garantiza una cierta eficiencia mínima para ese tipo de motor. En la figura 6-33 se muestra la norma de eficiencias nominales NEMA.

Hay otras organizaciones que han establecido normas de eficiencia para los motores de inducción, las más importantes de las cuales son las normas inglesa (BS-269), la IEC (IEC 34-2) y la japonesa (JEC-37). Sin embargo, las técnicas prescritas para medir

Eficiencia nominal, %	Eficiencia mínima garantizada, %	Eficiencia nominal, %	Eficiencia mínima garantizada, %
95.0	94.1	80.0	77.0
94.5	93.6	78.5	75.5
94.1	93.0	77.0	74.0
93.6	92.4	75.5	72.0
93.0	91.7	74.0	70.0
92.4	91.0	72.0	68.0
91.7	90.2	70.0	66.0
91.0	89.5	68.0	64.0
90.2	88.5	66.0	62.0
89.5	87.5	64.0	59.5
88.5	86.5	62.0	57.5
87.5	85.5	59.5	55.0
86.5	84.0	57.5	52.5
85.5	82.5	55.0	50.5
84.0	81.5	52.5	48.0
82.5	80.0	50.5	46.0
81.5	78.5		

FIGURA 6-33 Tabla de las normas de eficiencia nominal de NEMA. La eficiencia nominal representa la eficiencia promedio de un gran número de motores muestra y la eficiencia mínima garantizada representa la eficiencia mínima permisible de cualquier motor de esa clase. (*Reproducida con el permiso de Motors and Generators, NEMA Publication MG-1, derechos de autor 1987 de NEMA*.)

la eficiencia de los motores de inducción son distintas para cada norma y arrojan *diferentes resultados para la misma máquina física*. Si dos motores tienen una eficiencia de 82.5%, pero se evalúan de acuerdo con diferentes normas, pueden no tener la misma eficiencia. Cuando se comparan dos motores, es importante comparar las eficiencias medidas con la misma norma.

6.8 ARRANQUE DE LOS MOTORES DE INDUCCIÓN

Los motores de inducción no tienen los mismos problemas de arranque que presentan los motores síncronos. En muchos casos, los motores de inducción se pueden poner en marcha simplemente conectándolos a la línea de potencia. Sin embargo, en algunos otros hay muy buenas razones para no hacerlo de esta manera. Por ejemplo, la corriente de arranque que se requiere puede causar una caída en el voltaje del sistema de potencia, por lo cual no es aceptable el *arranque a través de la línea*.

Los motores de inducción con rotor devanado se pueden poner en marcha con corrientes relativamente bajas por medio de la inserción de una resistencia extra en el circuito del rotor en el momento del arranque. Esta resistencia extra no sólo incrementa el par de arranque sino que también reduce la corriente de arranque.

Para los motores de inducción de jaula, la corriente de arranque puede variar en forma amplia, variación que depende, principalmente, de la potencia nominal del motor y de la efectividad de la resistencia del rotor en condiciones de arranque. Para estimar la corriente del rotor en condiciones de arranque, todos los motores de jaula tienen una *letra código* de arranque (que no se debe confundir con la letra de *clase de diseño*) en su placa de características. Esta letra código establece los límites de la cantidad de corriente que el motor puede aceptar en condiciones de arranque.

Estos límites se expresan en términos de potencia aparente de arranque del motor en función de los caballos de fuerza nominales. La figura 6-34 muestra una tabla que contiene los kilovoltamperes de arranque por caballo de fuerza de cada letra código.

Para determinar la corriente de arranque de un motor de inducción, léase el voltaje nominal, los caballos de fuerza y la letra código de su placa de características. Entonces, la potencia aparente de arranque del motor será

$$S_{\text{arranque}} = (\text{caballaje nominal})(\text{factor de letra de código}) \tag{6-55}$$

y la corriente de arranque se puede calcular con la ecuación

$$I_L = \frac{S_{\text{arranque}}}{\sqrt{3}V_T} \tag{6-56}$$

EJEMPLO 6-7

¿Cuál es la corriente de arranque de un motor de inducción trifásico de 15 hp, 208 V, letra código F?

Solución

De acuerdo con la figura 6-34, los kilovoltamperes máximos por caballo de fuerza son 5.6. Por lo tanto, los kilovoltamperes de arranque máximos para este motor son

$$S_{\text{arranque}} = (15\ \text{hp})(5.6) = 84\ \text{kVA}$$

Letra código nominal	Rotor bloqueado, kVA/hp	Letra código nominal	Rotor bloqueado, kVA/hp
A	0-3.15	L	9.00-10.00
B	3.15-3.55	M	10.00-11.00
C	3.55-4.00	N	11.20-12.50
D	4.00-4.50	P	12.50-14.00
E	4.50-5.00	R	14.00-16.00
F	5.00-5.60	S	16.00- 18.00
G	5.60-6.30	T	18.00-20.00
H	6.30-7.10	U	20.00-22.40
J	7.10-8.00	V	22.40 y más
K	8.00-9.00		

FIGURA 6-34 Tabla de letras de código NEMA que indica los kVA/hp de arranque nominales de un motor. Cada letra de código se extiende hasta, pero no incluye, el límite inferior de la siguiente clase superior. (*Reproducida con el permiso de Motors and Generators, NEMA Publication MG-I, derechos de autor 1987 de NEMA*.)

La corriente de arranque es

$$I_L = \frac{S_{\text{arranque}}}{\sqrt{3}V_T} \tag{6-56}$$

$$= \frac{84\ \text{kVA}}{\sqrt{3}(208\ \text{V})} = 233\ \text{A}$$

Si se requiere, la corriente de arranque de un motor de inducción se puede reducir con un circuito de arranque. Sin embargo, esto también reducirá el par de arranque del motor.

Una forma de reducir la corriente de arranque es cambiar un motor normalmente conectado en Δ a un motor conectado en Y durante el proceso de arranque. Si el devanado del estator del motor se cambia de conexión Δ a conexión Y, entonces el voltaje de fase a través del devanado disminuirá de V_L a $V_L/\sqrt{3}$, lo que reducirá la corriente máxima de arranque en la misma relación. Cuando el motor se acelera hasta cerca de plena velocidad, los devanados del estator se pueden abrir y reconectar en una configuración Δ (vea la figura 6-35).

Otra forma de reducir la corriente de arranque es insertar un inductor o resistor extra en la línea de potencia durante el arranque. Aun cuando en el pasado ésta era una práctica común, este enfoque casi no se utiliza hoy en día. Una manera alternativa consiste en reducir el voltaje en los terminales del motor durante el arranque por medio

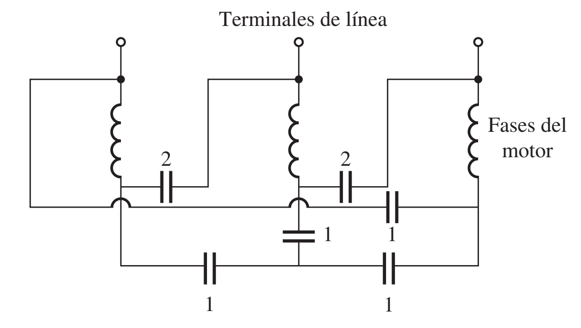


FIGURA 6-35 Arrancador de motor de inducción Y-Δ.

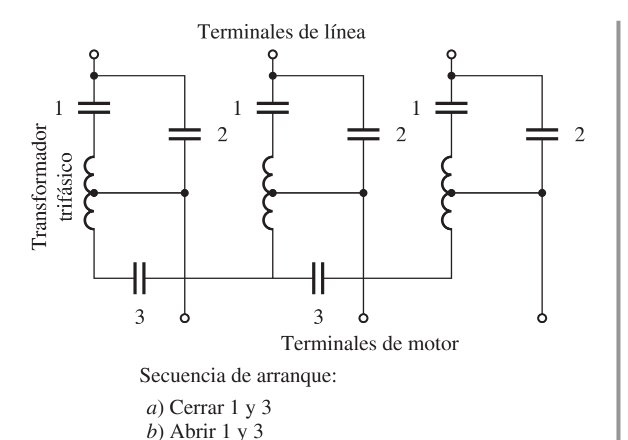


FIGURA 6-36 Arrancador de autotransformador de un motor de inducción.

de la utilización de autotransformadores. La figura 6-36 muestra un circuito de arranque con voltaje reducido típico que utiliza autotransformadores. Durante el arranque se cierran los contactos 1 y 3, lo que reduce el suministro de voltaje al motor. Una vez que el motor está cerca de la velocidad final, se abren estos contactos y se cierran los contactos 2. Estos contactos permiten la aplicación de voltaje pleno de la línea al motor.

Es importante tomar en cuenta que aun cuando se reduce la corriente de arranque en proporción directa a la disminución del voltaje en los terminales, el par de arranque disminuye con el *cuadrado* del voltaje aplicado. Por lo tanto, sólo se puede lograr una cierta reducción de la cantidad de corriente si el motor debe arrancar con una carga en su eje.

Circuitos de arranque de los motores de inducción

En la figura 6-37 se puede ver un circuito típico de arranque a voltaje pleno o directo a través de la línea en un motor de inducción, y la figura 6-38 muestra el significado de los símbolos que se utilizan en la figura. La operación de este circuito es muy sencilla. Cuando se presiona el interruptor de arranque, la bobina del relé (o *contactor*) M se energiza, lo que causa que se cierren los contactos M_1, M_2 y M_3 que normalmente están abiertos. Cuando se cierran estos contactos, se aplica potencia al motor de inducción y éste arranca. El contacto M_4 también se cierra, lo que causa un corto en el interruptor de arranque, lo que permite al operador soltarlo sin quitar potencia del relé M. Cuando se presiona el botón de detener, el relé M se desenergiza, se abren los contactos M y se detiene el motor.

El circuito de arranque de un motor magnético de este tipo tiene varios elementos de protección incorporados:

1. Protección contra cortocircuito.
2. Protección contra sobrecarga.
3. Protección contra bajo voltaje.

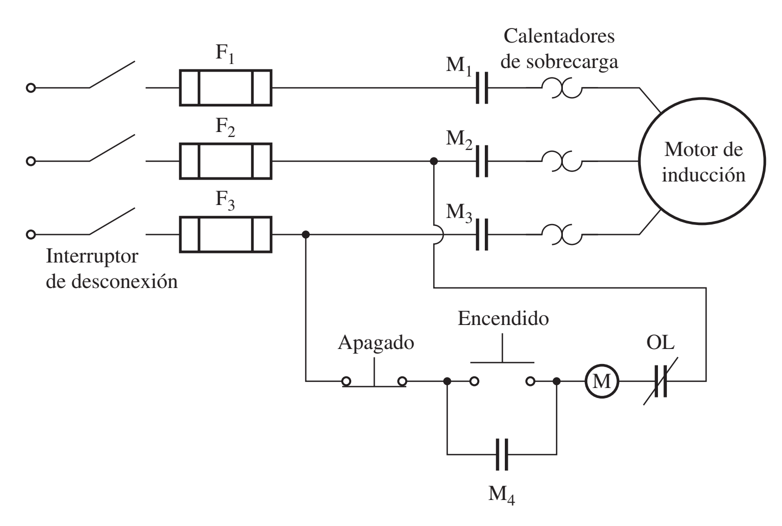


FIGURA 6-37 Típico arrancador directo a través de la línea de un motor de inducción.

La *protección contra cortocircuito* del motor la proveen los fusibles F_1, F_2 y F_3. Si se presenta súbitamente un cortocircuito dentro del motor y provoca un flujo de corriente mucho mayor a la corriente nominal, estos fusibles se funden y desconectan el motor de la fuente de potencia para evitar que se queme por completo. Sin embargo, estos fusibles *no* se deben quemar durante el arranque normal del motor, por lo que están diseñados para soportar corrientes mucho más altas que la corriente a plena carga antes de abrir el circuito. Esto quiere decir que los cortocircuitos a través de una alta resonancia a las cargas excesivas para el motor no serán evitados por los fusibles.

La *protección contra sobrecarga* del motor la proveen los elementos de la figura marcados como OL. Estos elementos de protección contra sobrecarga constan de dos partes, un elemento térmico por sobrecarga y sus contactos. En condiciones normales los contactos de sobrecarga están cerrados. Sin embargo, cuando la temperatura de los elementos térmicos se eleva demasiado, los contactos OL se abren y desenergizan el relé M, que a su vez abre los contactos M que normalmente están abiertos y remueve la potencia del motor.

Cuando se sobrecarga un motor de inducción, a la larga se daña con el calentamiento excesivo causado por las altas corrientes. Sin embargo, toma cierto tiempo para que se averíe el motor y un

motor de inducción por lo regular no se verá afectado por periodos breves de corrientes altas (como las corrientes de arranque). Sólo se dañará si se éstas se sostienen. Los elementos térmicos de sobrecarga dependen del calor para su operación, por lo que no se verán afectados por periodos breves de corrientes altas durante el arranque y podrán operar durante largos periodos con corriente alta, desconectando el motor de la fuente de potencia antes de que experimente algún daño.

La *protección contra bajo voltaje* la provee también un controlador. Nótese en la figura que el control de potencia del relé M viene directamente a través de las líneas al motor. Si el voltaje que se aplica al motor cae demasiado elevado, el voltaje aplicado al relé M también caerá y el relé se desenergizará. Entonces se abrirán los contactos M y removerán la fuente de potencia de los terminales del motor.

En la figura 6-39 se muestra el circuito de arranque de un motor de inducción con resistores para reducir el flujo de corriente de arranque. Este circuito es similar al anterior, excepto en que tiene componentes adicionales para controlar la remo-

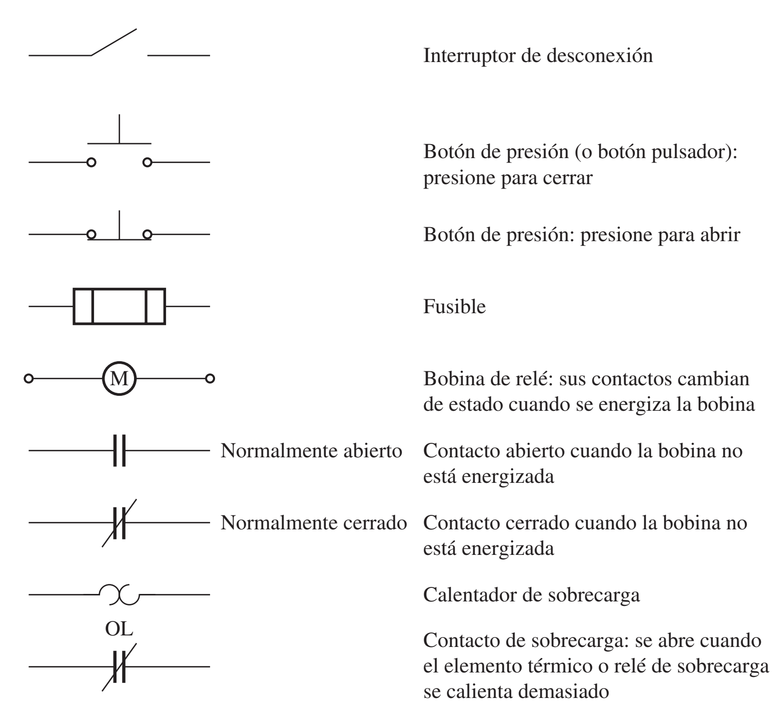


FIGURA 6-38 Componentes típicos de los circuitos de control de un motor de inducción.

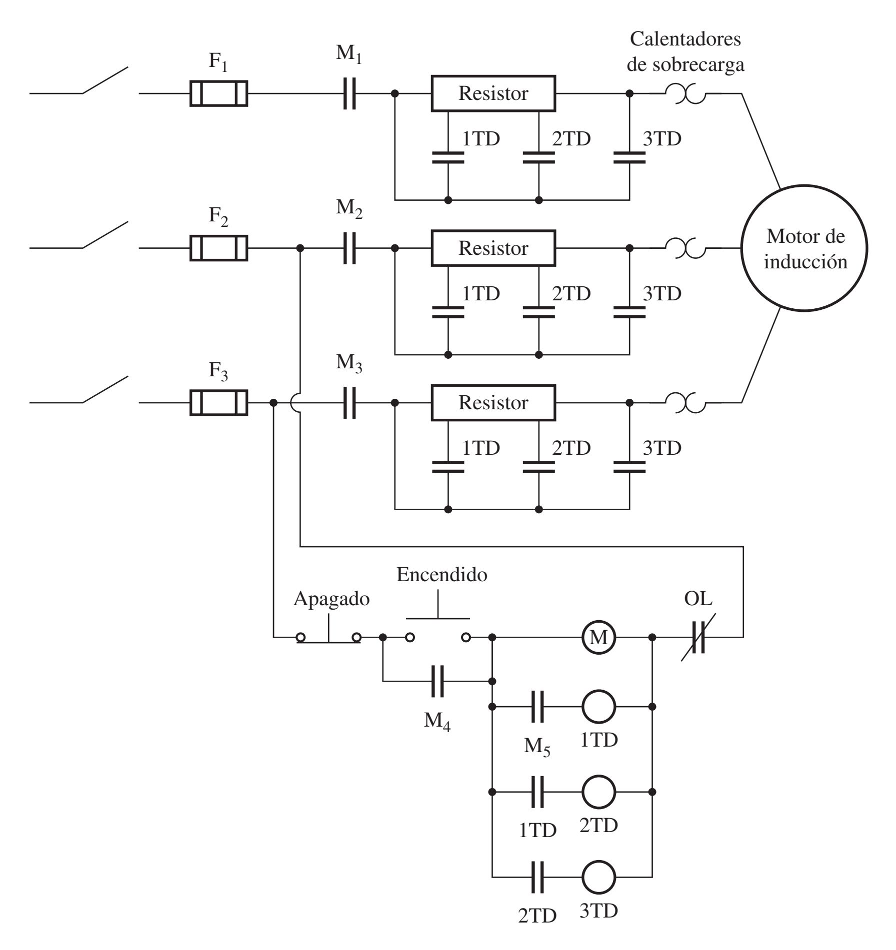


FIGURA 6-39 Arrancador resistivo de tres pasos de un motor de inducción.

ción del resistor de arranque. Los relés 1TD, 2TD y 3TD en la figura 6-39 se llaman relés de retraso, lo que quiere decir que cuando se energizan hay un retraso antes de que se cierren los contactos.

Cuando se presiona el botón de arranque de este circuito, el relé M se energiza y se aplica potencia al motor como antes. Puesto que todos los contactos 1TD, 2TD y 3TD están abiertos, el resistor de arranque pleno está en serie con el motor, lo que reduce la corriente de arranque.

Cuando se cierran los contactos M, se energiza el relé 1TD. Sin embargo, hay un retraso finito antes de que se cierren los contactos 1TD. Durante este tiempo el motor se acelera parcialmente y la corriente de arranque cae un poco. Después de este periodo los contactos 1TD se cierran, eliminando parte de la resistencia de arranque y energizando en forma simultánea al relé 2TD. Después de otro retraso, se cierran los contactos 2TD, lo cual elimina la segunda parte del resistor y energiza el relé 3TD. Finalmente, se cierran los contactos 3TD y todo el resistor de arranque queda fuera del circuito.

Una cuidadosa selección de los valores del resistor y de los tiempos de retraso permite utilizar el circuito de arranque para prevenir que la corriente de arranque del motor sea peligrosamente alta, mientras que permite un flujo de corriente suficiente para asegurar la pronta aceleración para llegar a las velocidades normales de operación.

6.9 CONTROL DE VELOCIDAD EN LOS MOTORES DE INDUCCIÓN

Hasta la llegada de los controladores en estado sólido modernos, los motores de inducción en general no eran las máquinas adecuadas para aplicaciones que requerían un considerable control de velocidad. El intervalo de operación normal de un motor de inducción regular (clases de diseño A, B y C) está confinado a un deslizamiento de menos de 5% y la variación de velocidad en este intervalo es más o menos directamente proporcional a la carga en el eje del motor. Incluso si se pudiera aumentar el deslizamiento, la eficiencia del motor se vería afectada, puesto que las pérdidas en el cobre del rotor son directamente proporcionales al deslizamiento del motor (recuérdese que $P_{\text{PCR}} = sP_{\text{EH}}$).

En realidad hay sólo dos técnicas posibles para controlar la velocidad de un motor de inducción. Una consiste en la variación de la velocidad síncrona, que es la velocidad de los campos magnéticos del estator y del rotor, puesto que la velocidad del rotor siempre permanece cerca de n_{sinc}. La otra técnica consiste en la variación del deslizamiento del rotor para una carga dada. Cada una de estas técnicas se explicará con más detalle.

La velocidad síncrona de un motor de inducción está dada por

$$n_{\text{sinc}} = \frac{120\, f_e}{P} \tag{6-1}$$

por lo que las únicas maneras en que se puede modificar la velocidad síncrona de una máquina son: 1) cambiando la frecuencia eléctrica y 2) cambiando el número de polos de la máquina. Se puede lograr el control del deslizamiento si se modifica la resistencia del rotor o el voltaje en los terminales del motor.

Control de velocidad del motor de inducción mediante el cambio de polos

Hay dos métodos importantes para cambiar el número de polos en un motor de inducción:

1. Método de polos consecuentes.
2. Devanados de estator múltiples.

El *método de polos consecuentes* es un método bastante viejo para controlar la velocidad y se desarrolló originalmente en 1897. Se basa en el hecho de que el número de polos en los devanados del estator de un motor de inducción se puede cambiar con facilidad por un factor 2:1 simplemente cambiando las conexiones de las bobinas. La figura 6-40 muestra el estator de un motor de inducción de dos polos simple adecuado para el cambio de polos. Nótese que las bobinas individuales tienen

un paso muy corto (de 60 a 90°). La figura 6-41 ilustra la fase *a* de estos devanados en forma separada para tener una mayor claridad en el detalle.

La figura 6-41*a*) muestra el flujo de corriente en la fase *a* de los devanados del estator en un instante durante la operación normal. Nótese que el campo magnético deja al estator en el grupo de fase superior (polo norte) y entra en el estator en el grupo de fase inferior (polo sur). Por lo tanto, este devanado produce dos polos magnéticos del estator.

Ahora supóngase que se invierte la dirección del flujo de corriente en el grupo de fase *inferior* en el estator (véase la figura 6-41*b*). Entonces, el campo magnético dejará el estator *tanto* en el grupo de fase superior *como* en el inferior; cada uno será un polo norte magnético. El flujo magnético de esta máquina debe regresar al estator *entre* los dos grupos de fase, produciendo un par de polos magnéticos sur *consecuentes*. Nótese ahora que el estator tiene cuatro polos magnéticos, esto es, el doble de los que tenía antes.

El rotor de un motor como éste es de jaula, puesto que un rotor de jaula siempre tiene tantos polos inducidos como polos tiene el estator y por lo tanto se puede adaptar cuando cambia el número de polos en el estator.

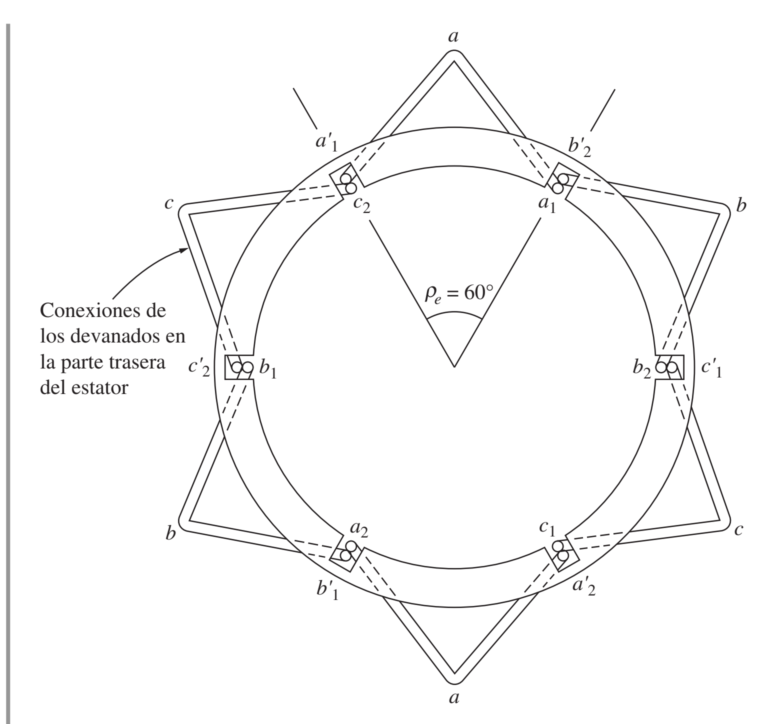


FIGURA 6-40 Devanado de estator de dos polos para cambio de polos. Nótese la bobina de rotor tan pequeña de los devanados.

Cuando se conecta un motor de dos polos para operar con cuatro polos, el par máximo resultante del motor de inducción puede ser el mismo que antes (conexión de par constante), la mitad de su valor anterior (conexión de par de acuerdo con la ley de cuadrados, que se utiliza en ventiladores, etc.) o el doble de su valor anterior (conexión de potencia de salida constante), dependiendo de cómo se acomoden los devanados del estator. La figura 6-42 muestra las posibles conexiones del estator y su efecto en la curva par-velocidad.

La principal desventaja del método de polos consecuentes para cambiar la velocidad es que las velocidades *deben* tener una relación 2:l. El método tradicional para superar esta desventaja era uti-

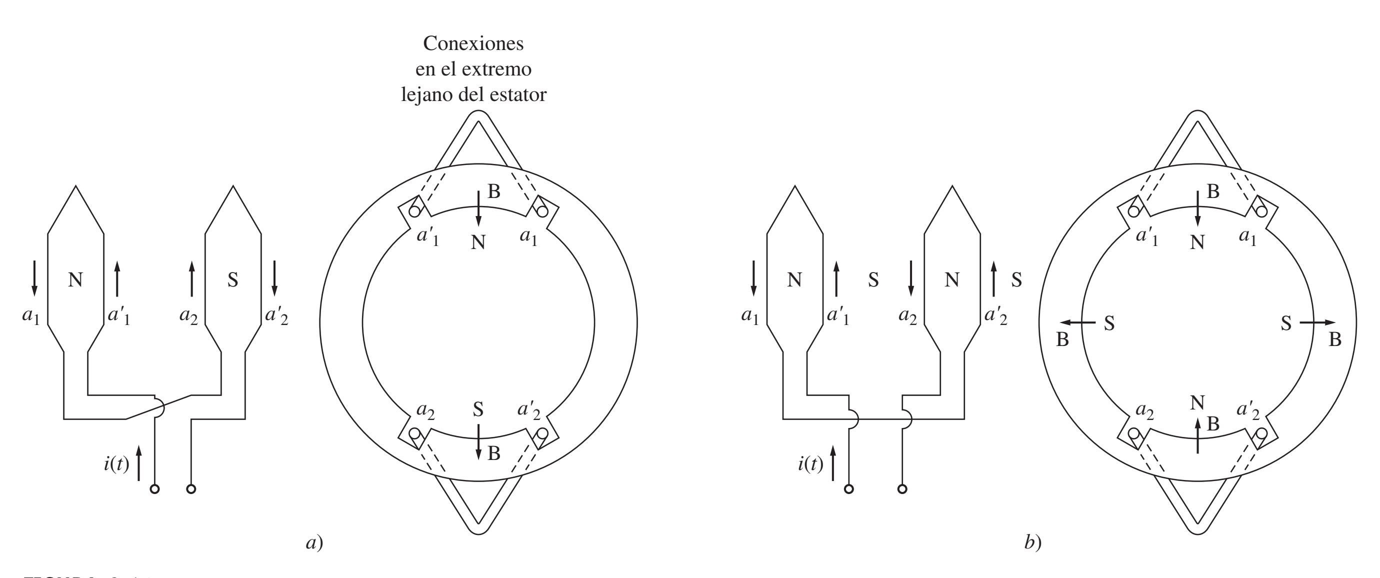
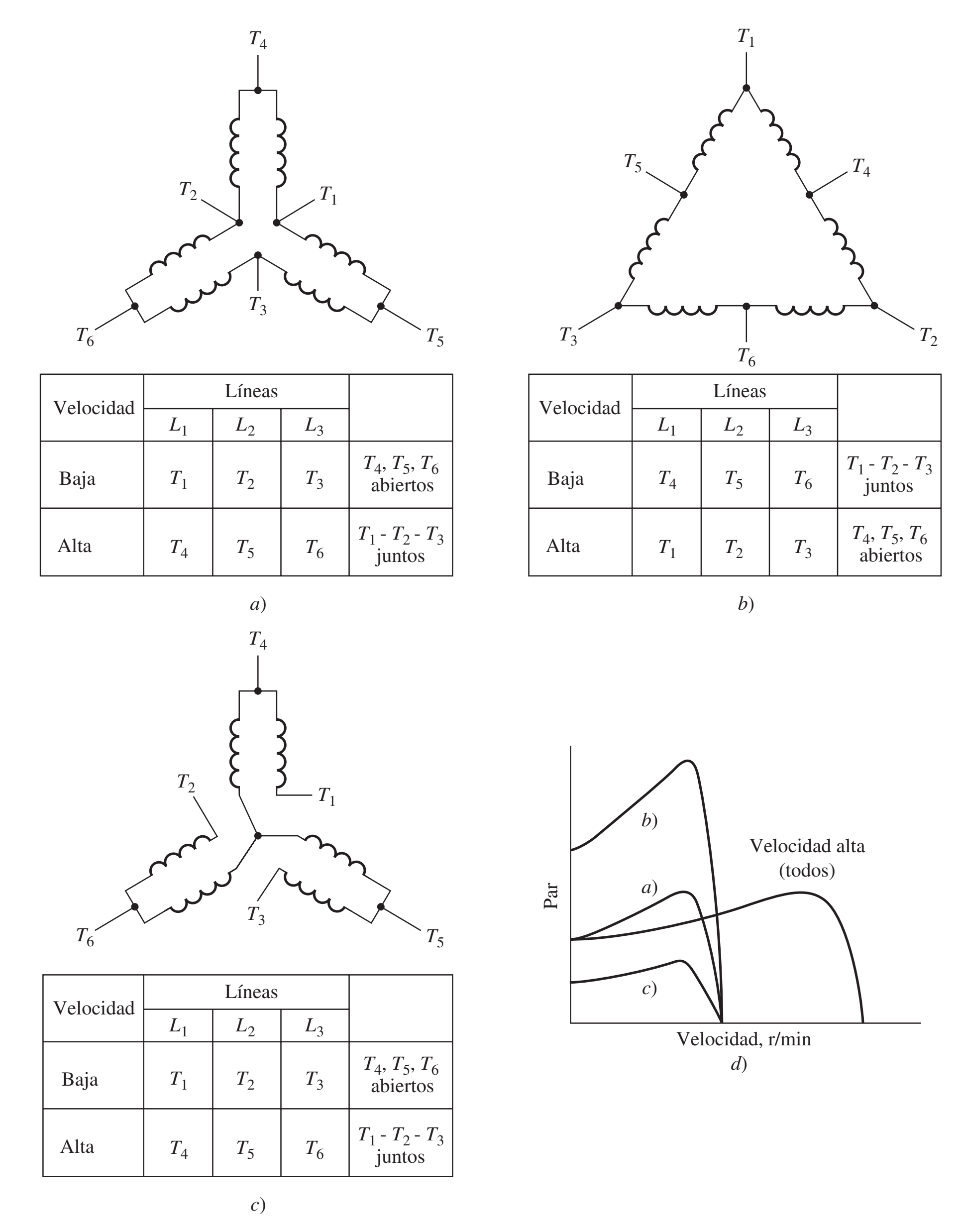


FIGURA 6-41 Vista en detalle de una fase de un devanado de polos consecuentes. *a*) En la configuración de dos polos, una bobina es el polo norte y la otra es el polo sur. *b*) Cuando se invierte la conexión de una de las dos bobinas, ambas son polos norte y el flujo magnético regresa al estator en puntos a la mitad del camino entre las dos bobinas. Los polos sur se llaman *polos consecuentes* y el devanado ahora es un devanado de cuatro polos.



Velocidad	Líneas			
	L_1	L_2	L_3	
Baja	T_1	T_2	T_3	T_4, T_5, T_6 abiertos
Alta	T_4	T_5	T_6	T_1 - T_2 - T_3 juntos

a)

Velocidad	Líneas			
	L_1	L_2	L_3	
Baja	T_4	T_5	T_6	T_1 - T_2 - T_3 juntos
Alta	T_1	T_2	T_3	T_4, T_5, T_6 abiertos

b)

Velocidad	Líneas			
	L_1	L_2	L_3	
Baja	T_1	T_2	T_3	T_4, T_5, T_6 abiertos
Alta	T_4	T_5	T_6	T_1 - T_2 - T_3 juntos

c)

FIGURA 6-42 Posibles conexiones de las bobinas del estator en un motor de polos consecuentes, junto con las características par-velocidad resultantes: *a*) *Conexión de par constante:* las capacidades de par del motor permanecen aproximadamente constantes tanto con la conexión a baja velocidad como a alta velocidad. *b*) *Conexión de potencia constante:* las capacidades de potencia del motor permanecen aproximadamente constantes tanto con la conexión a baja velocidad como a alta velocidad. *c*) *Conexión de par tipo ventilador:* las capacidades de par del motor cambian con la velocidad de la misma manera que las cargas tipo ventilador.

lizar *estatores de devanados múltiples* con diferentes cantidades de polos y energizar sólo un grupo a la vez. Por ejemplo, un motor puede ser devanado con grupos de cuatro y seis polos de devanados del estator y su velocidad síncrona en un sistema de 60 Hz se puede cambiar de 1 800 a 1 200 r/min si se suministra potencia al otro conjunto de devanados. Desafortunadamente, los estatores de devanados múltiples aumentan el costo del motor y sólo se utilizan cuando es por completo necesario.

Si se combina el método de polos consecuentes con el de estatores de devanados múltiples, se puede construir un motor de inducción con cuatro velocidades. Por ejemplo, con devanados separados de cuatro y seis polos se puede producir un motor de 60 Hz capaz de operar a 600, 900, 1 200 y 1 800 r/min.

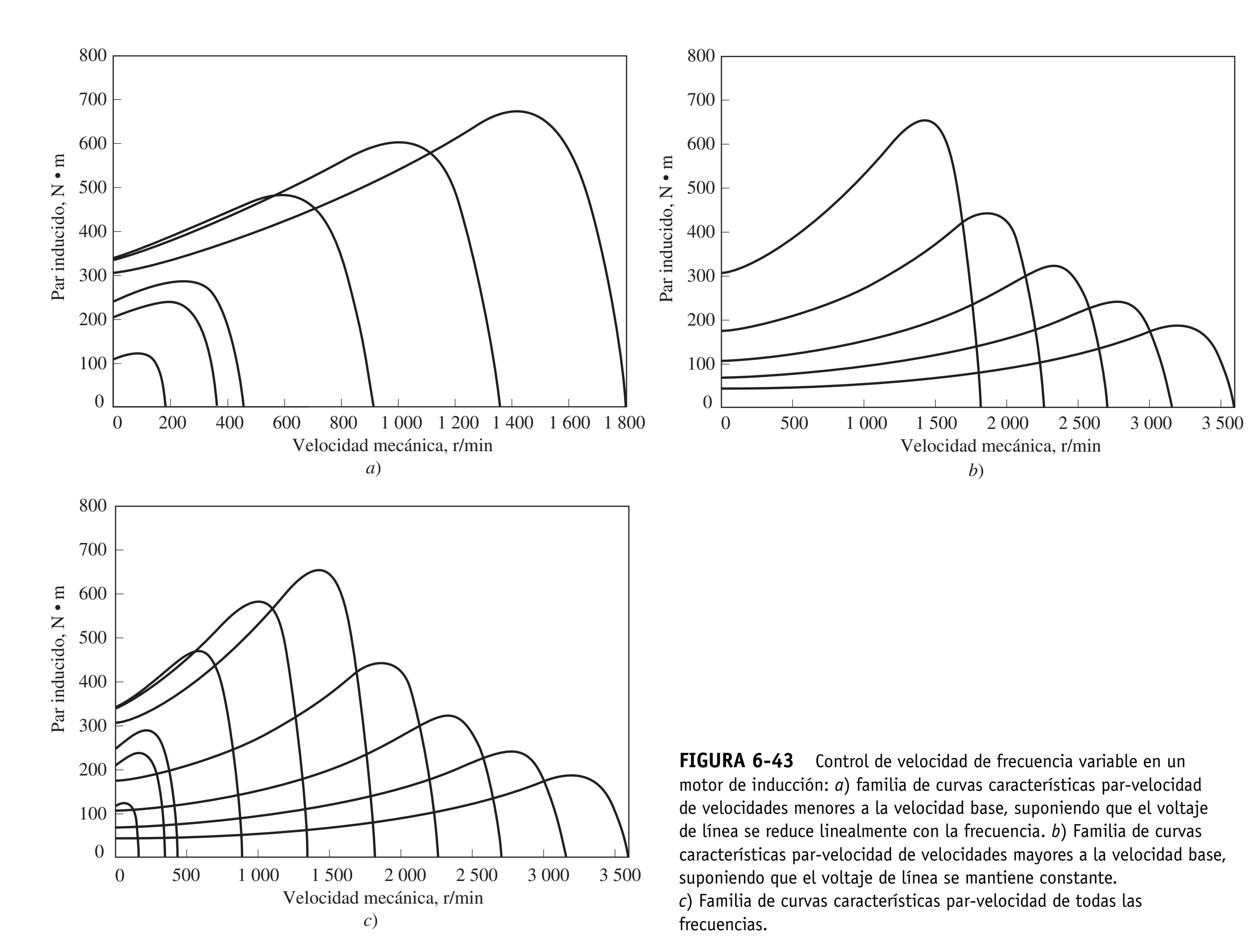


FIGURA 6-43 Control de velocidad de frecuencia variable en un motor de inducción: *a*) familia de curvas características par-velocidad de velocidades menores a la velocidad base, suponiendo que el voltaje de línea se reduce linealmente con la frecuencia. *b*) Familia de curvas características par-velocidad de velocidades mayores a la velocidad base, suponiendo que el voltaje de línea se mantiene constante. *c*) Familia de curvas características par-velocidad de todas las frecuencias.

Control de velocidad mediante el cambio en la frecuencia de la línea

Si se cambia la frecuencia eléctrica aplicada al estator de un motor de inducción, la tasa de rotación de sus campos magnéticos n_{sinc} cambiará en proporción directa con el cambio de la frecuencia eléctrica y el punto de vacío sobre la curva de la característica par-velocidad cambiará con ella (véase la figura 6-43). La velocidad síncrona del motor en condiciones nominales se conoce como *velocidad base*. Si se utiliza el control de frecuencia variable, se puede ajustar la velocidad del motor por arriba o por debajo de la velocidad base. El controlador de la frecuencia variable de un motor de inducción debidamente diseñado puede ser *muy* flexible. Puede controlar la velocidad de un motor de inducción dentro de un intervalo que va desde tan poco como 5% de la velocidad base hasta el doble de ella. Sin embargo, es importante mantener ciertos límites en el voltaje y par del motor conforme se varía la frecuencia para asegurarse de que la operación es segura.

Cuando se opera a velocidades menores a la velocidad base es necesario reducir el voltaje en los terminales aplicado al estator para obtener una operación adecuada. El voltaje en los terminales aplicado al estator debe disminuir linealmente con el decremento de la frecuencia del estator. A este proceso se le llama *degradación*. Si no se lleva a cabo, se saturará el acero en el núcleo del motor de inducción y fluirán corrientes de magnetización excesivas en la máquina.

Para entender la necesidad de la degradación, recuérdese que un motor de inducción es básicamente un transformador que gira. Como en cualquier transformador, el flujo en el núcleo de un motor de inducción se puede calcular con la ley de Faraday:

$$v(t) = -N\frac{d\phi}{dt} \qquad \textbf{(1-36)}$$

Si se aplica un voltaje $v(t) = V_M$ sen ωt al núcleo, el flujo resultantes ϕ es

$$\phi(t) = \frac{1}{N_P}\int v(t)\, dt$$

$$= \frac{1}{N_P}\int V_M \operatorname{sen} \omega t\, dt$$

$$\phi(t) = -\frac{V_M}{\omega N_P}\cos \omega t \tag{6-57}$$

Nótese que la frecuencia eléctrica aparece en el *denominador* de la expresión. Por lo tanto, si se *disminuye* 10% la frecuencia eléctrica aplicada al estator mientras que la magnitud del voltaje permanece constante, el flujo en el núcleo del motor se *incrementará* 10% y aumentará la corriente de magnetización del motor. En la región no saturada de la curva de magnetización del motor, el incremento de la corriente de magnetización también será de 10%. Sin embargo, en la región saturada de la curva de magnetización del motor, un incremento de 10% del flujo requiere un incremento mucho más grande en la corriente de magnetización. Normalmente, los motores de inducción están diseñados para operar cerca del punto de saturación de las curvas de magnetización, por lo que un incremento del flujo debido a un decremento de la frecuencia provocará que fluyan corrientes de magnetización excesivas en el motor. (Este mismo problema se presenta en los transformadores; véase la sección 2.12.)

Para evitar las corrientes de magnetización excesivas, se acostumbra disminuir el voltaje aplicado al estator en proporción directa con la disminución de la frecuencia siempre que ésta caiga por debajo del valor de la frecuencia nominal del motor. Puesto que el voltaje aplicado v aparece en el numerador de la ecuación (6-57) y la frecuencia ω aparece en el denominador, los dos efectos se contrarrestan entre sí y la corriente de magnetización no se ve afectada.

Cuando el voltaje aplicado a un motor de inducción varía en forma lineal con una frecuencia menor a la velocidad base, el flujo en el motor permanecerá aproximadamente constante. Por lo tanto, el par máximo que el motor puede suministrar permanece relativamente alto. Sin embargo, la potencia máxima nominal del motor debe decaer en forma lineal con las disminuciones de la frecuencia para proteger el circuito del estator de un sobrecalentamiento. La potencia que se suministra a un motor de inducción trifásico está dada por

$$P = \sqrt{3}V_L I_L \cos \theta$$

Si se disminuye el voltaje V_L, la potencia máxima P también se debe disminuir, pues de otro modo la corriente que fluye en el motor será excesiva y el motor se sobrecalentará.

La figura 6-43*a*) muestra una familia de curvas características par-velocidad de un motor de inducción en el caso de velocidades por debajo de la velocidad base, suponiendo que la magnitud del voltaje del estator varía en forma lineal con la frecuencia.

Cuando la frecuencia eléctrica aplicada al motor excede la frecuencia nominal del motor, el voltaje del estator se mantiene constante en su valor nominal. Aunque ciertas consideraciones de saturación permiten que el voltaje se eleve por arriba de su valor nominal en estas circunstancias, está limitado al voltaje nominal para proteger el aislamiento del devanado del motor. Mientras más alta sea la frecuencia eléctrica por arriba de la velocidad base, mayor será el denominador de la ecuación (6-57). Puesto que el numerador se mantiene constante por arriba de la frecuencia nominal, el flujo resultante en la máquina disminuye y el par máximo se incrementa. La figura 6-43*b*) muestra una familia de curvas características par-velocidad de un motor de inducción de velocidades por arriba de la velocidad máxima, suponiendo que el voltaje en el estator se mantiene constante.

Si el voltaje en el estator varía linealmente con la frecuencia por debajo de la velocidad base y se mantiene constante en un valor nominal superior a la velocidad base, la familia resultante característica par-velocidad será la que se observa en la figura 6-43*c*). La velocidad nominal del motor que se muestra en la figura 6-43 es de 1 800 r/min.

En el pasado la principal desventaja del control de la frecuencia eléctrica como método para cambiar la velocidad era que se requería un generador o cambiador mecánico de frecuencia ex-

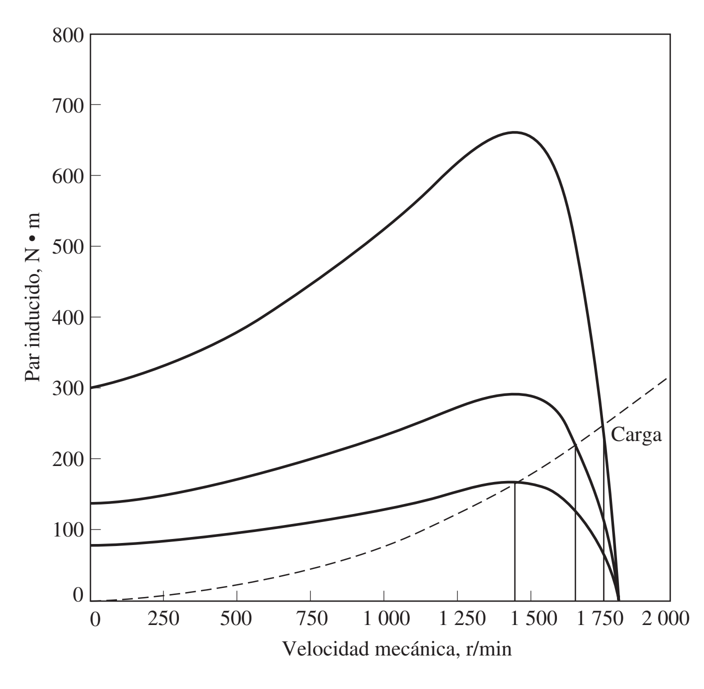


FIGURA 6-44 Control de velocidad con voltaje de línea variable en un motor de inducción.

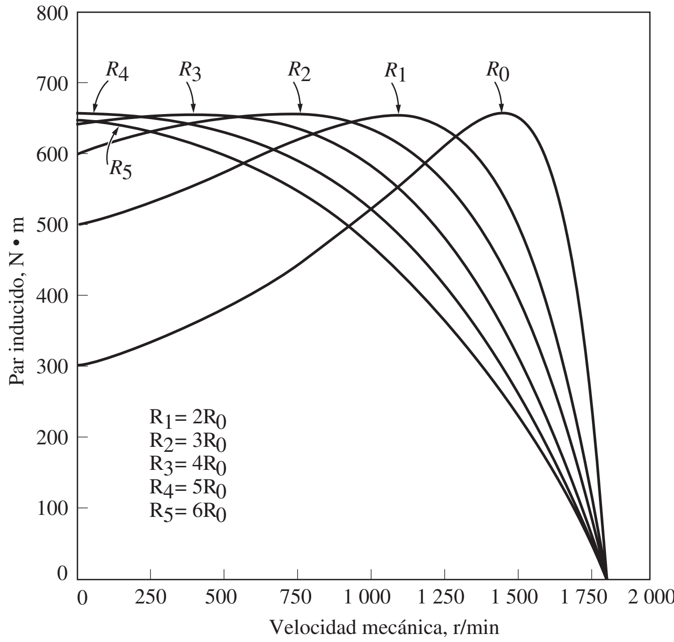


FIGURA 6-45 Control de velocidad por medio de la variación de la resistencia del rotor de un motor de inducción con rotor devanado.

clusivo para que operara. Este problema ya no existe debido al desarrollo de los controladores de frecuencia variable de motor en estado sólido modernos. En realidad, el cambio de la frecuencia en la línea por medio de controladores de motor en estado sólido se ha convertido en el método favorito para controlar la velocidad de un motor de inducción. Nótese que este método se puede utilizar en *cualquier* motor de inducción, a diferencia de la técnica de cambio de polos, que requiere un motor con devanados del estator especiales.

En la sección 6.10 se describirá el típico controlador de frecuencia variable del motor en estado sólido.

Control de velocidad mediante el cambio del voltaje de línea

El par que desarrolla un motor de inducción es proporcional al cuadrado del voltaje que se aplica. Si una carga tiene una característica par-velocidad como la que se muestra en la figura 6-44, la velocidad del motor se puede controlar dentro de un intervalo limitado por medio del cambio en el voltaje de línea. Este método de control de velocidad a veces se utiliza para manejar pequeños motores de ventilación.

Control de velocidad mediante el cambio de la resistencia del rotor

En los motores de inducción con rotor devanado es posible cambiar la forma de la curva par-velocidad por medio de la inserción de resistencias extra en el circuito del rotor de la máquina. En la figura 6-45 se muestran las curvas características par-velocidad resultantes. Si la curva par-velocidad de la carga es la que se observa en la figura, entonces el cambio en la resistencia del rotor cambiará la velocidad de operación del motor. Sin embargo, insertar resistencia extra al circuito del rotor de un motor de inducción reduce en forma severa la eficiencia de la máquina.

Este método de control de velocidad tiene un interés principalmente histórico, porque ya se fabrican muy pocos motores de inducción con rotor devanado. Cuando se usa, por lo general es sólo durante periodos cortos, debido al problema de eficiencia que se mencionó en el párrafo anterior.

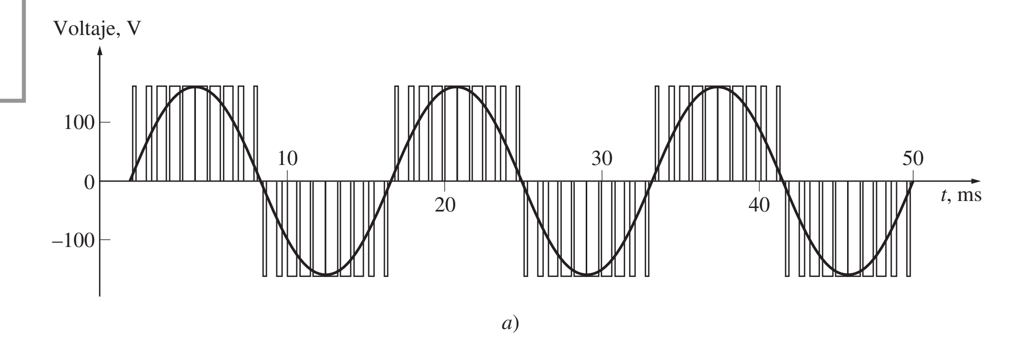


FIGURA 6-46 Controlador de un motor de inducción de frecuencia variable en estado sólido típico. (*Cortesía de MagneTek, Inc.*)

6.10 CONTROLADORES DE ESTADO SÓLIDO PARA MOTORES DE INDUCCIÓN

Como se mencionó en la sección anterior, el método que se prefiere hoy en día para controlar la velocidad de los motores de inducción son los controladores de frecuencia variable para motores de inducción de estado sólido. En la figura 6-46 se muestra un controlador típico de este tipo. El controlador es muy flexible: su potencia de entrada puede ser monofásica o trifásica, a 50 o 60 Hz y entre 208 y 230 V. La forma de salida de este controlador es un conjunto de voltajes trifásicos cuya frecuencia puede variar entre 0 y 120 Hz y cuyo voltaje puede variar de 0 V hasta el voltaje nominal del motor.

El voltaje de salida y control de frecuencia se lleva a cabo por medio de las técnicas de modulación de amplitud de pulso (PWM)[1]. Tanto la frecuencia como el voltaje de salida se pueden controlar de manera independiente por medio de la modulación de la amplitud de pulso. En la figura 6-47 se puede observar la forma en que un controlador PWM puede controlar la frecuencia de salida mientras mantiene un nivel de voltaje rms constante, en tanto que la figura 6-48 ilustra la forma en que el controlador PWM puede controlar el nivel de voltaje rms mientras mantiene la frecuencia constante.



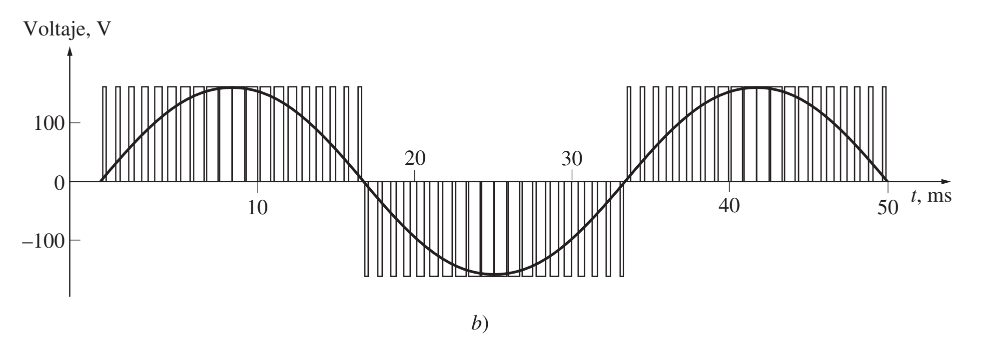
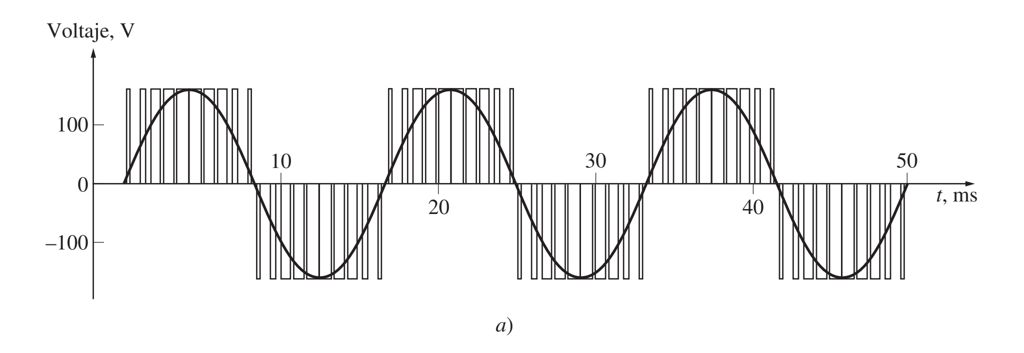


FIGURA 6-47 Control de frecuencia variable con modulación de amplitud de pulso PWM: *a*) onda PWM de 60 Hz y 120 V; *b*) onda PWM de 30 Hz y 120 V.

Como se describió en la sección 6.9, a menudo se desea modificar la frecuencia de salida y el voltaje rms de salida en su conjunto de manera lineal. En la figura 6-49 se pueden ver ondas típicas de voltaje de salida de una fase del controlador cuando la frecuencia y el voltaje varían simultáneamente de manera lineal.[2] La figura 6-49*a*) ilustra el voltaje de salida ajustado a una frecuencia de 60 Hz y un voltaje rms de 120 V. La figura 6-49*b*) muestra la salida ajustada a una frecuencia de 30 Hz y un voltaje rms de 60 V y en la figura 6-49*c*) se observa la salida ajustada a una frecuencia de 20 Hz y un voltaje rms de 40 V. Nótese que el voltaje pico que sale del controlador permanece

[1] Las técnicas PWM se describen en un suplemento en línea a este libro "Introduction to Power Electronics", que está disponible en el sitio web del libro.

[2] Las ondas de salida de la figura 6-48 son en realidad ondas simplificadas. El controlador de un motor de inducción real tiene una frecuencia portadora mucho mayor a la que se muestra en la figura.



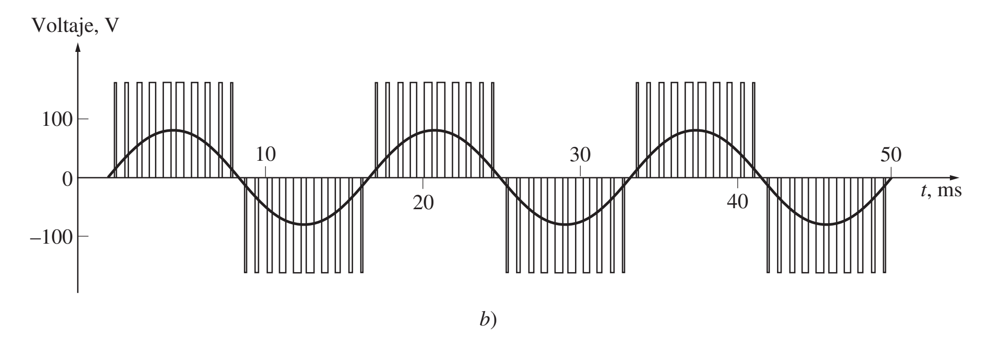


FIGURA 6-48 Control de voltaje variable con onda PWM: *a*) onda PWM de 60 Hz y 120 V; *b*) onda PWM de 60 Hz y 60 V.

igual en los tres casos; el nivel del voltaje rms se controla por la fracción de tiempo en que el voltaje está encendido y la frecuencia se controla por la tasa a la que la polaridad de los pulsos cambia de positivo a negativo y de regreso.

En la figura 6-46 se muestra el controlador de un motor de inducción típico con muchos elementos incorporados que contribuyen a su capacidad de ajuste y facilidad de uso. A continuación se presenta un resumen de algunos de estos elementos.

Ajuste de frecuencia (velocidad)

La frecuencia de salida del controlador se puede manejar de manera manual con un control montado en el gabinete de mando o remotamente con una señal de voltaje o corriente externos. La capacidad para ajustar la frecuencia del controlador en respuesta a alguna señal externa es muy importante, puesto que permite que una computadora o controlador de procesos externos regule la velocidad del motor de acuerdo con las necesidades generales de la planta en la que esté instalado.

Selección de patrones de voltaje y de frecuencia

Los tipos de cargas mecánicas que se pueden imponer a un motor de inducción varían mucho. Algunas cargas, como los ventiladores, requieren un par pequeño en el arranque (u operar a bajas velocidades) y tener pares que se incrementen con el cuadrado de la velocidad. Otras cargas pueden ser más difíciles de arrancar y requieren un par mayor al nominal a plena carga del motor para que la carga se comience a mover. Este control proporciona una gran variedad de patrones de voltaje y frecuencia que se pueden seleccionar para conseguir que el par del motor de inducción sea igual al par que requiere su carga. En las figuras 6-50 a 6-52 se pueden ver tres de estos patrones.

La figura 6-50*a*) muestra el patrón estándar o de voltaje y frecuencia de propósito general que se describió en la sección anterior. Este patrón cambia linealmente el voltaje de salida ante cambios en la frecuencia de salida en el caso de velocidades menores a la velocidad base y mantiene constante el voltaje de salida en el de velocidades por arriba de la velocidad base. (La pequeña región de voltaje constante a frecuencias muy bajas se requiere para asegurar que se tendrá algún par de arranque en

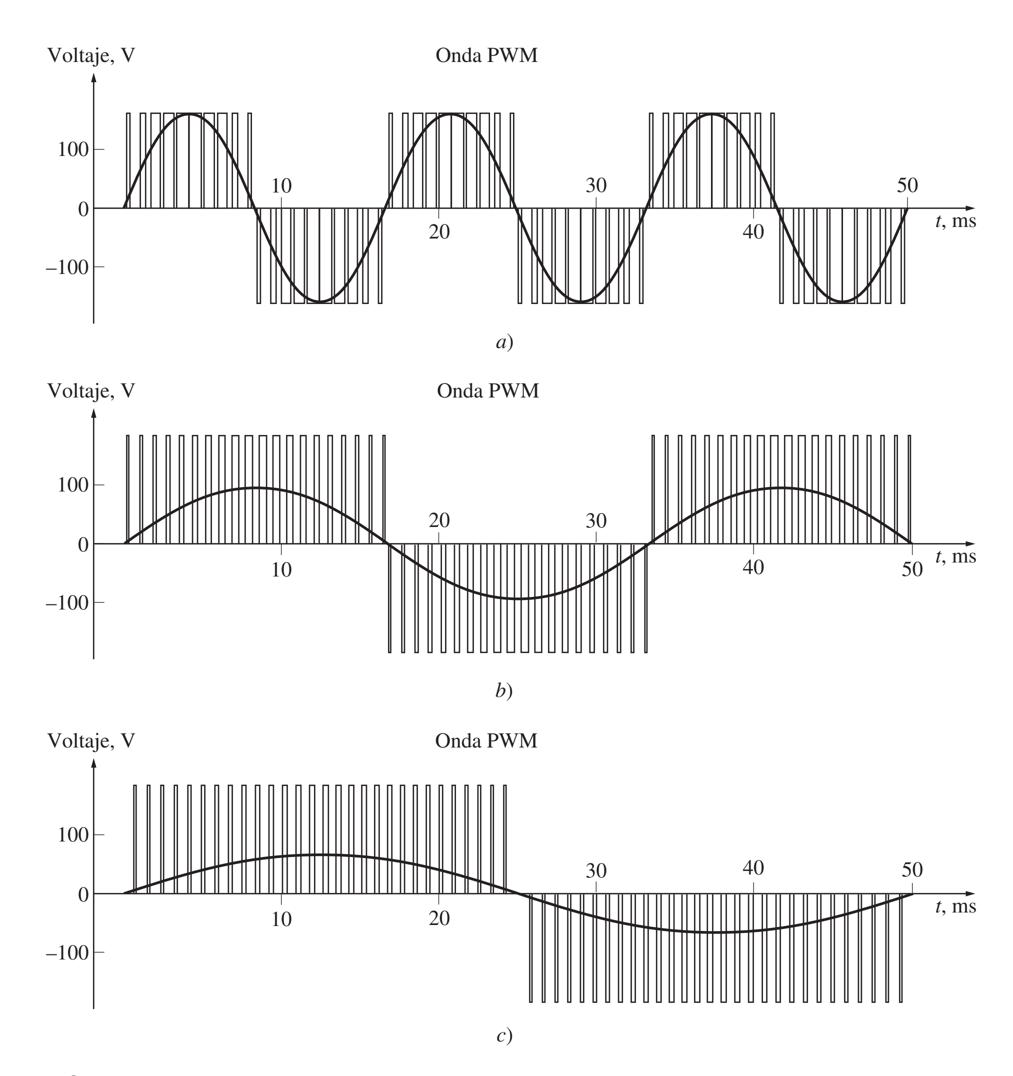


FIGURA 6-49 Control de frecuencia y voltaje simultáneo con onda PWM: *a*) onda PWM de 60 Hz y 120 V; *b*) onda PWM de 30 Hz y 60 V; *c*) onda PWM de 20 Hz y 40 V.

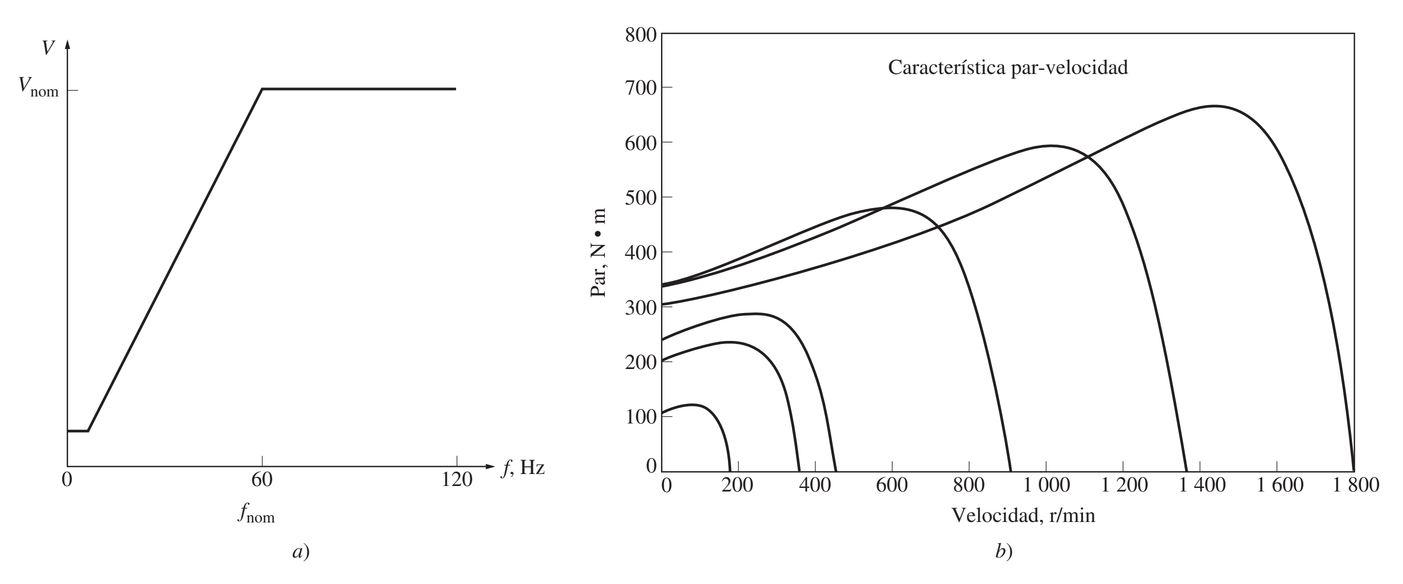


FIGURA 6-50 *a*) Posibles patrones de voltaje-frecuencia de un controlador de motor de inducción de frecuencia variable de estado sólido: *patrón de uso general*. Este patrón consta de una curva de frecuencia-voltaje lineal por debajo de la frecuencia nominal y un voltaje constante por arriba de la frecuencia nominal. *b*) Curvas características par-velocidad resultantes de velocidades por debajo de la frecuencia nominal (cuando las velocidades superan la frecuencia nominal, la curva se ve como la que se muestra en la figura 6-42*b*).

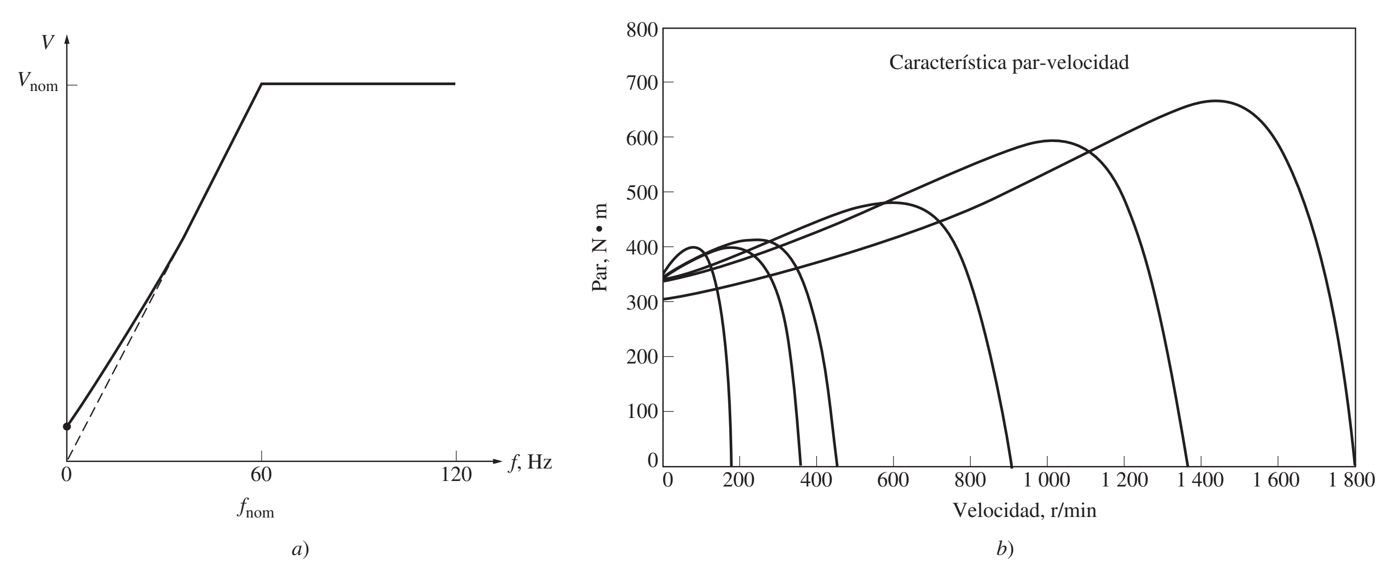


FIGURA 6-51 *a*) Posibles patrones de voltaje-frecuencia de un controlador de motor de inducción de frecuencia variable de estado sólido: *patrón de par de arranque alto*. Éste es un patrón de frecuencia-voltaje modificado que se adecua para el caso de cargas que requieren un par de arranque alto. Es el mismo patrón que el de frecuencia-voltaje lineal excepto a velocidades bajas. El voltaje es desproporcionadamente alto a velocidades muy bajas, lo que produce un par extra a cambio de una corriente de magnetización más alta. *b*) Curvas características par-velocidad resultantes cuando las velocidades son inferiores a la frecuencia nominal (cuando las velocidades superan la frecuencia nominal, la curva se ve como la de la figura 6-42*b*).

las velocidades más bajas.) La figura 6-50*b*) muestra las características par-velocidad del motor de inducción resultantes de varias frecuencias de operación por debajo de la velocidad base.

La figura 6-51*a*) ilustra el patrón de voltaje y frecuencia que se utiliza en el caso de cargas con par de arranque alto. Este patrón también cambia linealmente el voltaje de salida con cambios en la frecuencia de entrada cuando las velocidades son inferiores a la velocidad base, pero tiene una pendiente moderada en el caso de frecuencias por debajo de los 30 Hz. Con cualquier frecuencia menor a 30 Hz, el voltaje de salida será *mayor* de lo que era con el patrón anterior. Este mayor voltaje producirá un par más grande, pero a cambio de aumentar la saturación magnética y tener mayores corrientes de magnetización. El aumento de la saturación y esta corriente más alta a menudo son aceptables para los periodos tan cortos en que se requiere arrancar cargas pesadas. La figura 6-51*b*) muestra las características par-velocidad de un motor de inducción cuando varias frecuencias de operación son inferiores a la velocidad base. Nótese el aumento del par disponible a bajas frecuencias en comparación con la figura 6-50*b*).

En la figura 6-52*a*) se puede observar el patrón de voltaje y frecuencia que se utiliza con cargas que tienen pares de arranque pequeños (llamadas *cargas de arranque suave*). Este patrón cambia parabólicamente el voltaje de salida con cambios en la frecuencia de salida en el caso de velocidades por debajo de la velocidad base. Con cualquier frecuencia por debajo de 60 Hz, el voltaje de salida será menor de lo que era con el patrón estándar. Este menor voltaje producirá un par menor, proporcionando un arranque más lento y suave en el caso de cargas de bajo par. La figura 6-52*b*) muestra las características par-velocidad de un motor de inducción para varias frecuencias de operación por debajo de la velocidad base. Nótese la disminución del par disponible a bajas frecuencias en comparación con la figura 6-50.

Rampas de aceleración y desaceleración ajustables de manera independiente

Cuando la velocidad de operación del motor deseada cambia, el controlador que lo maneja modifica la frecuencia para llevar al motor a la nueva velocidad de operación. Si el cambio de velocidad es súbito (esto es, un salto instantáneo de 900 a 1 200 r/min), el controlador no intenta que el motor salte de la anterior velocidad deseada a la nueva velocidad de manera instantánea. En cambio, la tasa de

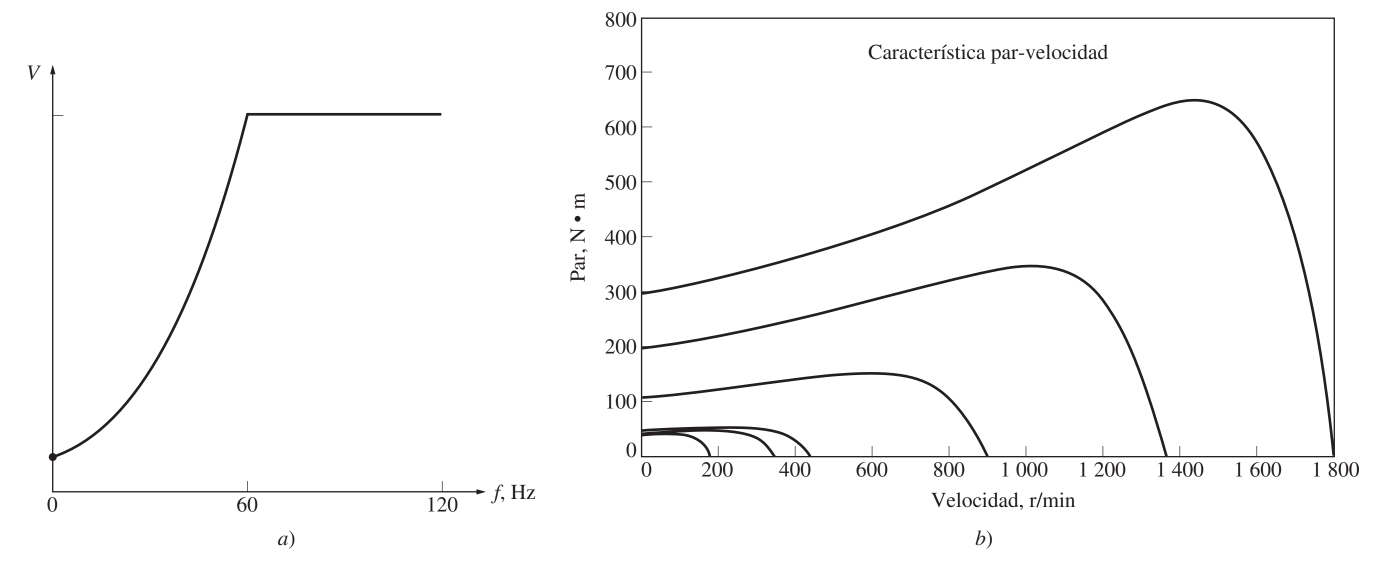


FIGURA 6-52 *a*) Posibles patrones de voltaje-frecuencia de un controlador de motor de inducción de frecuencia variable de estado sólido: *patrón de par tipo ventilador.* Este patrón voltaje-frecuencia es adecuado para utilizarlo en motores que manejan ventiladores o bombas centrífugas, que tienen un par de arranque muy bajo. *b*) Curvas características par-velocidad resultantes en el caso de velocidades por debajo de la frecuencia nominal (para velocidades por arriba de la frecuencia nominal, la curva se ve como la de la figura 6-42*b*).

aceleración o desaceleración del motor se limita a un nivel seguro por medio de circuitos especiales contenidos en la electrónica del controlador. Estas tasas se pueden ajustar en forma independiente para acelerar o desacelerar.

Protección del motor

El controlador de un motor de inducción tiene diversos elementos diseñados para proteger el motor adjunto al controlador. El controlador puede detectar las corrientes en estado estacionario excesivas (una condición de sobrecarga), corrientes instantáneas excesivas, condiciones de sobrevoltaje o de bajo voltaje. En cualquiera de estos casos, apagará el motor.

Los controladores de motores de inducción, como el antes descrito, son tan flexibles y confiables que los motores de inducción con estos controladores están desplazando a los motores de cd en muchas aplicaciones que requieren una amplia gama de variación de velocidad.

6.11 DETERMINACIÓN DE LOS PARÁMETROS DEL MODELO DEL CIRCUITO

El circuito equivalente de un motor de inducción es muy útil para determinar la respuesta del motor ante cambios en la carga. Sin embargo, si se va a utilizar un modelo de una máquina real, se requiere determinar qué valores de los elementos entrarán en el modelo. ¿Cómo se pueden determinar R_1, R_2, X_1, X_2 y X_M para un motor real?

Esta información se puede encontrar por medio de la realización de una serie de pruebas al motor de inducción que son análogas a las pruebas de cortocircuito y de circuito abierto en un transformador. Las pruebas se deben llevar a cabo en condiciones controladas con mucha precisión, puesto que las resistencias varían con la temperatura, mientras que la resistencia del rotor lo hace con la frecuencia del rotor. Los detalles exactos sobre cómo se debe llevar a cabo cada prueba del motor de inducción para obtener resultados exactos se describen en la Norma IEEE 112. A pesar de que los detalles de las pruebas son muy complicados, los conceptos detrás de ellos son relativamente sencillos y se explican a continuación.

Prueba en vacío

La prueba en vacío de un motor de inducción mide las pérdidas rotacionales del motor y brinda información sobre su corriente de magnetización. El circuito de prueba se muestra en la figura 6-53*a*). Se conectan los watímetros, el voltímetro y tres amperímetros al motor, al que se le permite girar libremente. La única carga en el motor son las pérdidas por fricción y por rozamiento con el aire, por lo que toda la P_{conv} del motor se consume en pérdidas mecánicas y el deslizamiento del motor es muy pequeño (tal vez hasta 0.001 o menos). En la figura 6-53*b*) se puede ver el circuito equivalente de este motor. Con este deslizamiento tan pequeño, la resistencia que corresponde a la potencia convertida, $R_2(1 - s)/s$, es mucho mayor que la resistencia que corresponde a las pérdidas en el cobre del rotor R_2 y mucho mayor que la reactancia del rotor X_2. En este caso, el circuito equivalente se reduce aproximadamente al último circuito de la figura 6-53*b*). En éste, el resistor de salida está en paralelo con la reactancia de magnetización X_M y las pérdidas en el núcleo R_C.

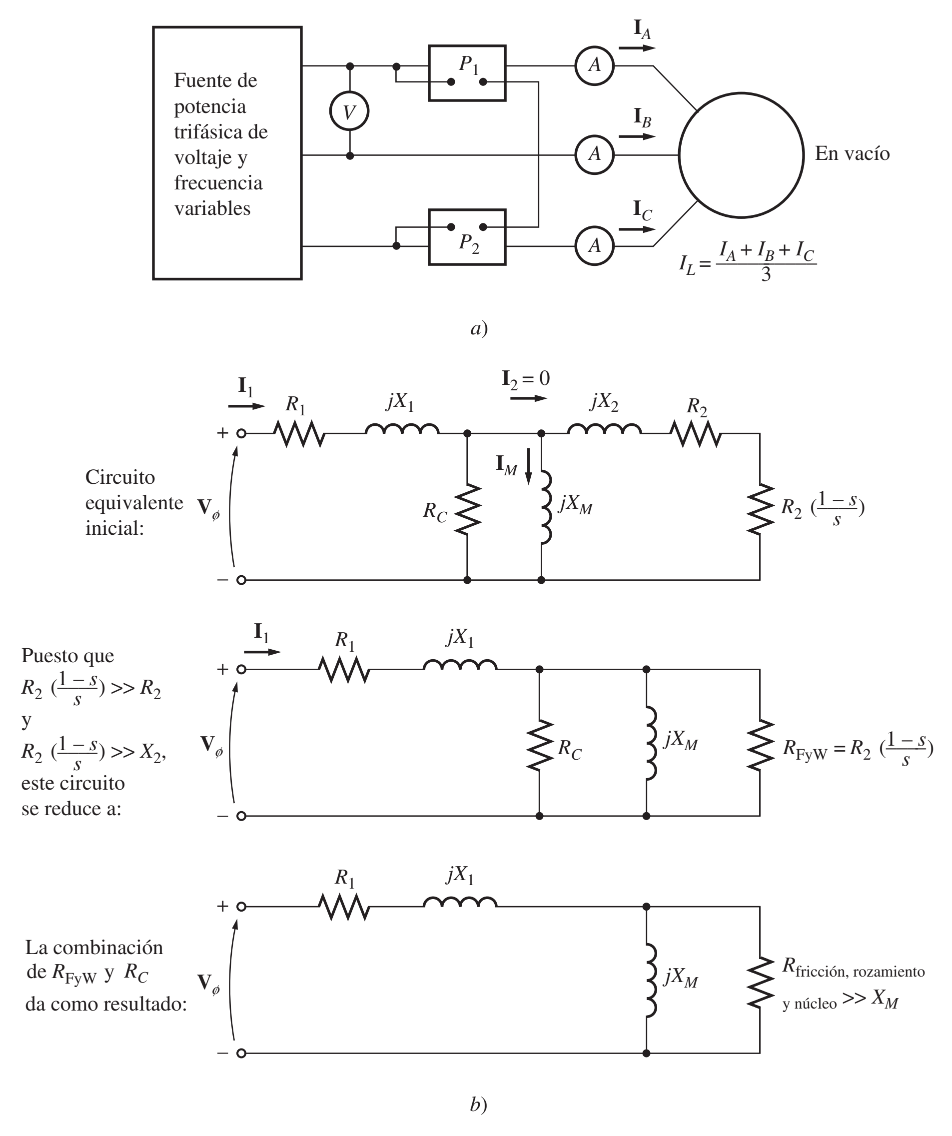


FIGURA 6-53 Prueba en vacío de un motor de inducción: *a*) circuito de prueba; *b*) circuito equivalente del motor resultante. Nótese que en vacío la impedancia del motor es esencialmente la combinación en serie de R_1, jX_1 y jX_M.

En este motor en condiciones de vacío, la potencia de entrada medida por los wattímetros debe ser igual a las pérdidas que sufre. Las pérdidas en el cobre del rotor son despreciables porque la co-

rriente I_2 es *extremadamente* pequeña [debido a la gran resistencia de carga $R_2(1 - s)/s$], por lo que se pueden despreciar. Las pérdidas en el cobre del estator están dadas por

$$P_{PCE} = 3I_1^2 R_1 \tag{6-25}$$

por lo que la potencia de entrada debe ser igual a

$$\begin{aligned} P_{entr} &= P_{PCE} + P_{núcl} + P_{FyR} + P_{misc} \\ &= 3I_1^2 R_1 + P_{rot} \end{aligned} \tag{6-58}$$

donde P_{rot} son las pérdidas rotatorias del motor:

$$P_{rot} = P_{núcl} + P_{FyR} + P_{misc} \tag{6-59}$$

Entonces, dada la potencia de entrada al motor, se pueden determinar las pérdidas rotatorias de la máquina.

El circuito equivalente que describe al motor operando en esta condición contiene resistores R_C y $R_2(1 - s)/s$ en paralelo con la reactancia de magnetización X_M. La corriente que se requiere para establecer un campo magnético es bastante grande en un motor de inducción debido a la alta reluctancia de su entrehierro, por lo que la reactancia X_M será mucho más pequeña que las resistencias conectadas en paralelo con ella y el factor de potencia de entrada total será muy pequeño. Con una corriente en retraso tan grande, la mayoría de la caída del voltaje se presentará a través de los componentes inductivos del circuito. Entonces, la impedancia de entrada equivalente es aproximadamente

$$\left|Z_{eq}\right| = \frac{V_\phi}{I_{1,sc}} \approx X_1 + X_M \tag{6-60}$$

y si se puede encontrar X_1 de otra manera, se sabrá la impedancia de magnetización X_M del motor.

Prueba de cd para determinar la resistencia del estator

La resistencia del rotor R_2 juega un papel extremadamente importante en la operación de un motor de inducción. Entre otras cosas, determina la forma de la curva par-velocidad pues especifica la velocidad a la que se presenta el par máximo. Se puede utilizar una prueba estándar llamada *prueba de rotor bloqueado* para establecer la resistencia total del circuito del motor (esta prueba se describe en la siguiente sección). Sin embargo, esta prueba sólo determina la resistencia *total*. Para encontrar exactamente la resistencia del rotor R_2, se requiere saber R_1 para que se pueda restar del total.

La prueba para R_1, independiente de R_2, X_1 y X_2, se llama *prueba de cd*. Básicamente, se aplica voltaje de cd a los devanados del estator de un motor de inducción. Puesto que la corriente es de cd, no hay voltaje inducido en el circuito del rotor y no hay flujo de corriente resultante en el rotor. Además, la reactancia del motor es cero con corriente directa. Por lo tanto, la única cantidad que limita el flujo de corriente en el motor es la resistencia del estator y de esta manera se puede calcular esta resistencia.

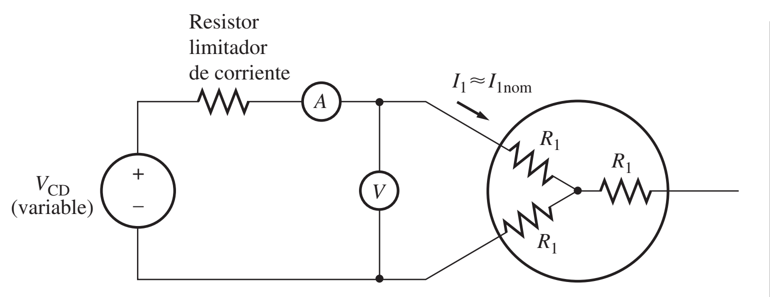


FIGURA 6-54 Circuito de prueba de una prueba de cd de resistencia.

En la figura 6-54 se observa el circuito básico para la prueba de cd. Esta figura muestra una fuente

de potencia de cd conectada a dos de los tres terminales de un motor de inducción conectado en Y. Para realizar esta prueba, se ajusta la corriente en los devanados del estator a su valor nominal y se mide el voltaje entre los terminales. Se ajusta la corriente en los devanados del estator a su valor nominal en un intento por calentar los devanados a la misma temperatura que tendrían durante la operación normal (recuérdese que la resistencia del devanado está en función de la temperatura).

La corriente de la figura 6-54 fluye a través de dos de los devanados, por lo que la resistencia total en el camino de la corriente es $2R_1$. Por lo tanto,

$$2R_1 = \frac{V_{CD}}{I_{CD}}$$

o

$$R_1 = \frac{V_{CD}}{2I_{CD}} \tag{6-61}*$$

Con este valor de R_1 se pueden determinar las pérdidas en el cobre del estator en vacío, y se pueden encontrar las pérdidas rotacionales restando la potencia de entrada en vacío y las pérdidas en el cobre del estator.

El valor de R_1 calculado de esta manera no es exacto, puesto que desprecia el efecto pelicular que se presenta cuando se aplica un voltaje de ca a los devanados. En la Norma IEEE 112 se pueden encontrar más detalles sobre las correcciones de la temperatura y el efecto pelicular.

Prueba del rotor bloqueado

La tercera prueba que se puede llevar a cabo en un motor de inducción para determinar los parámetros de su circuito, llamada *prueba de rotor bloqueado* o *prueba de rotor enclavado*, corresponde a la prueba de cortocircuito de un transformador. En esta prueba se bloquea o enclava el rotor para que *no se pueda* mover, se aplica un voltaje al motor y se miden el voltaje, la corriente y la potencia resultantes.

La figura 6-55*a*) muestra las conexiones para la prueba del rotor bloqueado. Para llevarla a cabo, se aplica un voltaje de ca al estator y se ajusta el flujo de corriente para que sea aproximadamente su valor a plena carga. Cuando la corriente tiene su valor a plena carga, se miden el voltaje, la corriente y la potencia que fluyen en el motor. En la figura 6-55*b*) se puede ver el circuito equivalente de esta prueba. Nótese que puesto que el rotor no se mueve, el deslizamiento $s = 1$ y por lo tanto la resistencia del rotor R_2/s es igual a R_2 (un valor bastante pequeño). Debido a que R_2 y X_2 son tan pequeños, casi toda la corriente de entrada fluye a través de ellos, en lugar de a través de la reactancia de magnetización X_M que es mucho más grande. Por lo tanto, el circuito en estas circunstancias se ve como una combinación en serie de X_1, R_1, X_2 y R_2.

Sin embargo, esta prueba presenta un problema. Durante la operación normal, la frecuencia del estator es la frecuencia en la línea del sistema de potencia (50 o 60 Hz). En condiciones de arranque, el rotor también tiene la frecuencia de la línea. Sin embargo, en condiciones normales de operación, el deslizamiento de la mayoría de los motores es tan sólo de 2 a 4% y la frecuencia resultante del rotor está en el rango de 1 a 3 Hz. Esto crea un problema porque *la frecuencia de la línea no representa las condiciones normales de operación del rotor*. Puesto que la resistencia efectiva del rotor es una función de la frecuencia de los motores de diseño clases B y C, la frecuencia errónea del rotor puede provocar que la prueba produzca resultados falsos. Una solución típica es utilizar una frecuencia igual o menor a 25% de la frecuencia nominal. Aun cuando este enfoque es aceptable en el caso de rotores con resistencia constante (diseño clases A y D), deja mucho que desear cuando se trata de encontrar la resistencia normal del rotor de un rotor de resistencia variable. Debido a éstos y otros problemas similares, se debe tener mucho cuidado al tomar las medidas en estas pruebas.

---

* *Nota del RT:* En el caso de que el motor tenga los devanados de estator conectados en Delta, el valor de R_1 se determina de la siguiente forma:

$$R_1 = \frac{3V_{CD}}{2I_{CD}}$$

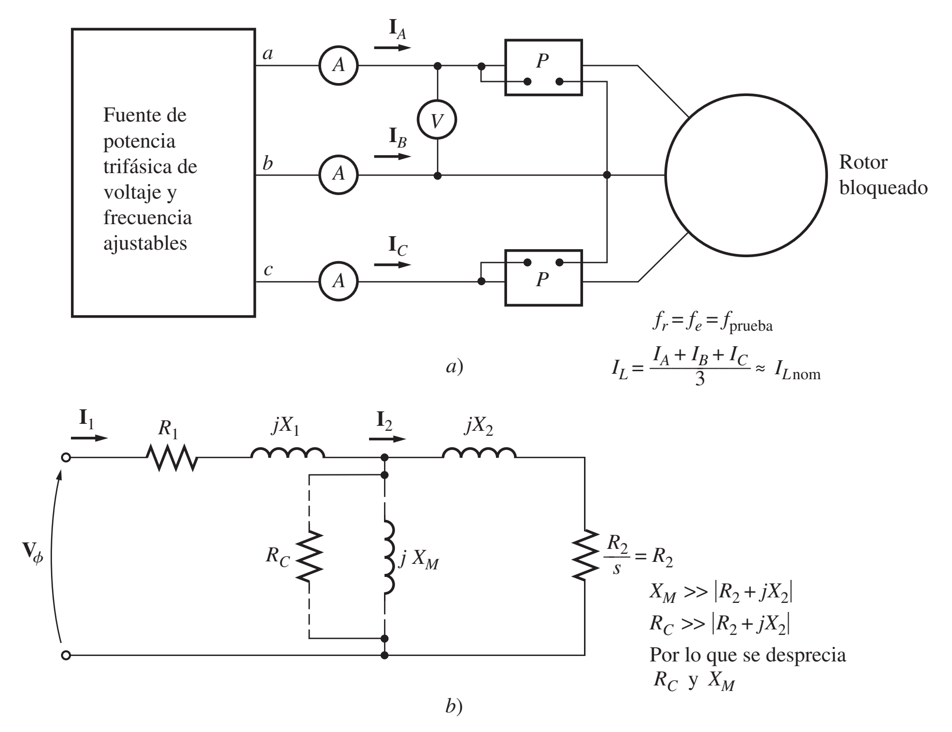


FIGURA 6-55 Prueba de rotor bloqueado de un motor de inducción: *a*) circuito de prueba; *b*) circuito equivalente del motor.

Una vez que se fijaron el voltaje y la frecuencia para la prueba, se ajusta rápidamente el flujo de corriente en el motor a un valor cercano al valor nominal y se miden la potencia de entrada, el voltaje y la corriente antes de que el rotor se caliente demasiado. La potencia de entrada al motor está dada por

$$P = \sqrt{3} V_T I_L \cos \theta$$

por lo que el factor de potencia del rotor bloqueado es

$$\text{FP} = \cos \theta = \frac{P_{\text{entr}}}{\sqrt{3} V_T I_L} \tag{6-62}$$

y el ángulo de impedancia θ es igual a $\cos^{-1}$ FP.

En este momento, la magnitud de la impedancia total en el circuito del motor es

$$|Z_{\text{RB}}| = \frac{V_\phi}{I_1} = \frac{V_T}{\sqrt{3} I_L} \tag{6-63}$$

y el ángulo de la impedancia total es θ. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} Z_{\text{RB}} &= R_{\text{RB}} + jX'_{\text{RB}} \\ &= |Z_{\text{RB}}| \cos \theta + j|Z_{\text{RB}}| \operatorname{sen} \theta \end{aligned} \tag{6-64}$$

La resistencia del rotor bloqueado R_{RB} es igual a

$$R_{\text{RB}} = R_1 + R_2 \tag{6-65}$$

y la reactancia del rotor bloqueado X'_{RB} es igual a

$$X'_{RB} = X'_1 + X'_2 \tag{6-66}$$

donde X'_1 y X'_2 son las reactancias del estator y del rotor *con respecto a la frecuencia de la prueba*, respectivamente.

Ahora se puede calcular la resistencia del rotor R_2 como

$$R_2 = R_{RB} - R_1 \tag{6-67}$$

donde R_1 se determinó en la prueba de cd. La reactancia total del rotor referida al estator también se puede calcular. Puesto que la reactancia es directamente proporcional a la frecuencia, la reactancia total equivalente a la frecuencia normal de operación es

$$X_{RB} = \frac{f_{nom}}{f_{prueba}} X'_{RB} = X_1 + X_2 \tag{6-68}$$

Desafortunadamente, no hay una forma sencilla de separar las contribuciones de las reactancias del rotor y del estator. Con el paso de los años la experiencia ha demostrado que los motores con cierto tipo de diseño muestran ciertas proporciones definidas entre las reactancias del estator y del rotor. La figura 6-56 resume la experiencia. En la práctica normal no importa cómo se separe X_{RB}, puesto que la reactancia aparece como la suma de $X_1 + X_2$ en todas las ecuaciones del par.

	X_1 y X_2 en función de X_{RB}	
Diseño del rotor	**X_1**	**X_2**
Rotor devanado	0.5 X_{RB}	0.5 X_{RB}
Diseño A	0.5 X_{RB}	0.5 X_{RB}
Diseño B	0.4 X_{RB}	0.6 X_{RB}
Diseño C	0.3 X_{RB}	0.7 X_{RB}
Diseño D	0.5 X_{RB}	0.5 X_{RB}

FIGURA 6-56 Reglas prácticas para dividir la reactancia del circuito del estator y del rotor.

EJEMPLO 6-8

Los siguientes datos se obtuvieron de unas pruebas que se le realizaron a un motor de inducción de 7.5 hp, con cuatro polos, 208 V, 60 Hz, diseño A, conectado en Y, con una corriente nominal de 28 A.

Prueba CD:

$V_{CD} = 13.6$ V $\qquad I_{CD} = 28.0$ A

Prueba en vacío:

$V_T = 208$ V $\qquad f = 60$ Hz

$I_A = 8.12$ A $\qquad P_{entr} = 420$ W

$I_B = 8.20$ A

$I_C = 8.18$ A

Prueba de rotor bloqueado:

$$V_T = 25 \text{ V} \qquad f = 15 \text{ Hz}$$
$$I_A = 28.1 \text{ A} \qquad P_{\text{entr}} = 920 \text{ W}$$
$$I_B = 28.0 \text{ A}$$
$$I_C = 27.6 \text{ A}$$

a) Dibuje el circuito equivalente por fase de este motor.
b) Encuentre el deslizamiento con par máximo y encuentre el valor del par máximo.

Solución

a) De la prueba de cd,

$$R_1 = \frac{V_{\text{CD}}}{2I_{\text{CD}}} = \frac{13.6 \text{ V}}{2(28.0 \text{ A})} = 0.243\ \Omega$$

De la prueba en vacío

$$I_{\text{L,prom}} = \frac{8.12 \text{ A} + 8.20 \text{ A} + 8.18 \text{ A}}{3} = 8.17 \text{ A}$$
$$V_{\phi,\text{sc}} = \frac{208 \text{ V}}{\sqrt{3}} = 120 \text{ V}$$

Por lo tanto,

$$|Z_{\text{sc}}| = \frac{120 \text{ V}}{8.17 \text{ A}} = 14.7\ \Omega = X_1 + X_M$$

Cuando se conoce X_1, se puede encontrar X_M. Las pérdidas en el cobre del estator son

$$P_{\text{PCE}} = 3I_1^2 R_1 = 3(8.17 \text{ A})^2(0.243\ \Omega) = 48.7 \text{ W}$$

Por lo tanto, las pérdidas giratorias en vacío son

$$\begin{aligned} P_{\text{rot}} &= P_{\text{entr, sc}} - P_{\text{SCL,sc}} \\ &= 420 \text{ W} - 48.7 \text{ W} = 371.3 \text{ W} \end{aligned}$$

De la prueba de rotor bloqueado,

$$I_{\text{L,prom}} = \frac{28.1 \text{ A} + 28.0 \text{ A} + 27.6 \text{ A}}{3} = 27.9 \text{ A}$$

La impedancia del rotor bloqueado es

$$|Z_{\text{RB}}| = \frac{V_\phi}{I_A} = \frac{V_T}{\sqrt{3}I_A} = \frac{25 \text{ V}}{\sqrt{3}(27.9 \text{ A})} = 0.517\ \Omega$$

y el ángulo de impedancia θ es

$$\begin{aligned} \theta &= \cos^{-1} \frac{P_{\text{entr}}}{\sqrt{3}V_T I_L} \\ &= \cos^{-1} \frac{920 \text{ W}}{\sqrt{3}(25 \text{ V})(27.9 \text{ A})} \\ &= \cos^{-1} 0.762 = 40.4° \end{aligned}$$

Por lo tanto, $R_{\text{RB}} = 0.517 \cos 40.4° = 0.394\ \Omega = R_1 + R_2$. Puesto que $R_1 = 0.243\ \Omega$. R_2 debe ser $0.151\ \Omega$. La reactancia a 15 Hz es

$$X'_{\text{RB}} = 0.517 \text{ sen } 40.4° = 0.335\ \Omega$$

La reactancia equivalente a 60 Hz es

$$X_{RB} = \frac{f_{nom}}{f_{prueba}} X'_{RB} = \left(\frac{60 \text{ Hz}}{15 \text{ Hz}}\right) 0.335 \ \Omega = 1.34 \ \Omega$$

En el caso de los motores de inducción de diseño clase A, se supone que esta reactancia se divide equitativamente entre el rotor y el estator, por lo que

$$X_1 = X_2 = 0.67 \ \Omega$$
$$X_M = |Z_{sc}| - X_1 = 14.7 \ \Omega - 0.67 \ \Omega = 14.03 \ \Omega$$

En la figura 6-57 se muestra el circuito equivalente por fase final.

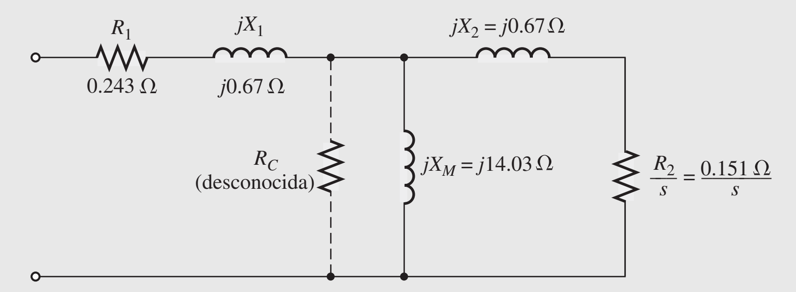


FIGURA 6-57 Circuito equivalente por fase del motor del ejemplo 6-8.

b) Para este circuito equivalente, los equivalentes de Thevenin se encuentran por medio de las ecuaciones (6-41*b*), (6-44) y (6-45) y son

$$V_{TH} = 114.6 \text{ V} \qquad R_{TH} = 0.221 \ \Omega \qquad X_{TH} = 0.67 \ \Omega$$

Por lo tanto, el deslizamiento con el par máximo está dado por

$$s_{máx} = \frac{R_2}{\sqrt{R_{TH}^2 + (X_{TH} + X_2)^2}} \tag{6-53}$$
$$= \frac{0.151 \ \Omega}{\sqrt{(0.243 \ \Omega)^2 + (0.67 \ \Omega + 0.67 \ \Omega)^2}} = 0.111 = 11.1\%$$

El par máximo de este motor está dado por

$$\tau_{máx} = \frac{3V_{TH}^2}{2\omega_{sinc}\left[R_{TH} + \sqrt{R_{TH}^2 + (X_{TH} + X^2)}\right]} \tag{6-54}$$
$$= \frac{3(114.6 \text{ V})^2}{2(188.5 \text{ rad/s})[0.221 \ \Omega + \sqrt{(0.221 \ \Omega)^2 + (0.67 \ \Omega + 0.67 \ \Omega)^2}]}$$
$$= 66.2 \text{ N} \bullet \text{m}$$

6.12 EL GENERADOR DE INDUCCIÓN

La curva característica par-velocidad de la figura 6-20 muestra que si un motor primario externo acciona un motor de inducción a una velocidad *mayor* a n_{sinc}, la dirección de su par inducido se invertirá y comenzará a operar como generador. A medida que se incrementa el par que aplica el motor primario a su eje, aumenta la cantidad de potencia que produce el generador de inducción. Como se ilustra en la figura 6-58, hay un par inducido máximo posible en el modo de operación como generador. Este par se conoce como *par máximo del generador*. Si un motor primario aplica al eje de un generador de inducción un par mayor que el par máximo del generador éste adquirirá una velocidad excesiva.

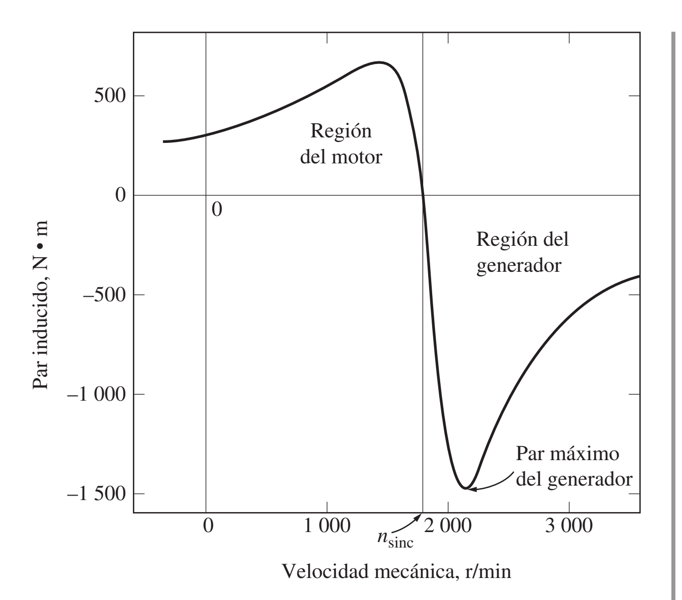


FIGURA 6-58 Característica par-velocidad de una máquina de inducción que muestra la región de operación del generador. Nótese el par máximo del generador.

Como generador, una máquina de inducción tiene varias limitaciones serias. Puesto que le falta un circuito de campo separado, un generador de inducción *no puede* producir potencia reactiva. De hecho, la consume y se le debe conectar una fuente externa de potencia reactiva en todo momento para mantener el campo magnético de su estator. Esta fuente externa de potencia reactiva también debe controlar el voltaje en los terminales del generador: si no hay corriente de campo, un generador no puede controlar su propio voltaje de salida. Normalmente, el sistema de potencia externo al que está conectado mantiene el voltaje del generador.

La gran ventaja del generador de inducción es su simplicidad. Un generador de inducción no requiere de un circuito de campo separado y no tiene que operar continuamente a una velocidad fija. Siempre y cuando la velocidad de la máquina sea mayor a n_{sinc} del sistema de potencia al que está conectado, funcionará como generador. Mientras más grande sea el par aplicado a su eje (hasta cierto punto), mayor será la potencia de salida resultante. El hecho de que no requiere ningún regulador complicado hace de este generador una buena opción para utilizarlo en molinos de viento, sistemas de recuperación de calor y otros sistemas de potencia suplementarios similares que están conectados a un sistema de potencia existente. En este tipo de aplicaciones los capacitores pueden suministrar la corrección del factor de potencia y el sistema de potencia externo puede controlar el voltaje en los terminales del generador.

Generador de inducción aislado

Una máquina de inducción también puede funcionar como un generador aislado, independiente de cualquier sistema de potencia, siempre y cuando los capacitores estén disponibles para suministrar la potencia reactiva que requiere el generador y las cargas añadidas. En la figura 6-59 se muestra un generador de inducción aislado.

Generador de inducción trifásico
P
I_L
Terminales
Q
Q
P
Q
A las cargas
Banco de capacitores

FIGURA 6-59 Generador de inducción aislado con un banco de capacitores para suministrar potencia reactiva.

La corriente de magnetización I_M que requiere una máquina de inducción en función del voltaje en los terminales se puede encontrar si se opera la máquina como motor en vacío y se mide la corriente del inducido en función del voltaje en los terminales. En la figura 6-60*a*) se ilustra una curva de magnetización como ésta. Para lograr cierto nivel de voltaje en un generador de inducción, los capacitores externos deben suministrar la corriente de magnetización que corresponde a ese nivel.

Puesto que la corriente reactiva que puede producir un capacitor es *directamente proporcional* al voltaje que se le aplica, el lugar geométrico de todas las combinaciones posibles de voltaje y corriente a través de un capacitor es una línea recta. En la figura 6-60*b*) se muestra esta gráfica de voltaje y corriente para una frecuencia dada. *Si se conecta un conjunto trifásico de capacitores a través de los terminales de un generador de inducción, el voltaje en vacío de éste será la intersección de la curva de magnetización del generador y la línea de carga del capacitor*. En la figura 6-60*c*) se puede ver el voltaje en los terminales en vacío de un generador de inducción de tres conjuntos diferentes de capacitancia.

¿Cómo se acumula el voltaje en un generador de inducción cuando se enciende? Cuando un generador de inducción se enciende, el magnetismo residual en su circuito de campo produce un

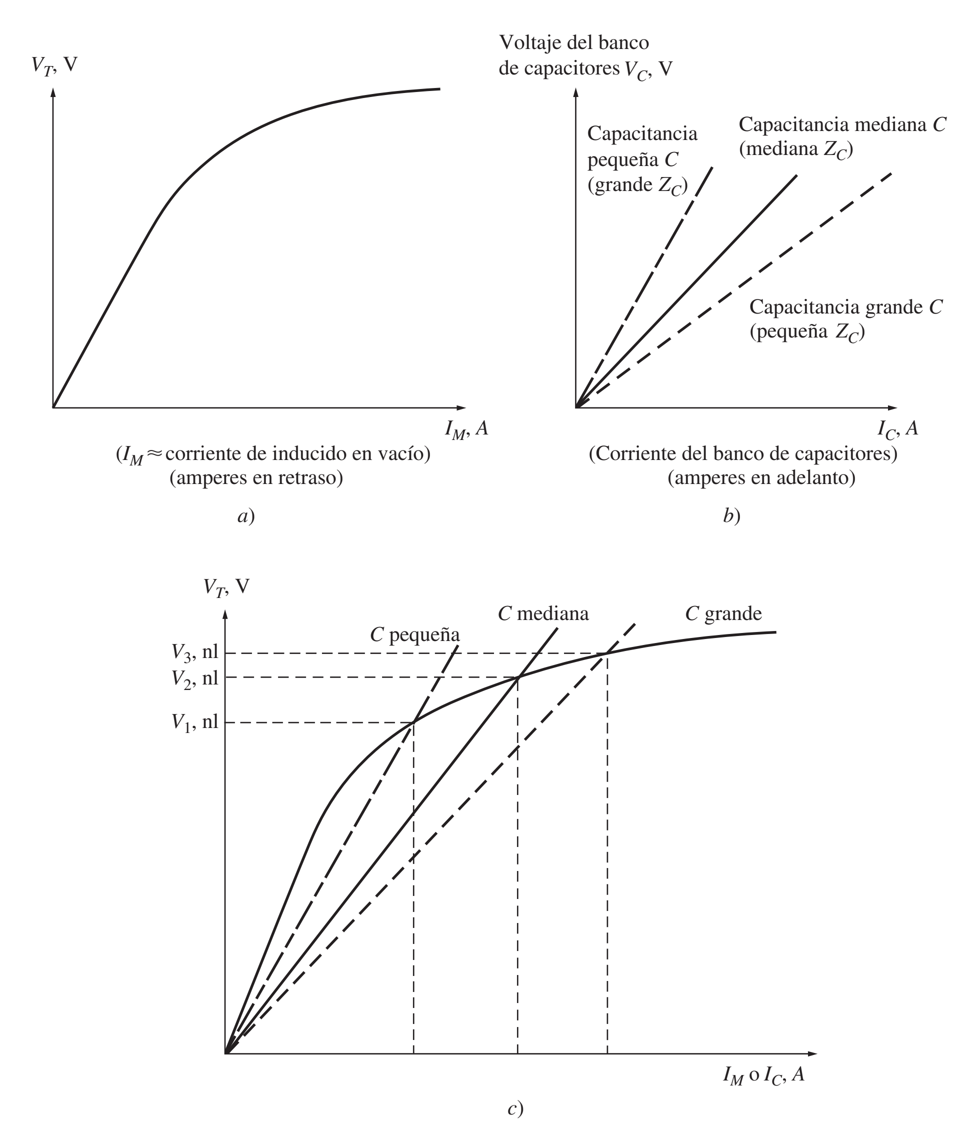


FIGURA 6-60 *a*) Curva de magnetización de una máquina de inducción, que no es otra cosa que una gráfica del voltaje en los terminales de la máquina en función de su corriente de magnetización (que está aproximadamente 90° *en retraso* con el voltaje de fase). *b*) Gráfica de la característica corriente-voltaje de un banco de capacitores. Nótese que mientras más grande es la capacitancia, más grande es la corriente dado cierto voltaje. Esta corriente está aproximadamente 90° *en adelanto* con el voltaje de fase. *c*) El voltaje en los terminales en vacío de un generador de inducción aislado se puede encontrar haciendo una gráfica de la característica de los terminales del generador y la característica voltaje-corriente del capacitor en un solo par de ejes. La intersección de las dos curvas es el punto en el que la potencia reactiva que demanda el generador es suministrada exactamente por los capacitores y este punto es el *voltaje en los terminales en vacío* del generador.

pequeño voltaje que, a su vez, genera un flujo de corriente capacitiva, la cual incrementa el voltaje, lo que aumenta aún más la corriente capacitiva, y así de manera sucesiva hasta que el voltaje se acumula por completo. Si no hay flujo residual presente en el rotor del generador de inducción, no se acumulará el voltaje y se debe magnetizar operándolo momentáneamente como motor.

El problema más grave de un generador de inducción es que su voltaje varía ampliamente con cambios en la carga, en particular en la carga reactiva. En la figura 6-61 se muestran las típicas características de los terminales de un generador de inducción que opera aislado con capacitancia constante en paralelo. Nótese que en el caso de la carga inductiva el voltaje se colapsa *muy* rápido. Esto sucede debido a que los capacitores fijos deben suministrar toda la potencia reactiva que requieren tanto la carga como el generador y cualquier parte de la potencia reactiva que se envíe a la

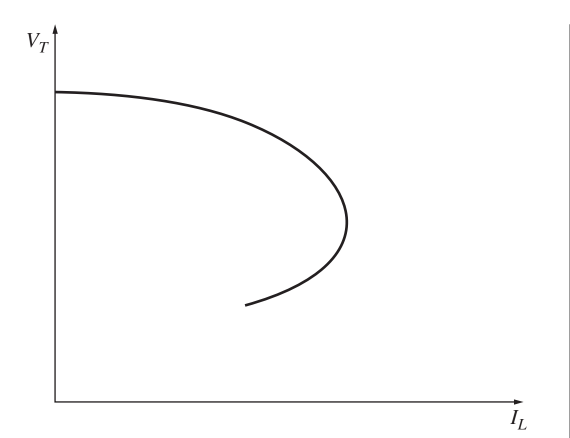


FIGURA 6-61 Característica voltaje-corriente en los terminales de un generador de inducción con una carga con un factor de potencia constante en retraso.

carga mueve al generador hacia atrás sobre la curva de magnetización, lo que provoca una gran caída del voltaje del generador. Por lo tanto, es muy difícil hacer arrancar un motor de inducción con un sistema de potencia alimentado por un generador de inducción; se deben utilizar técnicas especiales para incrementar la capacitancia efectiva durante el arranque y luego disminuirla durante su operación normal.

Debido a la naturaleza de la característica par-velocidad de las máquinas de inducción, la frecuencia de un generador de inducción varía con los cambios de carga (elemental); sin embargo, debido a que la característica par-velocidad está muy inclinada en el rango de operación normal, la variación de frecuencia total por lo general está limitada a menos de 5%. Esta variación es aceptable en muchas aplicaciones aisladas o de emergencia.

Aplicaciones de los generadores de inducción

Desde principios del siglo XX se han utilizado los generadores de inducción, pero en las décadas de 1960 y 1970 casi habían dejado de usarse. Sin embargo, regresaron debido a la crisis por los precios del petróleo de 1973. Con costos de la energía tan altos, la recuperación de energía se ha convertido en una parte importante de la economía de casi todos los procesos industriales. El generador de inducción es ideal para este tipo de aplicaciones, dado que requiere pocos sistemas de control y poco mantenimiento.

Debido a su simplicidad y su tamaño pequeño por kilowatt de potencia de salida, se prefiere a los generadores de inducción para utilizarlos en molinos de viento pequeños. Muchos molinos de viento comerciales están diseñados para operar en paralelo con grandes sistemas de potencia, suministrando una fracción de las necesidades de potencia totales del cliente. En este tipo de operación se puede confiar en el sistema de potencia para suministrar control de voltaje y de frecuencia, y se pueden utilizar los capacitores estáticos para corregir el factor de potencia.

Es interesante que las máquinas de inducción de rotor devanado hayan vuelto un poco al mercado como generadores de inducción conectados a molinos de viento. Como antes se mencionó, las máquinas de rotor devanado son más caras que las de rotor de jaula, y necesitan más mantenimiento debido a los anillos de deslizamiento y a las escobillas que se incluyen en su diseño. Sin embargo, las máquinas de rotor devanado permiten controlar la resistencia del rotor, como se explicó en la sección 6.9. La inserción o la remoción de resistencia del rotor cambia la forma de la característica par-velocidad, y por lo tanto la velocidad de operación de la máquina (véase la figura 6-45).

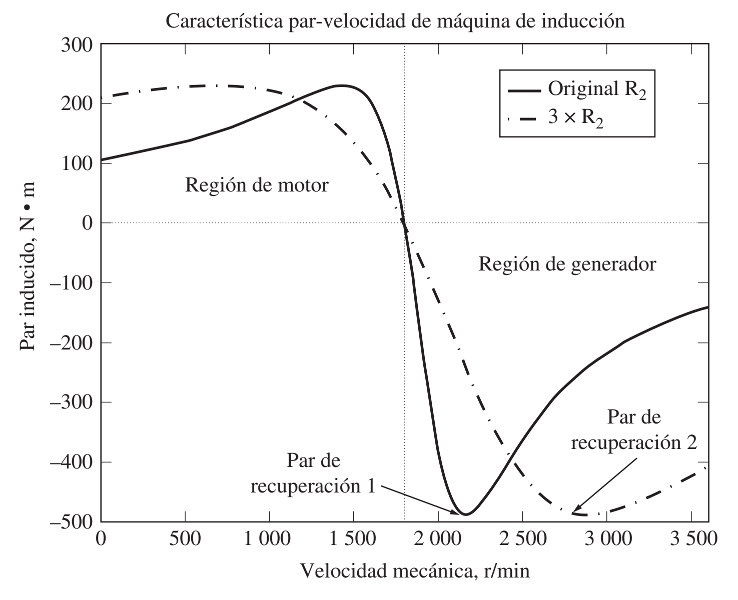


FIGURA 6-62 Característica par-velocidad de un generador de inducción de rotor devanado con la resistencia original del rotor y con el triple de la original. Observe que la gama de velocidades en la que puede operar la máquina como generador aumenta notablemente cuando se agrega resistencia de rotor.

Esta característica de las máquinas de rotor devanado puede ser muy importante para los generadores de inducción conectados a molinos de viento. El viento es una fuente de energía muy voluble e incierta: a veces el viento sopla fuertemente, a veces un poco, y a veces no sopla. Para usar una máquina ordinaria de rotor de jaula como generador, el viento debe hacer girar el eje de la máquina a una velocidad entre n_{sinc} y la velocidad de recuperación (como se muestra en la figura 6-58). Ésta es una gama relativamente estrecha de velocidades, lo cual limita las condiciones de viento en las cuales se puede usar un generador eólico.

Las máquinas de rotor devanado son mejores porque es posible insertar una resistencia de rotor y así cambiar la forma de la característica par-velocidad. La figura 6-62 muestra un ejemplo de una máquina de in-

ducción de rotor devanado tanto con la resistencia original del rotor R_2 como con una resistencia triple de la original, $3R_2$. Observe que el par de recuperación es el mismo en ambos casos, pero la gama de velocidades entre n_{sinc} y la velocidad de recuperación es mucho mayor en el caso del generador con resistencia de rotor insertada. Esto permite que el generador produzca potencia útil en una gama más amplia de condiciones de viento.

En la práctica se usan controladores de estado sólido, en vez de resistores reales, para ajustar la resistencia efectiva del rotor de los generadores modernos de rotor devanado. Sin embargo, el efecto sobre la característica par-velocidad es el mismo.

6.13 VALORES NOMINALES DE LOS MOTORES DE INDUCCIÓN

En la figura 6-63 se muestra la placa de características de un típico motor de inducción de tamaño pequeño a medio y de alta eficiencia. Los valores nominales más importantes que se presentan en ella son:

1. Potencia de salida (caballos de fuerza en Estados Unidos y kilowatts en el resto del mundo).
2. Voltaje.
3. Corriente.
4. Factor de potencia.
5. Velocidad.
6. Eficiencia nominal.
7. Clase NEMA de diseño.
8. Código de arranque.

SPARTAN MOTOR

MODEL 27987J-X	
TYPE CJ4B	FRAME 324TS
VOLTS 230/460	°C AMB. INS. CL. 40 B
FRT. BRG. 210 SF	EXT. BRG. 312 SF
SERV. FACT. 1.0	OPER. INSTR. C-517
PHASE 3 HZ 60	CODE G WDGS. 1
H.P. 40	
R.P.M. 3565	
AMPS 97/48.5	
NEMA NOM. EFF. .936	
NOM. P.F. .827	
MIN. AIR VEL.FT/MIN.	
DUTY Cont	NEMA DESIGN B

5NP00205-0100 LOUIS ALLIS Litton Milwaukee Wisconsin 53201

FIGURA 6-63 Placa de características de un típico motor de inducción de alta eficiencia. (*Cortesía de MagneTek, Inc.*)

La placa de características de un típico motor de inducción de eficiencia estándar sería similar, excepto en que tal vez no mostraría la eficiencia nominal.

El límite de voltaje del motor se basa en el máximo flujo de corriente de magnetización aceptable, puesto que mientras más alto sea el voltaje más saturado está el hierro del motor y más alta será la corriente de magnetización. Igual que en el caso de los transformadores y máquinas síncronas, un motor de inducción de 60 Hz se puede utilizar en un sistema de potencia de 50 Hz, pero sólo si se disminuye el voltaje nominal en una cantidad proporcional a la reducción en frecuencia. Esta degradación es necesaria debido a que el flujo en el núcleo del motor es proporcional a la integral del voltaje aplicado. Para mantener constante el flujo máximo en el núcleo mientras se incrementa el periodo de integración, debe disminuir el nivel de voltaje promedio.

El límite de corriente en un motor de inducción se relaciona con el calentamiento máximo aceptable de los devanados del motor y el límite de potencia lo determina la combinación de voltaje y corriente nominales con el factor de potencia y eficiencia de la máquina.

Las clases de diseño NEMA, letras código de arranque y eficiencias nominales se explicaron en las secciones anteriores de este capítulo.

6.14 RESUMEN

El motor de inducción es el tipo más popular de los motores de ca debido a su simplicidad y facilidad de operación. El motor de inducción no tiene un circuito de campo separado; en cambio, depende de la acción transformadora para inducir voltajes y corrientes en su circuito de campo. En

realidad, un motor de inducción es básicamente un transformador giratorio. Su circuito equivalente es similar al de un transformador, excepto en los efectos de variación de velocidad.

Hay dos tipos de rotores de motores de inducción, rotores de jaula y rotores devanados. Los rotores de jaula de ardilla consisten en una serie de barras paralelas alrededor del rotor, conectadas entre sí en cortocircuito en cada extremo. Los rotores devanados son devanados de rotor completos trifásicos, y las fases se sacan del rotor mediante anillos de deslizamiento y escobillas. Los rotores devanados son más caros y necesitan más mantenimiento que los de jaula, de modo que rara vez se usan (salvo algunas veces en generadores de inducción).

Por lo regular, un motor de inducción opera cerca de la velocidad síncrona, pero nunca exactamente a n_{sinc}. Siempre debe haber cierto movimiento relativo para inducir un voltaje en el circuito de campo del motor de inducción. El voltaje inducido en el rotor por el movimiento relativo entre el campo magnético del estator y el rotor produce una corriente en el rotor que interactúa con el campo magnético del estator para producir el par inducido en el motor.

En un motor de inducción, el deslizamiento o velocidad a la que se presenta el par máximo se puede controlar variando la resistencia del rotor. El *valor* del par máximo es independiente de la resistencia del rotor. Una alta resistencia del rotor disminuye la velocidad a la que se presenta el par máximo y por lo tanto incrementa el par de arranque del motor. Sin embargo, paga un precio por este par de arranque al tener una regulación de velocidad muy pobre en su intervalo normal de operación. Por otro lado, una baja resistencia del rotor reduce el par de arranque del motor a la vez que mejora la regulación de velocidad. Cualquier diseño de un motor de inducción debe estar en un punto medio entre estos dos requerimientos en conflicto.

Una manera de lograr este punto medio es a través de la utilización de rotores de barra profunda o de doble jaula. Estos rotores tienen una alta resistencia efectiva en el arranque y una baja resistencia efectiva en condiciones normales de operación, por lo que ofrecen tanto un alto par de arranque como una buena regulación de velocidad en el mismo motor. Este mismo efecto se puede lograr por medio de un rotor devanado en un motor de inducción si varía la resistencia de campo del rotor.

Los motores de inducción se clasifican, por sus características par-velocidad, en una serie de clases de diseño NEMA. Los motores de diseño clase A son motores convencionales de inducción, con par de arranque normal, corriente de arranque relativamente alta, bajo deslizamiento y alto par máximo. Los motores pueden ocasionar problemas cuando arrancan a través de la línea, debido a las altas corrientes de arranque. Los motores de diseño clase B usan un diseño de barra profunda para producir par de arranque normal, menor corriente de arranque, un deslizamiento un poco mayor y un par máximo un poco menor en comparación con los motores de diseño clase A. Como necesitan alrededor de 25% menos corriente de arranque, trabajan mejor en muchas aplicaciones en las que el sistema de suministro eléctrico no puede proporcionar corrientes iniciales altas. Los motores de diseño clase C usan un diseño de barra profunda o jaula doble para producir un par de arranque alto con baja corriente de arranque, a cambio de mayor deslizamiento y par máximo más bajo. Estos motores se pueden usar en aplicaciones en las que se necesita alto par de arranque sin tomar corrientes de línea excesivas. Los motores de diseño clase D usan barras de alta resistencia para producir un par de arranque muy alto con corrientes de arranque bajas, a cambio de un deslizamiento muy alto. El par máximo de este diseño es bastante alto, pero puede ocurrir a deslizamientos extremadamente altos.

En los motores de inducción, el control de velocidad se puede lograr por medio del cambio del número de polos en la máquina, de la frecuencia eléctrica aplicada, del voltaje aplicado en los terminales o de la resistencia del rotor en el caso de un motor de inducción con rotor devanado. Por lo general, se usan todas estas técnicas (salvo para cambiar la resistencia del rotor), pero, con mucho, la técnica más común en la actualidad consiste en cambiar la frecuencia eléctrica que se aplica usando un controlador de estado sólido.

Un motor de inducción tiene una corriente de arranque mucho mayor que la corriente nominal del motor, lo que puede causar problemas a los sistemas de suministro a los que están conectados los motores. La corriente de arranque de un motor de inducción dado se especifica mediante una letra de código NEMA, que se imprime en su placa de características. Cuando esta corriente de arranque es demasiado alta para que el sistema de suministro la maneje, se usan circuitos de arrancadores de motores para reducir la corriente de arranque a un nivel seguro. Los circuitos de arrancadores pueden cambiar las conexiones del motor de Δ a Y durante el arranque, pueden insertar resistores

adicionales durante el arranque, o pueden reducir el voltaje aplicado (y la frecuencia) durante el arranque.

Las máquinas de inducción también se pueden utilizar como generadores siempre y cuando haya una fuente de potencia reactiva (capacitores o máquina síncrona) disponible en el sistema de potencia. Un generador de inducción aislado tiene serios problemas con la regulación de voltaje, pero cuando opera en paralelo con un sistema de potencia grande, éste puede controlar el voltaje de la máquina. Por lo general, los generadores de inducción son máquinas más bien pequeñas que se ocupan de manera conjunta con fuentes de energía alternativas, tales como molinos de viento o sistemas de recuperación de energía. Casi todos los generadores realmente grandes que se utilizan son generadores síncronos.

PREGUNTAS

6-1. ¿Qué es el deslizamiento y la velocidad de deslizamiento de un motor de inducción?

6-2. ¿Cómo desarrolla un par un motor de inducción?

6-3. ¿Por qué es imposible que un motor de inducción opere a velocidad síncrona?

6-4. Dibuje y explique la forma de la curva característica par-velocidad de un motor de inducción típico.

6-5. ¿Qué elemento del circuito equivalente tiene el control más directo sobre la velocidad en la que se presenta el par máximo?

6-6. ¿Qué es un rotor de barra profunda? ¿Por qué se utiliza? ¿Qué clase(s) de diseño NEMA se puede(n) construir con él?

6-7. ¿Qué es un rotor de doble jaula? ¿Por qué se utiliza? ¿Qué clase(s) de diseño NEMA se puede(n) construir con él?

6-8. Describa las características y usos de los motores de inducción con rotor devanado y de cada motor de jaula de ardilla de clase de diseño NEMA.

6-9. ¿Por qué es tan baja la eficiencia de un motor de inducción (con rotor devanado o de jaula de ardilla) ante deslizamientos altos?

6-10. Mencione y describa cuatro maneras de controlar la velocidad de un motor de inducción.

6-11. ¿Por qué es necesario reducir el voltaje que se aplica a un motor de inducción cuando se reduce la frecuencia eléctrica?

6-12. ¿Por qué el control de velocidad por variación de voltaje en los terminales está limitado al intervalo de operación?

6-13. ¿Qué son los factores de código de arranque? ¿Qué nos dicen sobre la corriente de arranque de un motor de inducción?

6-14. ¿Cómo funciona el circuito de arranque resistivo de un motor de inducción?

6-15. ¿Qué información proporciona la prueba de rotor bloqueado?

6-16. ¿Qué información proporciona la prueba en vacío?

6-17. ¿Qué acciones se toman para mejorar el funcionamiento de los modernos motores de inducción de alta eficiencia?

6-18. ¿Qué controla el voltaje en los terminales de un generador de inducción aislado?

6-19. ¿En qué se utiliza normalmente un generador de inducción?

6-20. ¿Cómo se puede utilizar un motor de inducción con rotor devanado para cambiar la frecuencia?

6-21. ¿Cómo afectan los diferentes patrones de voltaje-frecuencia las características par-velocidad de un motor de inducción?

6-22. Describa las principales características del controlador de motor de inducción en estado sólido que se muestra en la sección 6.10.

6-23. Se producen dos motores de inducción de 480 V y 100 hp. Uno se diseña para una operación de 50 Hz y el otro para una operación de 60 Hz, pero en todo lo demás son similares. ¿Cuál de los dos es más grande?

6-24. Un motor de inducción opera bajo condiciones nominales. Si la carga en el eje se incrementa, ¿cómo cambian las siguientes cantidades?

a) Velocidad mecánica
b) Deslizamiento
c) Voltaje inducido en el rotor
d) Corriente del rotor
e) Frecuencia del rotor
f) P_{PCR}
g) Velocidad síncrona

PROBLEMAS

6-1. Un motor de inducción trifásico de 220 V, con seis polos, 50 Hz, opera con un deslizamiento de 3.5%. Encuentre:

a) La velocidad de los campos magnéticos en revoluciones por minuto
b) La velocidad del rotor en revoluciones por minuto
c) La velocidad de deslizamiento del rotor
d) La frecuencia del rotor en hertz

6-2. Responda las preguntas del problema 6-1 para un motor de inducción trifásico de 480 V, con dos polos, 60 Hz, que opera con un deslizamiento de 0.025.

6-3. Un motor de inducción trifásico de 60 Hz opera a 715 r/min en vacío y a 670 r/min a plena carga.

a) ¿Cuántos polos tiene el motor?
b) ¿Cuál es el deslizamiento con carga nominal?
c) ¿Cuál es la velocidad con un cuarto de la carga nominal?
d) ¿Cuál es la frecuencia eléctrica del rotor con un cuarto de la carga nominal?

6-4. Un motor de inducción de 50 kW en la salida del rotor, 460 V, 50 Hz, con dos polos, tiene un deslizamiento de 5% cuando opera en condiciones de plena carga. En condiciones de plena

carga, las pérdidas por fricción y rozamiento con el aire son de 700 W y las pérdidas en el núcleo son de 600 W. Encuentre los siguientes valores en condiciones a plena carga:

a) La velocidad del eje n_m
b) La potencia de salida en watts
c) El par de carga τ_{carga} en newton-metros
d) El par inducido τ_{ind} en newton-metros
e) La frecuencia del rotor en hertz

6-5. Un motor de inducción de 208 V, con cuatro polos, 60 Hz, conectado en Y, con rotor devanado, tiene una capacidad nominal de 30 hp. Los componentes de su circuito equivalente son

$R_1 = 0.100\ \Omega \qquad R_2 = 0.070\ \Omega \qquad X_M = 10.0\ \Omega$
$X_1 = 0.210\ \Omega \qquad X_2 = 0.210\ \Omega$
$P_{mec} = 500\text{ W} \qquad P_{misc} \approx 0 \qquad P_{núcl} = 400\text{ W}$

Dado un deslizamiento de 0.05, encuentre

a) La corriente de línea I_L
b) Las pérdidas en el cobre del estator P_{PCE}
c) La potencia en el entrehierro P_{EH}
d) La potencia convertida de forma eléctrica a mecánica P_{conv}
e) El par inducido τ_{ind}
f) El par de carga τ_{carga}
g) La eficiencia η general de la máquina
h) La velocidad del motor en revoluciones por minuto y radianes por segundo

6-6. En el caso del motor del problema 6-5, ¿cuál es el deslizamiento con el par máximo? ¿Cuál es el par máximo del motor?

6-7. *a*) Calcule y haga la gráfica de la característica par-velocidad del motor del problema 6-5.
b) Calcule y haga la gráfica de la potencia de salida-la curva de velocidad del motor del problema 6-5.

6-8. En el caso del motor del problema 6-5, ¿cuánta resistencia adicional (referida al circuito del estator) se requiere añadir al circuito del rotor para que el par máximo se presente en condiciones de arranque (cuando el eje no se mueve)? Haga una gráfica de la característica par-velocidad de este motor con la resistencia adicional.

6-9. Si el motor del problema 6-5 se opera en un sistema de potencia de 50 Hz, ¿qué se debe hacer con el voltaje que se le suministra? ¿Por qué? ¿Cuáles serán los valores de los componentes del circuito equivalente a 50 Hz? Responda las preguntas del problema 6-5 en el caso de una operación a 50 Hz con un deslizamiento de 0.05 y el voltaje adecuado para esta máquina.

6-10. Un motor de inducción trifásico, de 60 Hz, de dos polos, trabaja a una velocidad sin carga de 3 580 r/min, y una velocidad a plena carga de 3 440 r/min. Calcule el deslizamiento y la frecuencia eléctrica del rotor en condiciones sin carga y a plena carga. ¿Cuál es la regulación de velocidad de este motor [ecuación (3-68)]?

6-11. La potencia de entrada al circuito del rotor de un motor de inducción de seis polos, 60 Hz, que trabaja a 1 100 r/min, es de 5 kW. ¿Cuál es la pérdida en el cobre del rotor?

6-12. La potencia a través del entrehierro de un motor de inducción de 60 Hz, cuatro polos, es de 25 kW, y la potencia convertida de eléctrica a mecánica en el motor es de 23.2 kW.

a) ¿Cuál es el deslizamiento del motor en este momento?
b) ¿Cuál es el par inducido en este motor?
c) Suponiendo que las pérdidas mecánicas son de 300 W con este deslizamiento, ¿cuál es el par de carga de este motor?

6-13. La figura 6-18*a*) muestra un circuito sencillo que consta de una fuente de voltaje, un resistor y dos reactancias. Encuentre el voltaje y la impedancia equivalentes de Thevenin del circuito en los terminales. Luego, deduzca las expresiones para obtener la magnitud de $\mathbf{V}_{TH}$ y de R_{TH} dadas en las ecuaciones (6-41*b*) y (6-44).

6-14. La figura P6-1 muestra un circuito simple que consta de una fuente de voltaje, dos resistores y dos reactancias en serie entre ellas. Si se permite que el resistor R_L varíe y se mantienen constantes todos los demás componentes, ¿a qué valor de R_L se le suministrará la máxima potencia posible? *Pruebe* su respuesta. (*Sugerencia:* Deduzca la expresión de la potencia de carga en términos de V, R_S, X_S, R_L y X_L y tome la derivada parcial de esa expresión con respecto a R_L.) Utilice este resultado para deducir la expresión del par máximo [ecuación (6-54)].

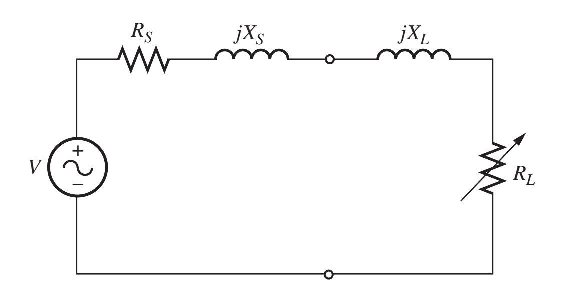


FIGURA P6-1 Circuito del problema 6-14.

6-15. Un motor de inducción de 460 V, 60 Hz, con cuatro polos, conectado en Y, tiene una capacidad nominal de 25 hp. Los parámetros del circuito equivalente son

$R_1 = 0.15\ \Omega \qquad R_2 = 0.154\ \Omega \qquad X_M = 20\ \Omega$
$X_1 = 0.852\ \Omega \qquad X_2 = 1.066\ \Omega$
$P_{FyR} = 400\text{ W} \qquad P_{misc} = 150\text{ W} \qquad P_{núcl} = 400\text{ W}$

Dado un deslizamiento de 0.02, encuentre

a) La corriente de línea I_L
b) El factor de potencia del estator
c) El factor de potencia del rotor
d) La frecuencia del rotor
e) Las pérdidas en el cobre del estator P_{PCE}
f) La potencia en el entrehierro P_{EH}
g) La potencia convertida de forma eléctrica a mecánica P_{conv}
h) El par inducido τ_{ind}
i) El par de carga τ_{carga}
j) La eficiencia general de la máquina η
k) La velocidad del motor en revoluciones por minuto y radianes por segundo
l) ¿Cuál es la letra de código de arranque de este motor?

6-16. En el caso del motor del problema 6-15, ¿cuál es el par máximo? ¿Cuál es el deslizamiento con el par máximo? ¿Cuál es la velocidad del rotor con el par máximo?

6-17. Si el motor del problema 6-15 se opera con una fuente de potencia de 460 V y 50 Hz, ¿cuál sería el par máximo? ¿Cuál sería el deslizamiento con el par máximo?

6-18. Haga la gráfica de las siguientes cantidades en el caso del motor del problema 6-15 conforme el deslizamiento cambia de 0 a 10%: *a*) τ_{ind}, *b*) P_{conv}, *c*) P_{sal}, *d*) eficiencia η. ¿En qué deslizamiento P_{sal} es igual a la potencia nominal de la máquina?

6-19. Se lleva a cabo una prueba de cd a un motor de inducción de 460 V, conectado en Δ, de 100 hp. Si $V_{CD} = 21$ V e $I_{CD} = 72$ A, ¿cuál es la resistencia del estator R_1? *¿Por qué es así?*

6-20. A un motor de inducción de 208 V, con seis polos, conectado en Y, 25 hp, clase de diseño B, se le realizan pruebas en el laboratorio y se obtienen los siguientes resultados:

En vacío:	208 V, 24.0 A, 1 400 W, 60 Hz
Rotor bloqueado:	24.6 V, 64.5 A, 2 200 W, 15 Hz
Prueba de cd:	13.5 V, 64 A

Encuentre el circuito equivalente del motor y haga una gráfica de la curva de la característica par-velocidad.

6-21. Un motor de inducción de 460 V, 10 hp, cuatro polos, conectado en Y, con aislamiento clase F, y factor de servicio 1.15 tiene los siguientes parámetros:

$R_1 = 0.54\ \Omega$ $\quad R_2 = 0.488\ \Omega$ $\quad X_M = 51.12\ \Omega$

$X_1 = 2.093\ \Omega$ $\quad X_2 = 3.209\ \Omega$

$P_{FyR} = 150$ W $\quad P_{misc} = 50$ W $\quad P_{núcl} = 150$ kW

En caso de un deslizamiento de 0.02, encuentre:

a) La corriente de línea, I_L
b) El factor de potencia del estator
c) El factor de potencia del rotor
d) La frecuencia del rotor
e) Las pérdidas en el cobre del estator P_{PCE}
f) La potencia en el entrehierro P_{EH}
g) La potencia convertida de forma eléctrica a mecánica P_{conv}
h) El par inducido τ_{ind}
i) El par de carga τ_{carga}
j) La eficiencia general de la máquina η
k) La velocidad del motor en revoluciones por minuto y radianes por segundo
l) Trace el diagrama de flujo de potencia para este motor
m) ¿Cuál es la letra de código de arranque de este motor?
n) ¿Cuál es la máxima elevación de temperatura aceptable en este motor, dada su clase de aislamiento?
o) ¿Cuál es el factor de servicio de este motor?

6-22. Dibuje la características par-velocidad del motor del problema 6-21. ¿Cuál es el par de arranque de este motor?

6-23. Un motor de inducción de 460 V, con cuatro polos, 75 hp, 60 Hz, conectado en Y, trifásico, desarrolla su par inducido a plena carga con un deslizamiento de 1.2% cuando opera a 60 Hz y 460 V. Las impedancias del circuito modelo por fase del motor son

$R_1 = 0.058\ \Omega$ $\quad X_M = 18\ \Omega$

$X_1 = 0.32\ \Omega$ $\quad X_2 = 0.386\ \Omega$

En este problema se desprecian las pérdidas mecánicas en el núcleo y dispersas.

a) Encuentre el valor de la resistencia del rotor R_2.
b) Encuentre $\tau_{máx}$, $s_{máx}$ y la velocidad del rotor cuando se presenta el par máximo del motor.
c) Encuentre el par de arranque del motor.
d) ¿Qué factor de letra de código se debe asignar a este motor?

6-24. Responda las siguientes preguntas sobre el motor del problema 6-21.

a) Si se hace arrancar el motor con un bus infinito de 460 V, ¿cuánta corriente fluirá en el motor en el arranque?
b) Si se utiliza una línea de transmisión con una impedancia de $0.50 + j0.35\ \Omega$ por fase para conectar el motor de inducción al bus infinito, ¿cuál será la corriente de arranque del motor? ¿Cuál será el voltaje en los terminales del motor en el arranque?
c) Si se conecta un autotransformador reductor ideal de relación 1.4:1 entre la línea de transmisión y el motor, ¿cuál será la corriente en la línea de transmisión durante el arranque? ¿Cuál será el voltaje, en el extremo del motor, de la línea de transmisión durante el arranque?

6-25. En este capítulo se estudió que se puede utilizar un autotransformador para reducir la corriente de arranque que toma un motor de inducción. Aun cuando esta técnica funciona, un autotransformador es relativamente caro. Una manera mucho menos cara de reducir la corriente de arranque es utilizar un dispositivo llamado *arrancador Y-Δ* (descrito antes en este capítulo). Si un motor de inducción está normalmente conectado en Δ, se puede reducir su voltaje de fase V_ϕ (y por lo tanto su corriente de arranque) simplemente conectando los devanados del estator en Y durante el arranque y luego restaurando las conexiones a Δ cuando el motor tome velocidad. Responda las siguientes preguntas sobre este tipo de dispositivo.

a) ¿Cómo compararía el voltaje de fase en el arranque con el voltaje de fase en condiciones normales de operación?
b) ¿Cómo compararía la corriente de arranque del motor conectado en Y con la corriente de arranque si el motor permanece conectado en Δ durante el arranque?

6-26. Un motor de inducción de 460 V, 50 hp, con seis polos, conectado en Δ, 60 Hz, trifásico, tiene un deslizamiento a plena carga de 4%, una eficiencia de 91% y un factor de potencia de 0.87 en retraso. En el arranque, el motor desarrolla un par que es 1.75 veces el par a plena carga, pero consume 7 veces la corriente nominal con el voltaje nominal. Este motor se enciende con un arrancador de voltaje reducido tipo autotransformador.

a) ¿Cuál debe ser el voltaje de salida del circuito de arranque para reducir el par de arranque hasta que sea igual al par nominal del rotor?
b) ¿Cuál será la corriente de arranque del motor y la corriente que toma de la fuente con este voltaje?

6-27. Un motor de inducción con rotor devanado opera con voltaje y frecuencia nominales con sus anillos rozantes en cortocir-

cuito y con una carga de alrededor de 25% del valor nominal de la máquina, Si se duplica la resistencia del rotor de la máquina por medio de la inserción de resistores externos al circuito del rotor, explique lo que sucede con los siguientes elementos:

a) Deslizamiento s
b) Velocidad del motor n_m
c) Voltaje inducido en el rotor
d) Corriente del rotor
e) τ_{ind}
f) P_{sal}
g) P_{PCR}
h) Eficiencia general η

6-28. Un motor de inducción de 460 V, 75 hp, cuatro polos, conectado en Y, tiene los siguientes parámetros:

$R_1 = 0.058\ \Omega$ $\quad R_2 = 0.037\ \Omega$ $\quad X_M = 9.24\ \Omega$
$X_1 = 0.320\ \Omega$ $\quad X_2 = 0.386\ \Omega$
$P_{FyR} = 650$ W $\quad P_{misc} = 150$ W $\quad P_{núcl} = 600$ kW

Para un deslizamiento de 0.01, encuentre:

a) La corriente de línea I_L
b) El factor de potencia del estator
c) El factor de potencia del rotor
d) La frecuencia del rotor
e) Las pérdidas en el cobre del estator P_{PCE}
f) La potencia en el entrehierro P_{EH}
g) La potencia convertida de forma eléctrica a mecánica P_{conv}
h) El par inducido τ_{ind}
i) El par de carga τ_{carga}
j) La eficiencia general de la máquina η
k) La velocidad del motor en revoluciones por minuto y radianes por segundo
l) Trace el diagrama de flujo de potencia de este motor
m) ¿Cuál es la letra de código de arranque de este motor?

6-29. Dibuje la característica par-velocidad del motor del problema 6-28. ¿Cuál es el par de arranque de este motor?

6-30. Responda las siguientes preguntas sobre un motor de inducción de 460 V, conectado en Δ, con dos polos, 100 hp, 60 Hz y código de arranque F:

a) ¿Cuál es la corriente máxima de arranque que el controlador de la máquina debe manejar?
b) Si el controlador está diseñado para conmutar los devanados del estator de una conexión en Δ a una conexión en Y durante el arranque, ¿cuál es la corriente máxima de arranque que el controlador debe manejar?
c) Si se utiliza un arrancador tipo autotransformador reductor con relación 1.25:1 durante el arranque, ¿cuál es la corriente máxima de arranque que se tomará de la línea?

6-31. Cuando es necesario detener con rapidez un motor de inducción, muchos controladores invierten la dirección de rotación de los campos magnéticos por medio de la conmutación de dos terminales cualesquiera del estator. Cuando se invierte la dirección de rotación de los campos magnéticos, el motor desarrolla un par inducido opuesto a la dirección de rotación de la corriente, tan rápido que se detiene y trata de girar en la dirección opuesta. Si se quita la potencia del circuito del estator en el momento en que la velocidad del rotor es cero, el motor se detiene rápidamente. Esta técnica para apagar con prontitud un motor de inducción se llama *frenado por contracorriente*. El motor del problema 6-23 opera en condiciones nominales y se detendrá con frenado por contracorriente.

a) ¿Cuál es el deslizamiento s antes del frenado por contracorriente?
b) ¿Cuál es la frecuencia del rotor antes del frenado por contracorriente?
c) ¿Cuál es el par inducido τ_{ind} antes del frenado por contracorriente?
d) ¿Cuál es el deslizamiento s justo después de conmutar los terminales del estator?
e) ¿Cuál es la frecuencia del rotor justo después de conmutar los terminales del estator?
f) ¿Cuál es el par inducido τ_{ind} justo después de conmutar los terminales del estator?

6-32. Un motor de inducción de 460 V, 10 hp, dos polos, conectado en Y, tiene los siguientes parámetros:

$R_1 = 0.54\ \Omega$ $\quad X_1 = 2.093\ \Omega$ $\quad X_M = 51.12\ \Omega$
$P_{FyR} = 150$ W $\quad P_{misc} = 50$ W $\quad P_{núcl} = 150$ kW

El rotor tiene un diseño de jaula dual, con una barra externa de alta resistencia, acoplada de forma estrecha y una barra interna de baja resistencia, acoplada de manera laxa (vea la figura 6-25*c*). Los parámetros de la barra externa son:

$R_2 = 3.20\ \Omega$ $\quad X_2 = 2.00\ \Omega$

La resistencia es alta debido a la menor área de la sección transversal, y la reactancia es relativamente baja debido al acoplamiento ajustado entre el rotor y el estator. Los parámetros de la barra interna son:

$R_2 = 0.382\ \Omega$ $\quad X_2 = 5.10\ \Omega$

La resistencia es baja debido a la alta área de la sección transversal, pero la reactancia es relativamente alta debido al acoplamiento bastante flojo entre el rotor y el estator.

Calcule la característica par-velocidad de este motor de inducción, y compárela con la característica par-velocidad del diseño de jaula simple del problema 6-21. ¿Cuáles son las diferencias entre las curvas? Explique las diferencias.

BIBLIOGRAFÍA

1. Alger, Phillip, *Induction Machines*, 2a. ed., Gordon and Breach, Nueva York, 1970.
2. Del Toro, V., *Electric Machines and Power Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, Nueva Jersey, 1985.
3. Fitzgerald, A.E. y C. Kingsley, Jr., *Electric Machinery*, McGraw-Hill, Nueva York, 1952.
4. Fitzgerald, A.E., C. Kingsley, Jr. y S.D. Umans, *Electric Machinery*, 6a. ed., McGraw-Hill, Nueva York, 2003.
5. Institute of Electrical and Electronics Engineers, *Standard Test Procedure for Polyphase Induction Motors and Generator*, IEEE Standard 112-1996, Nueva York: IEEE, 1996,
6. Kosow, Irving L., *Control of Electric Motors*, Englewood Cliffs, Prentice-Hall, Nueva Jersey, 1972.
7. McPherson, George, *An Introduction to Electrical Machines and Transformers*, Wiley, Nueva York, 1981.
8. National Electrical Manufacturers Association, *Motors and Generators*, Publicación núm. MG1-2006, NEMA, Washington, D.C., 2006.
9. Selmon, G.R. y A. Straughen, *Electric Machines*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1980.
10. Vithayathil, Joseph, *Power Electronics: Principles and Applications*, McGraw-Hill, Nueva York, 1995.
11. Werninck, E.H. (ed.), *Electric Motor Handbook*, McGraw-Hill, Londres, 1978.

CAPÍTULO 7

Fundamentos de máquinas de corriente directa (cd)

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

- Entender cómo se induce voltaje en una espira giratoria.
- Comprender cómo contribuyen las curvas (o curvaturas) de las caras de los polos a mantener un flujo constante, y consecuentemente un voltaje de salida constante.
- Entender y poder usar la ecuación para voltaje inducido y par inducido en una máquina de cd.
- Comprender cómo se realiza la conmutación.
- Entender los problemas con la conmutación, incluyendo la reacción del inducido y los efectos $L\frac{di}{dt}$.
- Comprender el diagrama de flujo de potencia de máquinas de cd.

Las máquinas de cd son generadores que convierten energía mecánica en energía eléctrica de cd y motores que convierten energía eléctrica de cd en energía mecánica. La mayoría de las máquinas de cd son semejantes a las máquinas de ca en el sentido de que tienen voltajes y corrientes de ca dentro de ellas; las máquinas de cd cuentan con una salida de cd simplemente porque hay un mecanismo que convierte los voltajes internos de ca en voltajes de cd en sus terminales. Puesto que a este mecanismo se le llama conmutador, a la maquinaria de cd también se le conoce como *maquinaria de colector* o *de conmutación*.

Los principios fundamentales de la operación de las máquinas de cd son muy simples. Desafortunadamente, a menudo los ensombrece la complejidad de la construcción de las máquinas reales. Este capítulo explicará primero los principios de la operación de las máquinas de cd por medio de ejemplos sencillos y luego considerará algunas de las complicaciones de las máquinas de cd reales.

7.1 ESPIRA GIRATORIA SENCILLA ENTRE CARAS POLARES CURVAS

La máquina lineal que se estudió en la sección 1.8 sirvió como introducción al comportamiento básico de la máquina. Su respuesta a la carga y al cambio en los campos magnéticos es muy parecida a la conducta de generadores y motores de cd reales que se estudiará en el capítulo 8. Sin embargo, los generadores y motores reales no se mueven en línea recta: *giran*. El siguiente paso para entender las máquinas de cd reales es estudiar el ejemplo más sencillo posible de una máquina giratoria.

La máquina de cd giratoria más sencilla posible se muestra en la figura 7-1. Consta de una espira sencilla de alambre que gira sobre un eje fijo. La parte giratoria de esta máquina se llama *rotor* y la parte estacionaria se llama *estator*. El campo magnético de la máquina se alimenta de los polos norte y sur magnéticos que se observan en el estator de la figura 7-1.

Nótese que la espira de alambre del rotor se encuentra en una ranura labrada en el núcleo ferromagnético. El hierro del rotor, junto con la forma curva de las caras polares, proporciona un entrehierro de ancho constante entre el rotor y el estator. Recuérdese del capítulo 1 que la reluctancia del aire es mucho más alta que la del hierro en la máquina. Para minimizar la reluctancia del camino del flujo a través de la máquina, el flujo debe tomar el camino más corto posible a través del aire entre las caras polares y la superficie del rotor.

Puesto que el flujo magnético debe tomar el camino más corto a través del aire, es *perpendicular* a la superficie del rotor en todo punto situado bajo las caras polares. Además, puesto que el entrehierro tiene una anchura uniforme, la reluctancia es la misma en todo punto situado bajo las

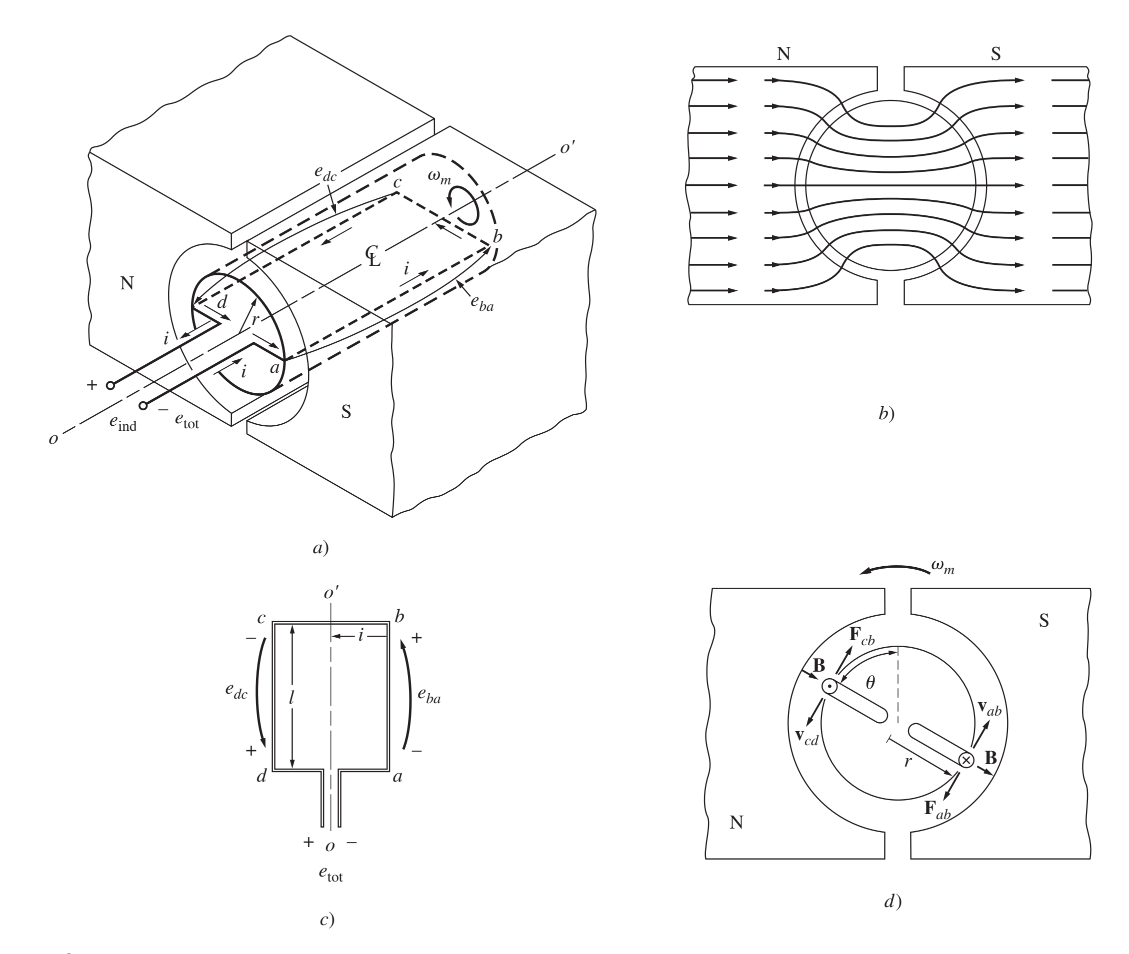


FIGURA 7-1 Espira sencilla giratoria entre caras polares curvas. *a*) Vista en perspectiva; *b*) vista de las líneas de campo; *c*) vista superior; *d*) vista frontal.

caras polares. Que la reluctancia sea uniforme quiere decir que la densidad del flujo magnético es constante en todo punto situado bajo las caras polares.

Voltaje inducido en una espira giratoria

Si el rotor de esta máquina gira, se inducirá un voltaje en la espira de alambre. Para determinar la magnitud y forma del voltaje, examínese la figura 7-2. La espira de alambre que se muestra allí es rectangular, sus lados *ab* y *cd* son perpendiculares al plano de la página y sus lados *bc* y *da* son paralelos al plano de la página. El campo magnético es constante y perpendicular a la superficie del rotor en todo punto situado bajo las caras polares y rápidamente cae a cero más allá de las orillas de los polos.

Para determinar el voltaje total e_{tot} en la espira, se examinará cada uno de sus segmentos por separado y se sumarán todos los voltajes resultantes. El voltaje en cada segmento está dado por la ecuación (1-45):

$$e_{ind} = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{l} \qquad \textbf{(1-45)}$$

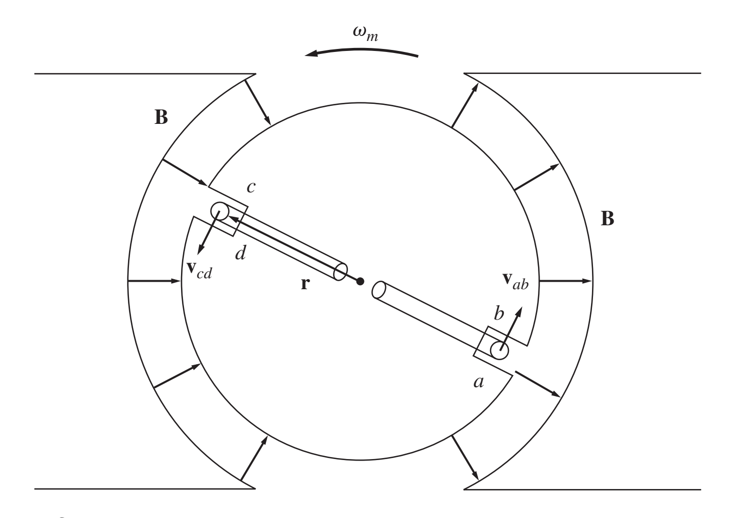


FIGURA 7-2 Deducción de la ecuación del voltaje inducido en la espira.

1. *Segmento ab*. En este segmento la velocidad en el alambre es tangencial a la trayectoria de rotación. El campo

magnético **B** apunta perpendicularmente hacia afuera de la superficie del rotor en todo punto situado bajo la cara polar y es cero más allá de las orillas de ella. Por debajo de la cara polar, la velocidad **v** es perpendicular a **B**, y la cantidad **v** × **B** apunta hacia la página. Por lo tanto, el voltaje inducido en el segmento es

$$e_{ba} = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{l}$$
$$= \begin{cases} vBl & \text{positivo hacia dentro de la página} \quad \text{debajo de la cara polar} \\ 0 & \text{más allá de los extremos de los polos} \end{cases} \tag{7-1}$$

2. *Segmento bc*. En este segmento la cantidad **v** × **B** apunta hacia la página o hacia afuera de ella, mientras que la longitud **l** tiene el mismo plano que la página, por lo que **v** × **B** es perpendicular a **l**. Por lo tanto, el voltaje en el segmento *bc* será cero:

$$e_{\text{cb}} = 0 \tag{7-2}$$

3. *Segmento cd*. En este segmento la velocidad del alambre es tangencial al camino de rotación. El campo magnético **B** apunta perpendicularmente hacia *adentro* de la superficie del rotor en todo punto situado bajo la cara polar y es cero más allá de las orillas de ella. Por debajo de la cara polar, la velocidad **v** es perpendicular a **B**, y la cantidad **v** × **B** apunta hacia afuera de la página. Por lo tanto, el voltaje inducido en el segmento es

$$e_{dc} = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{l}$$
$$= \begin{cases} vBl & \text{positivo hacia fuera de la página} \quad \text{bajo la cara polar} \\ 0 & \text{más allá de los extremos de los polos} \end{cases} \tag{7-3}$$

4. *Segmento da*. Igual que en el segmento *bc*, **v** × **B** es perpendicular a **l**. Por lo tanto, el voltaje en el segmento *da* también será cero:

$$e_{ad} = 0 \tag{7-4}$$

El voltaje total inducido en la espira e_{ind} está dado por

$$e_{\text{ind}} = e_{ba} + e_{cb} + e_{dc} + e_{ad}$$

$$e_{\text{ind}} = \begin{cases} 2vBl & \text{bajo las caras polares} \\ 0 & \text{más allá de los extremos de los polos} \end{cases} \tag{7-5}$$

Cuando la espira gira 180°, el segmento *ab* está bajo la cara del polo norte en lugar de estar bajo la cara del polo sur. En ese momento se invierte la dirección del voltaje en el segmento, pero su magnitud permanece constante. En la figura 7-3 se muestra el voltaje resultante e_{tot} en función del tiempo.

Hay otra forma de expresar la ecuación (7-5), que relaciona claramente la conducta de la espira sencilla con la conducta de máquinas de cd reales más grandes. Para deducir esta expresión alternativa, examínese la figura 7-4. Nótese que la velocidad tangencial *v* de las orillas de la espira se puede expresar como

$$v = r\omega_m$$

donde *r* es el radio del eje de rotación hacia fuera de la orilla de la espira y ω_m es la velocidad angular de la espira. Sustituyendo esta expresión en la ecuación (7-5) se obtiene

$$e_{\text{ind}} = \begin{cases} 2r\omega_m Bl & \text{bajo las caras polares} \\ 0 & \text{más allá de los extremos de los polos} \end{cases}$$

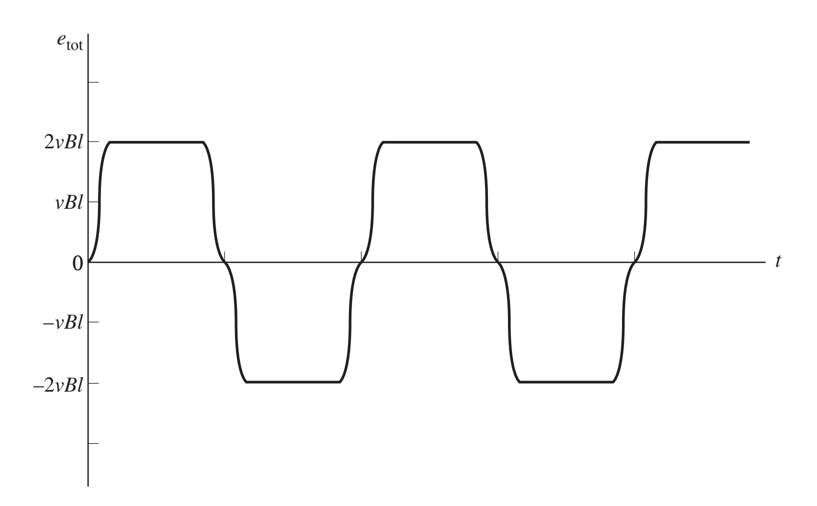


FIGURA 7-3 Voltaje de salida de la espira.

$$e_{ind} = \begin{cases} 2rlB\omega_m & \text{bajo las caras polares} \\ 0 & \text{más allá de los extremos de los polos} \end{cases}$$

Nótese también en la figura 7-4 que la superficie del rotor es cilíndrica, por lo que su área A es igual a $2\pi rl$. Puesto que hay dos polos, el área del rotor *debajo de cada polo* (despreciando los pequeños espacios entre los polos) es $A_P = \pi rl$. Por lo tanto,

$$e_{ind} = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi} A_P B\omega_m & \text{bajo las caras polares} \\ 0 & \text{más allá de los extremos de los polos} \end{cases}$$

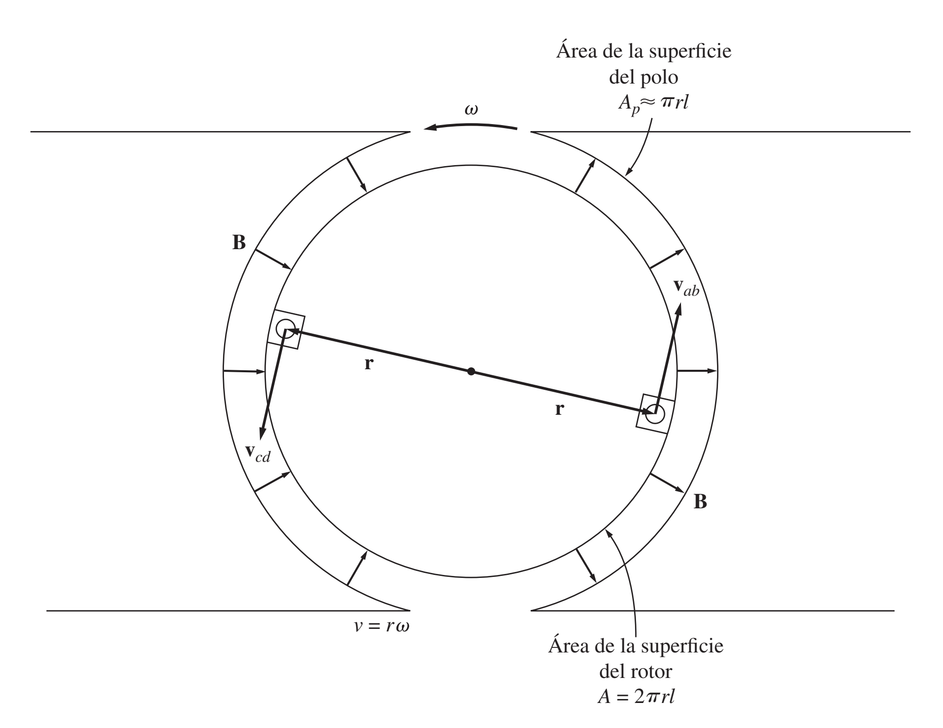


FIGURA 7-4 Deducción de la forma alternativa de la ecuación de voltaje inducido.

Puesto que la densidad del flujo B es constante en todo punto del entrehierro situado por debajo de las caras polares, el flujo total debajo de cada polo es igual al área del polo multiplicada por la densidad de su flujo:

$$\phi = A_P B$$

Por lo tanto, la forma final de la ecuación de voltaje es

$$e_{\text{ind}} = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\phi\omega_m & \text{bajo las caras polares} \\ 0 & \text{más allá de los extremos de los polos} \end{cases} \tag{7-6}$$

Entonces, *el voltaje generado en la máquina es igual al producto del flujo dentro de ella y su velocidad de rotación*, multiplicado por una constante que representa la construcción mecánica de la máquina. En general, el voltaje en cualquier máquina real depende de tres factores:

1. El flujo en la máquina.
2. La velocidad de rotación.
3. Una constante que representa la construcción de la máquina.

Determinación del voltaje de cd de una espira giratoria

La figura 7-3 muestra una gráfica del voltaje e_{tot} que genera por la espira giratoria. Como puede apreciarse, el voltaje que sale de la espira es alternativamente un valor positivo constante y un valor negativo constante. ¿Cómo se puede lograr que esta máquina produzca voltaje de cd en lugar de voltaje ca como el que produce ahora?

En la figura 7-5*a*) se muestra una manera de lograrlo. En ella se añaden dos segmentos conductores semicirculares a un extremo de la espira y se establecen dos contactos fijos en un ángulo tal que en el instante en que el voltaje en la espira es cero, los contactos hacen que los dos segmentos entren en cortocircuito. De esta manera, *cada vez que el voltaje de la espira cambia de dirección, los contactos también cambian de conexión y la salida del contacto siempre se acumula de la misma manera* (figura 7-5*b*). Este proceso de cambio de conexión se conoce como *conmutación*. Los segmentos giratorios semicirculares se llaman *segmentos de conmutación* y los contactos fijos se llaman *escobillas*.

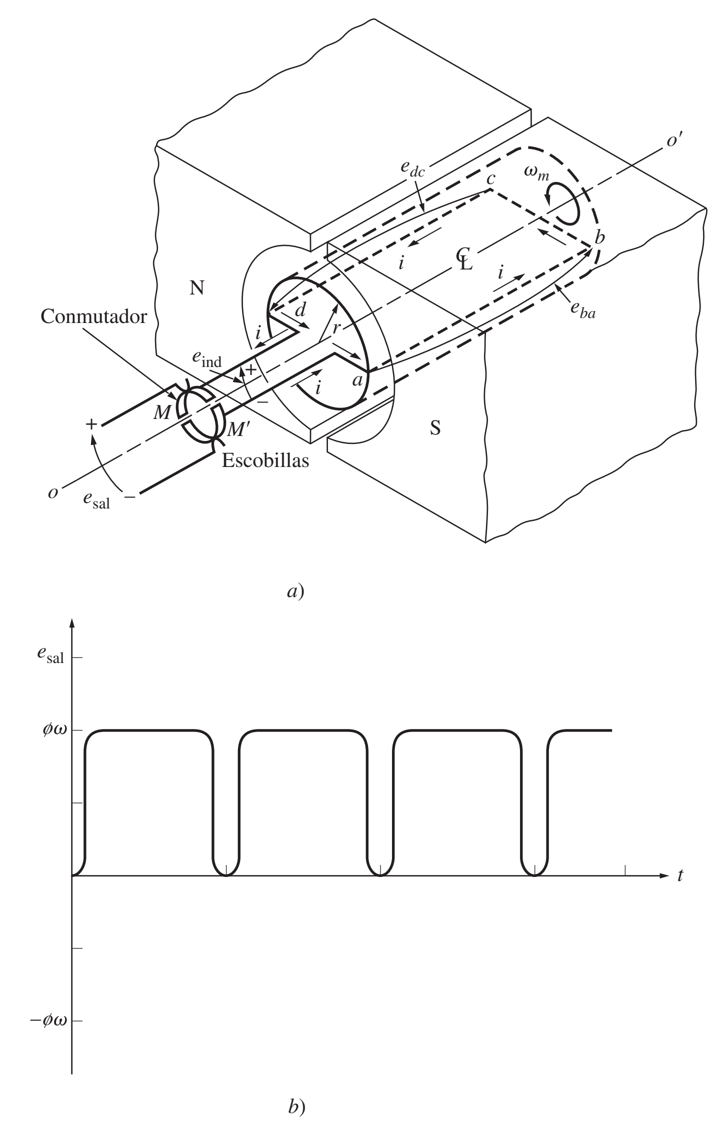


FIGURA 7-5 Producción de una salida de cd de una máquina con un conmutador y escobilla. *a*) Vista en perspectiva; *b*) voltaje de salida resultante.

El par inducido en la espira giratoria

Supóngase que se conecta una batería a la máquina de la figura 7-5. En la figura 7-6 se puede observar la configuración resultante. ¿Cuánto par se producirá en la espira cuando se cierre el interruptor y se deje fluir corriente en ella? Para determinar el par, examínese el detalle de la espira que se muestra en la figura 7-6*b*).

El método que debe emplearse para determinar el par en la espira es examinar cada uno de los segmentos de ella

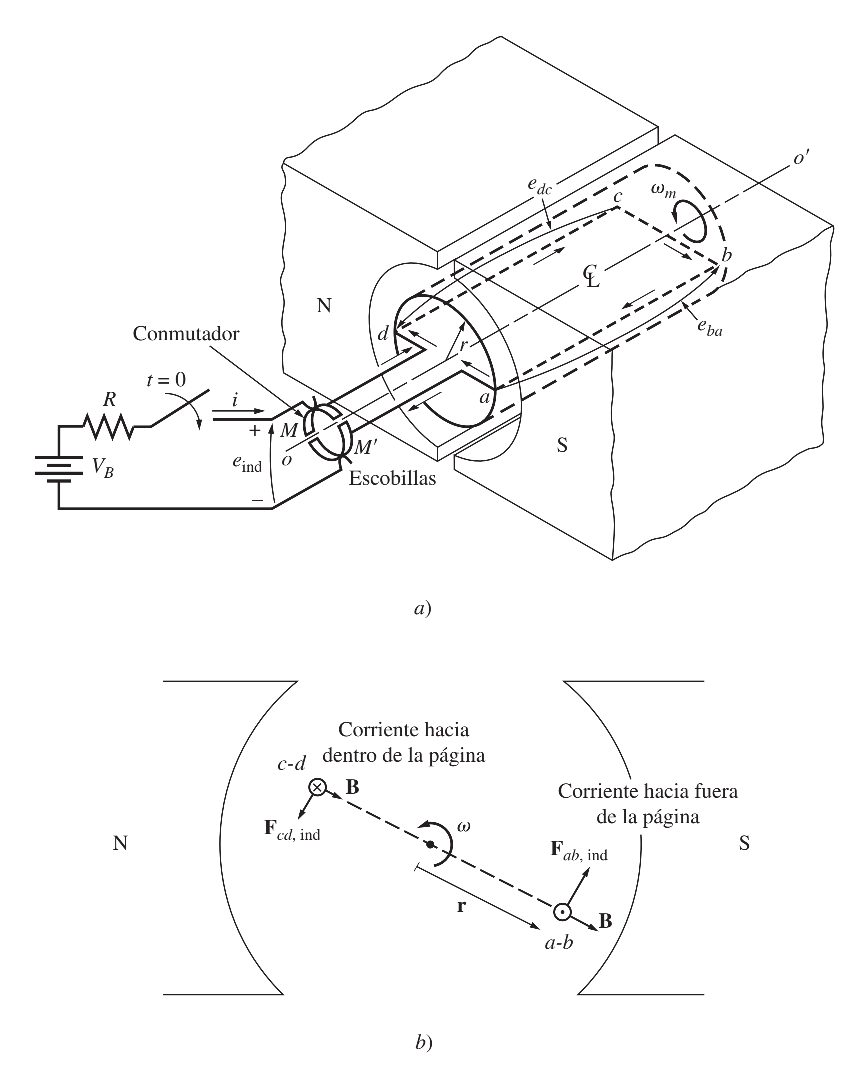


FIGURA 7-6 Deducción de la ecuación del par inducido en la espira. Nótese que para tener una mayor claridad no se muestra el núcleo de hierro en la parte *b*).

y luego sumar los efectos de todos los segmentos individuales. La fuerza en un segmento de la espira está dada por la ecuación (1-43):

$$\mathbf{F} = i(\mathbf{l} \times \mathbf{B}) \tag{1-43}$$

y el par en el segmento está dado por

$$\tau = rF \text{ sen } \theta \tag{1-6}$$

donde θ es el ángulo entre **r** y **F**. El par es esencialmente cero en cualquier punto en el que la espira esté ubicada más allá de la orilla de los polos.

Mientras la espira está bajo las caras polares, el par es

1. *Segmento ab*. En el segmento *ab* la corriente de la batería se dirige hacia afuera de la página. El campo magnético bajo las caras polares apunta radialmente hacia afuera del rotor, por lo que la fuerza en el alambre está dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{ab} &= i(\mathbf{l} \times \mathbf{B}) \\ &= ilB \qquad \text{tangencial a la dirección del movimiento} \end{aligned} \tag{7-7}$$

El par en el rotor provocado por esta fuerza es

$$\begin{aligned}\tau_{ab} &= rF \operatorname{sen} \theta \\ &= r(ilB) \operatorname{sen} 90° \\ &= rilB \qquad \text{en sentido contrario al de las manecillas del reloj}\end{aligned} \tag{7-8}$$

2. *Segmento bc*. En el segmento *bc* la corriente de la batería fluye de la parte superior izquierda de la figura a la parte inferior derecha. La fuerza inducida en el cable está dada por

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{bc} &= i(\mathbf{l} \times \mathbf{B}) \\ &= 0 \qquad \text{puesto que } \mathbf{l} \text{ es paralela a } \mathbf{B}\end{aligned} \tag{7-9}$$

Por lo tanto,

$$\tau_{bc} = 0 \tag{7-10}$$

3. *Segmento cd.* En el segmento *cd* la corriente de la batería está dirigida hacia la página. El campo magnético bajo la cara polar apunta radialmente hacia el rotor, por lo que la fuerza en el alambre está dada por

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{cd} &= i(\mathbf{l} \times \mathbf{B}) \\ &= ilB \qquad \text{tangencial a la dirección del movimiento}\end{aligned} \tag{7-11}$$

El par en el rotor provocado por esta fuerza es

$$\begin{aligned}\tau_{cd} &= rF \operatorname{sen} \theta \\ &= r(ilB) \operatorname{sen} 90° \\ &= rilB \qquad \text{en sentido contrario al de las manecillas del reloj}\end{aligned} \tag{7-12}$$

4. *Segmento da*. En el segmento *da* la corriente de la batería fluye de la parte superior izquierda de la figura hacia la parte inferior derecha. La fuerza inducida en el alambre está dada por

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{da} &= i(\mathbf{l} \times \mathbf{B}) \\ &= 0 \qquad \text{puesto que } \mathbf{l} \text{ es paralela a } \mathbf{B}\end{aligned} \tag{7-13}$$

Por lo tanto,

$$\tau_{da} = 0 \tag{7-14}$$

El par total inducido resultante en la espira está dado por

$$\tau_{\text{ind}} = \tau_{ab} + \tau_{bc} + \tau_{cd} + \tau_{da}$$

$$\tau_{\text{ind}} = \begin{cases} 2rilB & \text{bajo las caras polares} \\ 0 & \text{más allá de los extremos de los polos} \end{cases} \tag{7-15}$$

Dado que $A_P \approx \pi rl$ y $\phi = A_P B$, la expresión del par se puede reducir a

$$\tau_{\text{ind}} = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\phi i & \text{bajo las caras polares} \\ 0 & \text{más allá de los extremos de los polos} \end{cases} \tag{7-16}$$

Entonces, *el par producido en la máquina es el producto del flujo y la corriente en la máquina*, multiplicadas por una cantidad que representa la construcción mecánica de la máquina (el porcentaje del rotor que está cubierto por las caras polares). En general, el par de cualquier máquina real depende de los mismos tres factores:

1. El flujo en la máquina.
2. La corriente en la máquina.
3. Una constante que representa la construcción de la máquina.

EJEMPLO 7-1

La figura 7-6 muestra una espira giratoria sencilla entre caras polares curvas conectadas a una batería y a un resistor mediante un interruptor. El resistor que se ilustra representa la resistencia total de la batería y del alambre en la máquina. Las dimensiones físicas y características de la máquina son

$$r = 0.5 \text{ m} \qquad l = 1.0 \text{ m}$$
$$R = 0.3\ \Omega \qquad B = 0.25 \text{ T}$$
$$V_B = 120 \text{ V}$$

a) ¿Qué sucede cuando se cierra el interruptor?
b) ¿Cuál es la corriente de arranque máxima de la máquina? ¿Cuál es su velocidad angular en estado estacionario en vacío?
c) Suponga que se añade una carga a la espira y el par resultante es 10 N • m. ¿Cuál será la nueva velocidad en estado estacionario? ¿Cuánta potencia se suministra al eje de la máquina? ¿Cuánta potencia suministra la batería? ¿Esta máquina actúa como motor o como generador?
d) Suponga que la máquina está en vacío de nuevo y se aplica al eje un par de 7.5 N • m en el sentido de la rotación. ¿Cuál es la nueva velocidad de estado estacionario? ¿Esta máquina es un motor o un generador?
e) Suponga que la máquina funciona en vacío. ¿Cuál será la velocidad final en estado estacionario si se reduce la densidad de flujo a 0.20 T?

Solución

a) Cuando se cierra el interruptor de la figura 7-6, fluye corriente en la espira. Puesto que la espira está estacionaria inicialmente, $e_{ind} = 0$. Por lo tanto, la corriente está dada por

$$i = \frac{V_B - e_{ind}}{R} = \frac{V_B}{R}$$

La corriente fluye a través de la espira del rotor y produce un par

$$\tau_{ind} = \frac{2}{\pi}\phi i \qquad \text{en sentido contrario al de las manecillas del reloj}$$

Este par inducido produce una aceleración angular en dirección contraria a la de las manecillas del reloj, por lo que el rotor de la máquina comienza a girar. Pero conforme el rotor gira, se produce un voltaje inducido en el motor. Este voltaje inducido está dado por

$$e_{ind} = \frac{2}{\pi}\phi\omega_m$$

por lo que cae la corriente i. Conforme cae la corriente, disminuye $\tau_{ind} = (2/\pi)\phi i \downarrow$ y la máquina gira en estado estacionario con $\tau_{ind} = 0$, y el voltaje de la batería $V_B = e_{ind}$.

Éste es el mismo comportamiento de arranque descrito anteriormente para la máquina de cd lineal.

b) En *condiciones de arranque*, la corriente de la máquina es

$$i = \frac{V_B}{R} = \frac{120 \text{ V}}{0.3\ \Omega} = 400 \text{ A}$$

En *condiciones de estado estacionario en vacío*, el par inducido τ_{ind} debe ser cero. Pero si $\tau_{ind} = 0$, esto implica que la corriente i debe ser igual a cero, puesto que $\tau_{ind} = (2/\pi)\phi i$ y el flujo es distinto de cero. El hecho de que $i = 0$ A significa que el voltaje de la batería $V_B = e_{ind}$. Por lo tanto, la velocidad del rotor es

$$V_B = e_{ind} = \frac{2}{\pi}\phi\omega_m$$

$$\omega_m = \frac{V_B}{(2/\pi)\phi} = \frac{V_B}{2rlB}$$

$$= \frac{120 \text{ V}}{2(0.5 \text{ m})(1.0 \text{ m})(0.25 \text{ T})} = 480 \text{ rad/s}$$

c) Si se aplica un par de carga de 10 N • m al eje de la máquina, comenzará a perder velocidad. Pero conforme ω_m disminuye, se reduce $e_{ind} = (2/\pi)\phi\omega_m\downarrow$ y la corriente del rotor se incrementa $[i = (V_B - e_{ind}\downarrow)/R]$. A medida que la corriente del rotor se incrementa, $|\tau_{ind}|$ también aumenta, hasta que $|\tau_{ind}| = |\tau_{carga}|$ a una velocidad ω_m menor.

En estado estacionario, $|\tau_{carga}| = |\tau_{ind}| = (2/\pi)\phi i$. Por lo tanto,

$$i = \frac{\tau_{ind}}{(2/\pi)\phi} = \frac{\tau_{ind}}{2rlB}$$

$$= \frac{10 \text{ N} \cdot \text{m}}{(2)(0.5 \text{ m})(1.0 \text{ m})(0.25 \text{ T})} = 40 \text{ A}$$

Por la ley de voltaje de Kirchhoff, $e_{ind} = V_B - iR$, por lo que

$$e_{ind} = 120 \text{ V} - (40 \text{ A})(0.3\ \Omega) = 108 \text{ V}$$

Finalmente, la velocidad del eje es

$$\omega_m = \frac{e_{ind}}{(2/\pi)\phi} = \frac{e_{ind}}{2rlB}$$

$$= \frac{108 \text{ V}}{(2)(0.5 \text{ m})(1.0 \text{ m})(0.25 \text{ T})} = 432 \text{ rad/s}$$

La potencia suministrada al eje es

$$P = \tau\omega_m$$

$$= (10 \text{ N} \cdot \text{m})(432 \text{ rad/s}) = 4\,320 \text{ W}$$

La potencia que sale de la batería es

$$P = V_B i = (120 \text{ V})(40 \text{ A}) = 4\,800 \text{ W}$$

Esta máquina opera como *motor*, es decir, convierte potencia eléctrica en potencia mecánica.

d) Si se aplica un par en la dirección del movimiento, el rotor acelera. Conforme se incrementa la velocidad, aumenta el voltaje interno e_{ind} y sobrepasa V_B, por lo que la corriente fluye hacia fuera de la parte superior de la barra y hacia la batería. Esta máquina ahora actúa como *generador*. La corriente provoca un par inducido opuesto a la dirección del movimiento. El par inducido se opone al par externo aplicado y a la carga $|\tau_{carga}| = |\tau_{ind}|$ a una velocidad mayor ω_m.

La corriente en el rotor será

$$i = \frac{\tau_{ind}}{(2/\pi)\phi} = \frac{\tau_{ind}}{2rlB}$$

$$= \frac{7.5 \text{ N} \cdot \text{m}}{(2)(0.5 \text{ m})(1.0 \text{ m})(0.25 \text{ T})} = 30 \text{ A}$$

El voltaje inducido e_{ind} es

$$\begin{aligned} e_{ind} &= V_B + iR \\ &= 120 \text{ V} + (30 \text{ A})(0.3\ \Omega) \\ &= 129 \text{ V} \end{aligned}$$

Finalmente, la velocidad del eje es

$$\omega_m = \frac{e_{ind}}{(2/\pi)\phi} = \frac{e_{ind}}{2rlB}$$

$$= \frac{129 \text{ V}}{(2)(0.5 \text{ m})(1.0 \text{ m})(0.25 \text{ T})} = 516 \text{ rad/s}$$

e) Puesto que inicialmente, con las condiciones propuestas al principio, la máquina no tiene carga, la velocidad $\omega_m = 480$ rad/s. Si disminuye el flujo, se presenta un transitorio. Sin embargo, una vez que se termina el transitorio, la máquina debe tener una vez más un par igual a cero puesto que aún no hay carga en el eje. Si $\tau_{ind} = 0$, entonces la corriente en el rotor debe ser cero y $V_B = e_{ind}$. Entonces, la velocidad en el eje es

$$\omega_m = \frac{e_{ind}}{(2/\pi)\phi} = \frac{e_{ind}}{2rlB}$$

$$= \frac{120 \text{ V}}{(2)(0.5 \text{ m})(1.0 \text{ m})(0.20 \text{ T})} = 600 \text{ rad/s}$$

Nótese que cuando el flujo en la máquina disminuye, la velocidad se incrementa. Éste es el mismo comportamiento que se observa en una máquina lineal y es la misma manera en que se comportan los motores de cd reales.

7.2 CONMUTACIÓN EN UNA MÁQUINA DE CD SENCILLA DE CUATRO ESPIRAS

La *conmutación* es el proceso mediante el cual se convierten los voltajes y corrientes de ca del rotor de una máquina de cd a voltajes y corrientes de cd en sus terminales. Se requiere de un estudio más detallado para determinar cómo se desarrolla esta conversión y para descubrir los problemas asociados con ella. En esta sección se explicará la técnica de la conmutación en una máquina más compleja que la espira sencilla giratoria de la sección 7.1, pero menos compleja que una máquina de cd real. En la sección 7.3 se continuará con este desarrollo y se explicará la conmutación en las máquinas de cd reales.

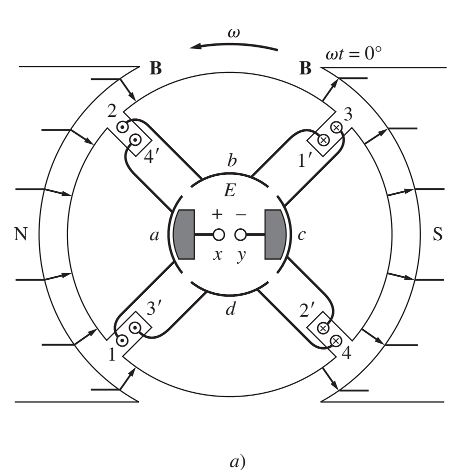


FIGURA 7-7 *a*) Máquina de cd con dos polos y cuatro espiras en el tiempo $\omega t = 0°$. (*continúa*)

En la figura 7-7 se muestra una máquina de cd sencilla de dos polos con cuatro espiras. Esta máquina tiene cuatro espiras completas incrustadas en ranuras labradas en el acero laminado de su rotor. Las caras polares de esta máquina son curvas para que el entrehierro tenga una anchura uniforme y proporcionar una densidad de flujo uniforme en cualquier punto ubicado por debajo de las caras polares.

Las cuatro espiras de esta máquina están dispuestas en ranuras de manera especial. El extremo de cada espira que "no está marcado con una prima" es el alambre que queda más en la orilla de cada ranura, mientras que el extremo de cada espira que "está marcado con una prima" es el alambre que queda en la parte más interna de la ranura directamente opuesta. En la figura 7-7*b*) se muestran las conexiones en el devanado del conmutador de la máquina. Nótese que la espira 1

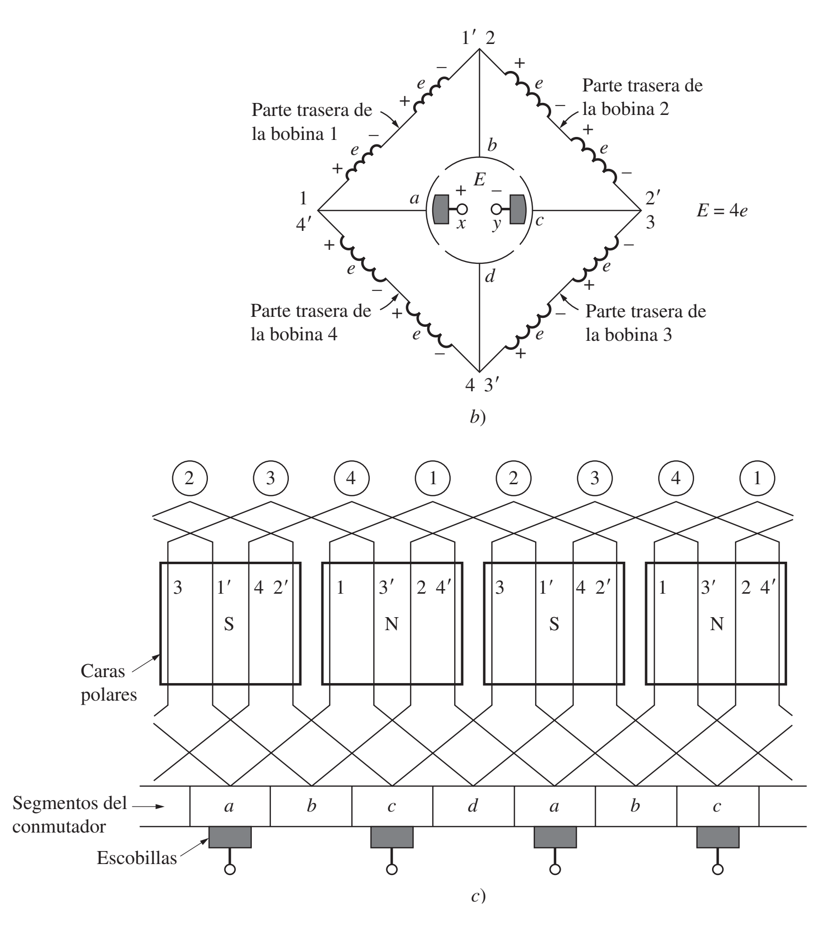


FIGURA 7-7 (conclusión)
b) Voltajes en los conductores del rotor en ese momento. *c*) Diagrama del devanado de la máquina que muestra las interconexiones de las espiras del rotor.

se tiende entre los segmentos *a* y *b* del conmutador, la espira 2 se tiende entre los segmentos *b* y *c*, y así sucesivamente alrededor del rotor.

En el instante que se muestra en la figura 7-7, los extremos 1, 2, 3′ y 4′ de las espiras están bajo la cara del polo norte, mientras que los extremos 1′, 2′, 3 y 4 de las espiras están bajo la cara del polo sur. El voltaje en cada uno de los extremos 1, 2, 3′ y 4′ de las espiras está dado por

$$e_{\text{ind}} = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{l} \qquad \textbf{(1-45)}$$

$$e_{\text{ind}} = vBl \qquad \text{el positivo hacia fuera de la página} \qquad \textbf{(7-17)}$$

El voltaje en cada uno de los extremos 1′, 2′, 3 y 4 de las espiras está dado por

$$\tau_{\text{ind}} = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{l} \qquad \textbf{(1-45)}$$

$$= vBl \qquad \text{el positivo hacia dentro de la página} \qquad \textbf{(7-18)}$$

En la figura 7-7*b*) se muestra el resultado total. En esta figura cada bobina representa un lado (o *conductor*) de una espira. Si se llama $e = vBl$ al voltaje inducido en cualquier lado de la espira, entonces el voltaje total en las escobillas de la máquina es

$$E = 4e \qquad \omega t = 0° \qquad \textbf{(7-19)}$$

Nótese que hay dos caminos paralelos para que la corriente fluya a través de la máquina. La existencia de dos o más caminos paralelos para la corriente del rotor es una característica común de todos los esquemas de conmutación.

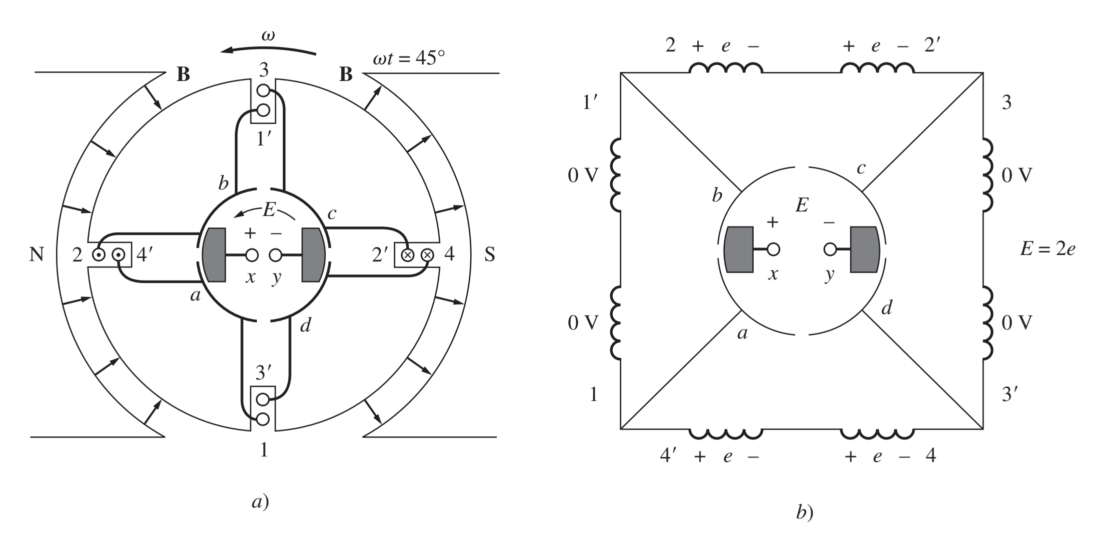


FIGURA 7-8 La misma máquina en el tiempo ωt = 45°, muestra los voltajes en los conductores.

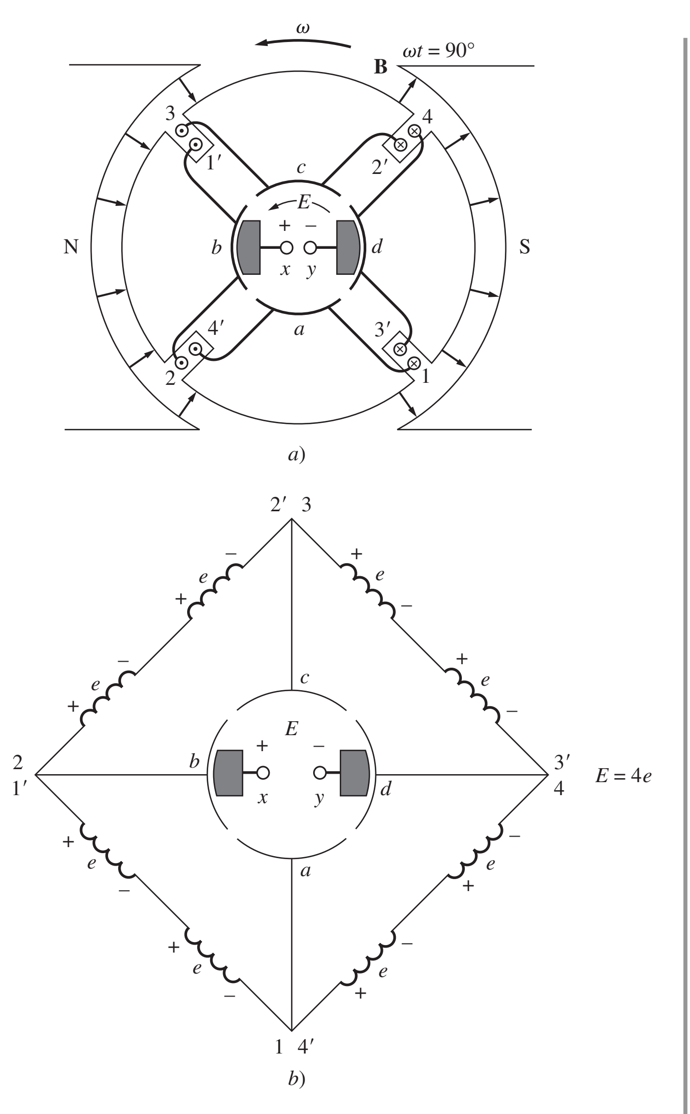


FIGURA 7-9 La misma máquina en el tiempo ωt = 90°, muestra los voltajes en los conductores.

¿Qué le pasa al voltaje E en los terminales conforme el rotor sigue girando? Para encontrar la respuesta a esta pregunta, examínese la figura 7-8, muestra la máquina en el tiempo $\omega t = 45°$. En ese instante, las espiras 1 y 3 giraron hacia el espacio que hay entre los polos, por lo que el voltaje a través de cada una de ellas es cero. Nótese que en este instante las escobillas de la máquina están haciendo cortocircuito en los segmentos del conmutador *ab* y *cd*. Esto sucede justo en el momento en que las espiras entre estos segmentos tienen 0 V a través de ellas, por lo que el cortocircuito de los segmentos no causa ningún problema. En este momento, sólo las espiras 2 y 4 están bajo las caras polares, por lo que el voltaje en los terminales E está dado por

$$E = 2e \qquad \omega t = 0° \tag{7-20}$$

Permítase al rotor continuar girando por 45° más. En la figura 7-9 se muestra la situación resultante. En este momento los extremos 1′, 2, 3 y 4′ de las espiras están bajo la cara del polo norte y los extremos 1, 2′, 3′ y 4 de las espiras están bajo la cara del polo sur. Los voltajes aún se acumulan hacia fuera de la página en los extremos bajo la cara del polo norte y hacia la página en los extremos bajo la cara del polo sur. En la figura 7-9*b*) se muestra el diagrama del voltaje resultante. Ahora hay cuatro extremos que portan voltaje en cada camino paralelo a través de la máquina, por lo que el voltaje en los terminales E está dado por

$$E = 4e \qquad \omega t = 90° \tag{7-21}$$

Compare la figura 7-7 con la figura 7-9. Nótese que *los voltajes en las espiras 1 y 3 en las dos figuras están invertidos, pero puesto que sus conexiones también están invertidas, el voltaje total aún se acumula en la misma dirección que antes*. Este hecho está en el núcleo de cada esquema de conmutación. En cualquier momento en que el voltaje en una espira

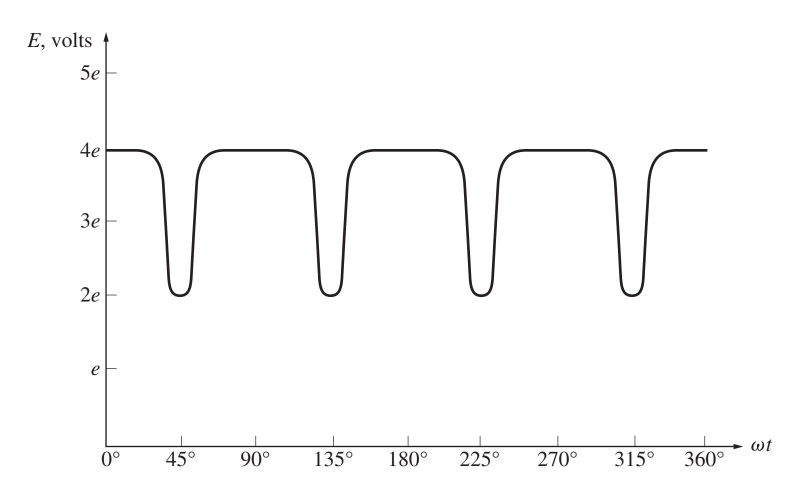


FIGURA 7-10 Voltaje de salida resultante de la máquina de la figura 7-7.

se invierte, las conexiones de la espira también se invierten y el voltaje total se sigue acumulando en la dirección original.

En la figura 7-10 se muestra el voltaje en los terminales de esta máquina en función del tiempo. Es una aproximación más cercana al nivel de cd constante que la que produce la espira sencilla giratoria de la sección 7.1. Conforme se incrementa el número de espiras en el rotor, la aproximación al voltaje de cd perfecto se acerca cada vez más.

En resumen:

> La *conmutación* es el proceso de cambiar las conexiones de la espira del rotor de una máquina de cd en el mismo momento en que el voltaje en la espira cambia de polaridad para mantener un voltaje de salida de cd esencialmente constante.

Al igual que en el caso de una espira sencilla giratoria, los segmentos giratorios a los que las espiras están unidas se llaman *segmentos del conmutador* y las partes estacionarias que se montan en la parte superior de los segmentos en movimiento se llaman *escobillas*. Los segmentos del conmutador en las máquinas reales normalmente están elaborados con barras de cobre. Las escobillas están hechas de una mezcla que contiene grafito, por lo que ocasionan muy poca fricción al frotar los segmentos giratorios del conmutador.

7.3 CONSTRUCCIÓN DEL SISTEMA DE CONMUTACIÓN Y DEL INDUCIDO EN LAS MÁQUINAS DE CD

En las máquinas de cd reales hay varias maneras en las que se puede conectar las espiras en el rotor (también llamado *inducido* o *armadura*) a sus segmentos del conmutador. Estas conexiones diferentes afectan el número de caminos de corriente paralelos que existen en el rotor, el voltaje de salida del rotor y el número y posición de las escobillas montadas sobre los segmentos del conmutador. Ahora se estudiará la construcción de las bobinas en un rotor de cd real y luego se examinará la forma en que están conectadas al conmutador para producir voltaje de cd.

Bobinas del rotor

Sin importar la manera en que los devanados estén conectados a los segmentos del conmutador, la mayoría de los devanados del rotor constan de bobinas preformadas en forma de diamante insertadas en las ranuras del inducido como una sola unidad (véase la figura 7-11). Cada bobina consta de una cantidad de *vueltas* (espiras) de alambre y cada una está envuelta con cinta y se encuentra aislada de las otras y de la ranura del rotor. A cada lado de una vuelta se le llama *conductor*. El número de conductores en el inducido de una máquina está dado por

$$Z = 2CN_C \tag{7-22}$$

donde

Z = número de conductores en el rotor
C = número de bobinas en el rotor
N_C = número de vueltas en cada bobina

Normalmente una bobina abarca 180 grados eléctricos. Esto quiere decir que cuando un lado está debajo del centro de cierto polo magnético, el otro lado está debajo del centro del polo magnético con *polaridad opuesta*. Los polos *físicos* pueden no estar localizados a 180 grados mecánicos el uno del otro, pero el campo magnético invierte por completo su polaridad cuando pasa por abajo de un polo al siguiente. La relación entre el ángulo eléctrico y el ángulo mecánico en cierta máquina está dada por

$$\theta_e = \frac{P}{2}\theta_m \tag{7-23}$$

donde

θ_e = ángulo eléctrico, en grados
θ_m = ángulo mecánico, en grados
P = número de polos magnéticos en la máquina

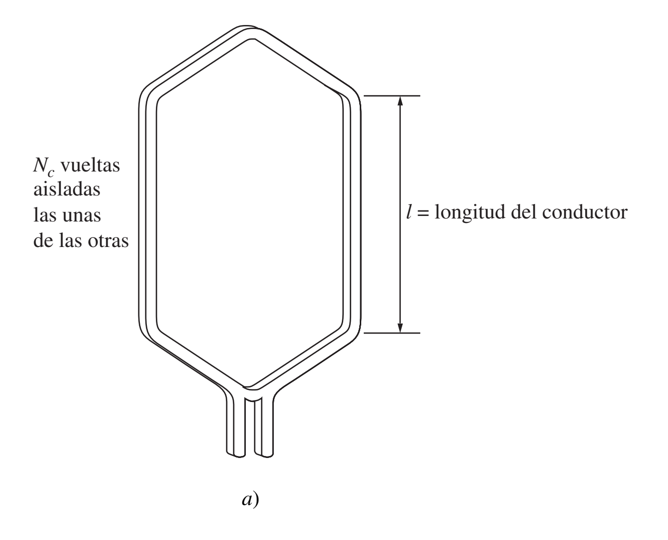
Si una bobina abarca 180 grados eléctricos, los voltajes en los conductores en cualquier lado de la bobina serán exactamente iguales en magnitud y opuestos en dirección en todo momento. Este tipo de bobina se llama *bobina de paso diametral*.

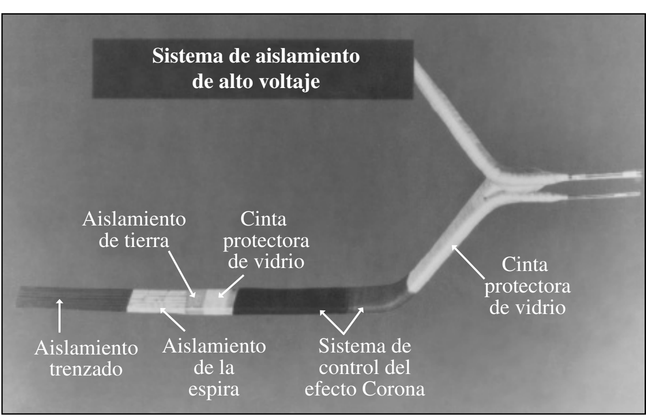
Hay algunas bobinas que abarcan menos de 180 grados eléctricos, a las cuales se les llama *bobinas de paso fraccionario*, y al devanado de rotor embobinado con bobinas de paso fraccionario se le llama *devanado de cuerdas*. La cantidad de encordado en un devanado se define con el *factor de paso p*, que se expresa como

$$p = \frac{\text{ángulo eléctrico de la bobina}}{180°} \times 100\% \tag{7-24}$$

A veces se puede utilizar una pequeña cantidad de encordado en los devanados del rotor para mejorar la conmutación.

La mayoría de los devanados de rotor constan *de dos capas*, lo que quiere decir que se insertan los lados de dos bobinas diferentes en cada ranura. Un lado de cada bobina estará en el fondo de su ranura y el otro lado estará en la parte superior de ella. Este tipo de construcción requiere que se coloquen las bobinas individuales en las ranuras del rotor por medio de un procedimiento muy complicado (véase figura 7-12). Un lado de cada bobina se coloca en el fondo de su ranura y una vez que se colocan todos los lados en el fondo, se coloca el otro lado de cada bobina en la parte superior de la ranura. De esta manera, todos los devanados se entretejen conjuntamente, incrementando la fuerza mecánica y la uniformidad de la estructura final.





b)

FIGURA 7-11 *a*) Forma de una bobina típica de rotor preformada. *b*) Sistema típico de aislamiento de bobina que muestra el que existe entre las vueltas dentro de ella. (*Cortesía de General Electric Company*.)

Conexiones a los segmentos del conmutador

Una vez que se han instalado los devanados en las ranuras del rotor, se deben conectar a los segmentos del conmutador.

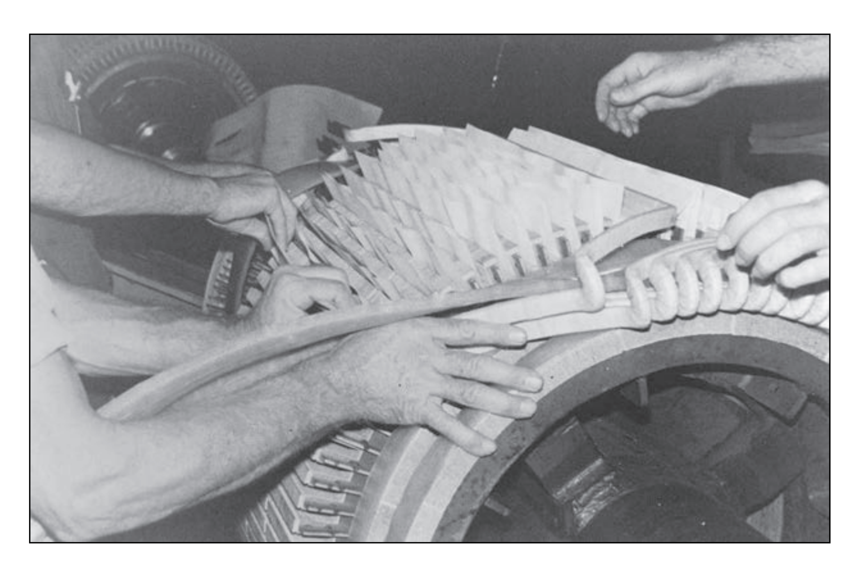


FIGURA 7-12 Instalación de las bobinas preformadas en el rotor de una máquina de cd. (*Cortesía de Westinghouse Electric Company*.)

Hay varias maneras de realizar estas conexiones y cada una de ellas tiene ciertas ventajas y desventajas.

La distancia (en número de segmentos) entre los segmentos del conmutador a los cuales están conectados los dos extremos de una bobina se llama *paso del conmutador* y_c. Si el extremo de una bobina (o un cierto número de bobinas de conexión ondulada) se conecta a un segmento del conmutador adelante del cual está conectado su comienzo, el devanado se llama *devanado progresivo* (véase figura 7-13*a*). Si el extremo de una bobina se conecta a un segmento del conmutador detrás del cual está conectado su comienzo, el devanado se llama *devanado regresivo* (véase figura 7-13*b*). Si todo lo demás es igual, la dirección de rotación de un rotor con devanado progresivo será inversa a la dirección de rotación de un rotor con devanado regresivo.

Además, los devanados del rotor (inducido) se clasifican de acuerdo con el *conjunto* de devanados completos e independientes. Un devanado simple (*símplex*) de rotor es único, completo y cerrado. Un devanado doble (*dúplex*) de rotor consta de dos *conjuntos* de devanados de rotor *completos e independientes*. Si un rotor tiene un devanado dúplex, entonces cada uno de los devanados estará asociado con todos los segmentos pares o nones de conmutación: un devanado estará conectado con los segmentos 1, 3, 5, etc., y el otro estará conectado con los segmentos 2, 4, 6, etc.

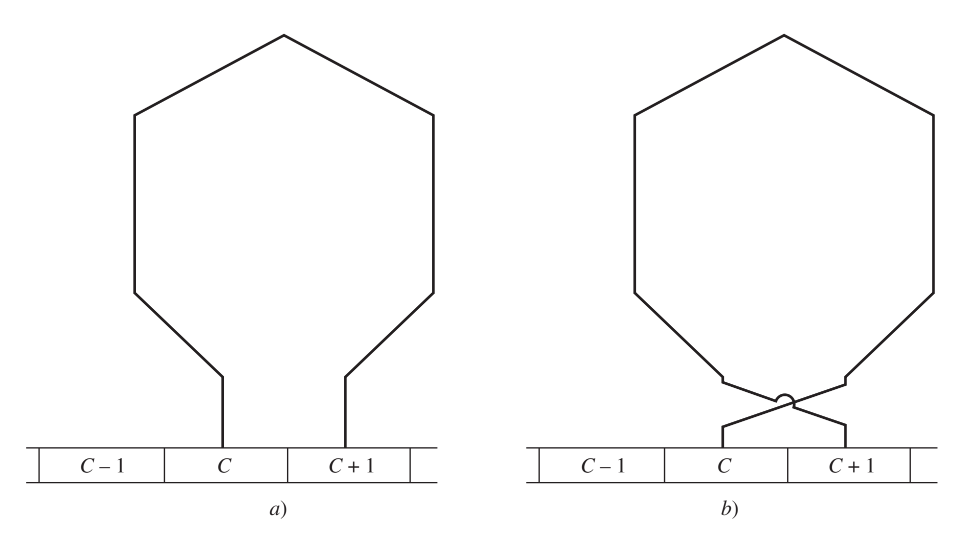


FIGURA 7-13 *a*) Bobina en un devanado progresivo de rotor. *b*) Bobina en un devanado regresivo de rotor.

De manera similar, un devanado triple (*tríplex*) tiene tres conjuntos de devanados de rotor completos e independientes y cada uno está conectado a cada tercer segmento del conmutador en el rotor. Colectivamente, todos los inducidos con más de un conjunto de devanados se llaman *devanados múltiples* o *múltiplex*.

Por último, los devanados del inducido se clasifican de acuerdo con la secuencia de sus conexiones con los segmentos del conmutador. Hay dos secuencias básicas de conexiones de devanados del inducido: *devanados imbricados* y *devanados ondulados*. Además, hay un tercer tipo de devanado llamado *devanado de pata de rana*, que combina los devanados imbricados y ondulados en un solo rotor. Estos devanados se examinarán individualmente a continuación y se discutirán sus ventajas y desventajas.

Devanados imbricados

El tipo de construcción de devanados más sencillo que se utiliza en las máquinas de cd modernas es el *devanado en serie sencillo* o *devanado imbricado*. Un devanado imbricado símplex de rotor consta de bobinas que contienen una o más vueltas de alambre y los dos extremos de cada bobina salen de *segmentos del conmutador adyacentes* (figura 7-13). Si el final de la bobina está conectado al segmento siguiente a aquel al que está conectado su comienzo el devanado es imbricado progresivo y $y_c = 1$; si el final de la bobina está conectado al segmento anterior a aquel al que está conectado su comienzo el devanado es imbricado regresivo y $y_c = -1$. En la figura 7-14 se muestra una máquina simple de dos polos con devanados imbricados.

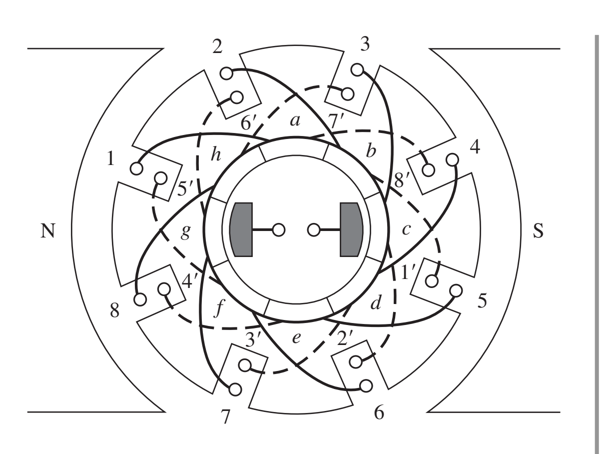


FIGURA 7-14 Máquina de cd simple con devanado imbricado y con dos polos.

Una característica interesante de los devanados imbricados simples es que *tienen tantos caminos* o trayectorias *de corriente paralelos a través de la máquina como polos en ella*. Si *C* es el número de bobinas y segmentos del conmutador presentes en el rotor y *P* es el número de polos en la máquina, entonces habrá *C*/*P* bobinas en cada uno de los *P* caminos de corriente paralelos a través de la máquina. El hecho de que haya *P* caminos de corriente también requiere que haya tantas escobillas en la máquina como polos para conectar todos esos caminos de corriente. Esta idea se ilustra por medio del motor simple de cuatro polos de la figura 7-15. Nótese que en este motor hay cuatro caminos de corriente a través del rotor, cada uno con un voltaje igual. El hecho de que haya tantos caminos de corriente en la máquina multipolar convierte al devanado imbricado en la opción ideal para máquinas de corriente alta y voltaje relativamente bajo, puesto que las altas corrientes que se requieren se pueden dividir entre varios de los diferentes caminos de corriente. Esta división de corriente permite que el tamaño de los conductores de rotor individuales sea razonable, incluso cuando la corriente total es extremadamente grande.

Sin embargo, el hecho de que haya muchos caminos paralelos a través de una máquina multipolar imbricada puede causar un problema muy serio. Para entender la naturaleza de este problema, examínese la máquina de seis polos de la figura 7-16. Debido al largo tiempo que se ha utilizado, tiene cierto desgaste en los rodamientos y sus alambres inferiores están más cerca de las caras polares que los superiores. Como resultado, hay un voltaje *más grande* en los caminos de corriente cuyos alambres pasan por debajo de las caras polares inferiores que en los caminos cuyos alambres pasan por debajo de las caras polares superiores. Puesto que todos los caminos están conectados en paralelo, el resultado será una corriente circulante que fluye hacia afuera de algunas escobillas en la máquina y regresa a través de otras, como se muestra en la figura 7-17. Sobra decir que esta situación no es buena para la máquina. Puesto que la resistencia del devanado del circuito del rotor es muy reducida, un pequeño desequilibrio entre los voltajes en los caminos paralelos provocará grandes corrientes circulantes a través de las escobillas y, potencialmente, serios problemas de calentamiento.

El problema con las corrientes circulantes dentro de los caminos paralelos de una máquina con cuatro o más polos no se puede eliminar por completo, pero se puede reducir un poco por medio de *compensadores* o *devanados de compensación*. Los compensadores son barras ubicadas en el rotor

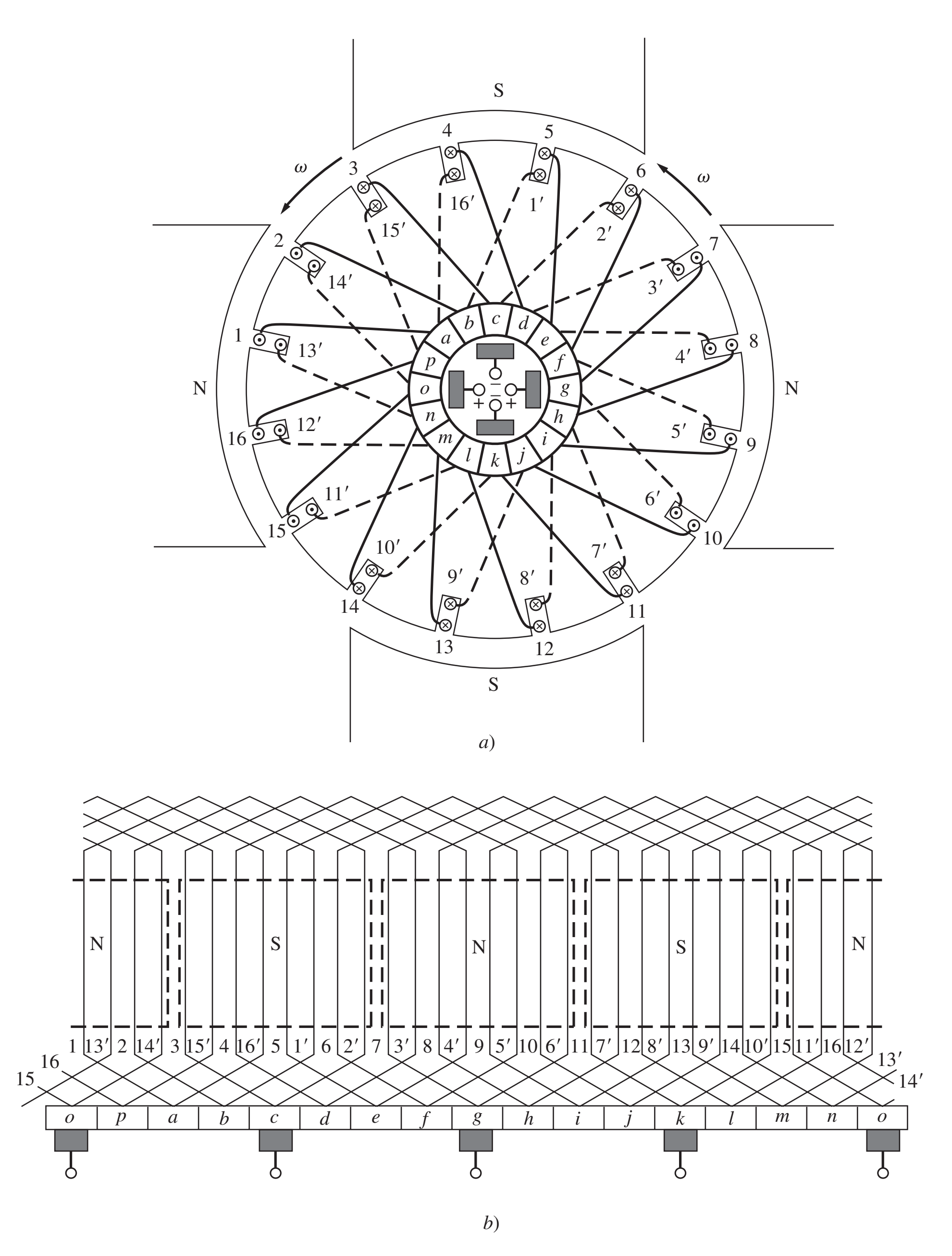


FIGURA 7-15 *a*) Motor de cd con devanado imbricado y con cuatro polos. *b*) Diagrama del devanado de rotor de esta máquina. Nótese que cada devanado termina en el segmento del conmutador siguiente al que comienza. Éste es un devanado imbricado progresivo.

de una máquina de cd de devanado imbricado que hacen cortocircuito en puntos con el mismo nivel de voltaje en diferentes caminos paralelos. El efecto de este cortocircuito es que cualquier corriente circulante que fluya dentro de las pequeñas secciones de los devanados entre en cortocircuito lo que impide que estas corrientes circulantes fluyan a través de las escobillas de la máquina. Estas corrientes circulantes corrigen incluso parcialmente el desequilibrio en el flujo que es el causante de su existencia. En la figura 7-18 se ilustra el compensador de la máquina de cuatro polos de la figura 7-15, y en la figura 7-19 se muestra el de una máquina de cd con devanado imbricado grande.

Si un devanado imbricado es doble, entonces tiene dos devanados completamente independientes colocados alrededor del rotor y los segmentos del conmutador pares o nones están unidos a uno de estos conjuntos. Por lo tanto, una bobina individual termina en el segundo segmento del conmutador anterior o posterior al segmento en el que comenzó y $y_c = \pm 2$ (lo cual depende de que el devanado sea progresivo o regresivo). Puesto que cada conjunto de devanados tiene tantos caminos

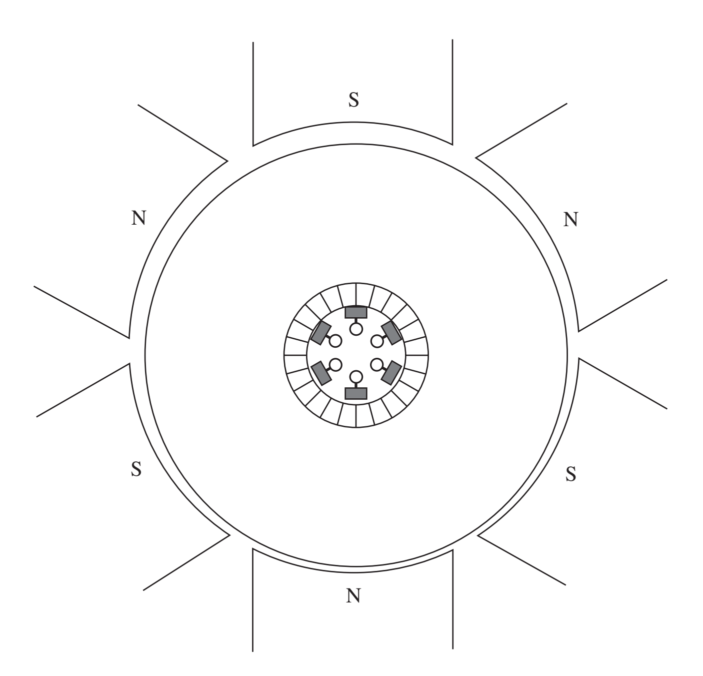


FIGURA 7-16 Motor de cd con seis polos que muestra los efectos del desgaste. Nótese que el rotor está un poco más cerca de los polos inferiores que de los superiores.

de corriente como polos, *la cantidad de caminos de corriente es el doble* de la cantidad de polos en un devanado imbricado doble.

En general, en el caso de un devanado imbricado múltiple (*m*-plex), la bobina del conmutador y_c es

$$y_c = \pm m \qquad \text{devanado imbricado} \tag{7-25}$$

y el número de caminos de corrientes en la máquina es

$$a = mP \qquad \text{devanado imbricado} \tag{7-26}$$

donde

a = número de caminos (o trayectorias en paralelo) de corriente en el rotor
m = número de devanados completos independientes (1, 2, 3, etc.)
P = número de polos en la máquina

Devanado ondulado

El *devanado ondulado* o *en serie* es una manera alternativa de conectar las bobinas del rotor a los segmentos del conmutador. En la figura 7-20 se muestra una máquina sencilla de cuatro polos con un devanado ondulado simple. En este devanado ondulado simple, una bobina de rotor *sí* y *otra no*, se conecta al segmento del conmutador adyacente al comienzo de la primera bobina. Por lo tanto, *hay dos devanados en serie* entre los segmentos del conmutador adyacentes. Además, cada par de bobinas entre segmentos adyacentes tiene un lado bajo cada cara polar, todos los voltajes de salida son la suma de los efectos de cada polo y no puede haber un desequilibrio de voltaje.

El terminal de la segunda bobina se puede conectar al segmento siguiente o anterior al segmento en el que se conectó el comienzo de la primera bobina. Si la segunda bobina se conecta al segmento siguiente a la primera bobina, el devanado es progresivo; si se conecta al segmento anterior a la primera bobina, el devanado es regresivo.

En general, si hay P polos en la máquina, entonces hay $P/2$ bobinas en serie entre segmentos del conmutador adyacentes. Si la bobina número $P/2$ se conecta al segmento siguiente a la primera

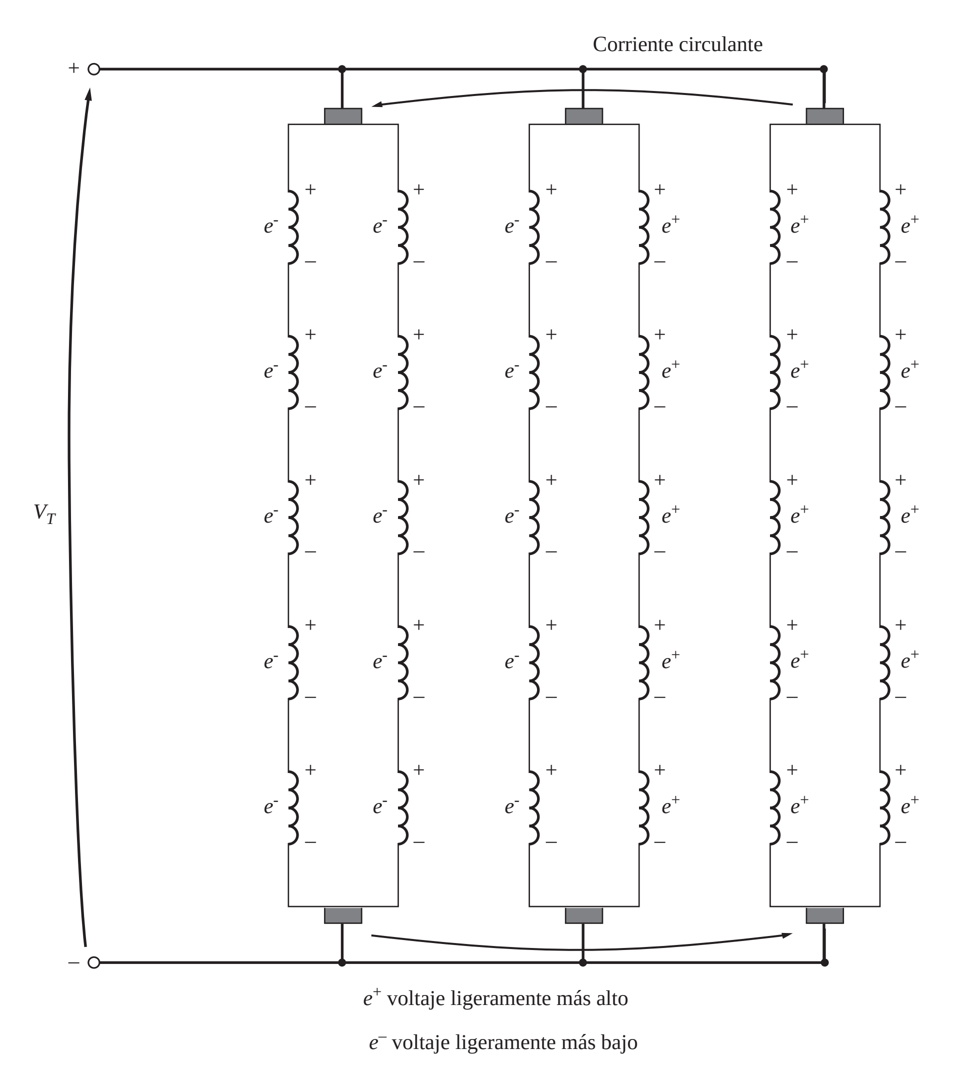


FIGURA 7-17 Los voltajes en los conductores del rotor de la máquina de la figura 7-16 no son iguales y producen corrientes circulantes que fluyen a través de las escobillas.

bobina, el devanado es progresivo. Si la bobina número $P/2$ se conecta al segmento anterior a la primera bobina, el devanado es regresivo.

En un devanado ondulado simple, hay sólo dos caminos de corriente. Hay $C/2$ o la mitad de los devanados en cada camino de corriente. Las escobillas en este tipo de máquina estarán separadas unas de otras por un paso polar completo.

¿Cuál es el paso de conmutación de un devanado ondulado? La figura 7-20 muestra un devanado progresivo de nueve bobinas y el extremo final de la bobina está a cinco segmentos de su punto de inicio. En un devanado ondulado regresivo el extremo final de la bobina está a cuatro segmentos de su punto de inicio. Por lo tanto, el extremo final de una bobina en un devanado ondulado de cuatro polos se debe conectar justo antes o después de la mitad del camino del círculo, comenzando a contar a partir del punto de inicio.

La expresión general del paso de conmutación en un devanado ondulado simple es

$$y_c = \frac{2(C \pm 1)}{P} \qquad \text{ondulado simple} \qquad \textbf{(7-27)}$$

donde C es el número de bobinas en el rotor y P es el número de polos en la máquina. El signo de más está asociado con los devanados progresivos y el signo de menos con los devanados regresivos. En la figura 7-21 se muestra un devanado ondulado simple.

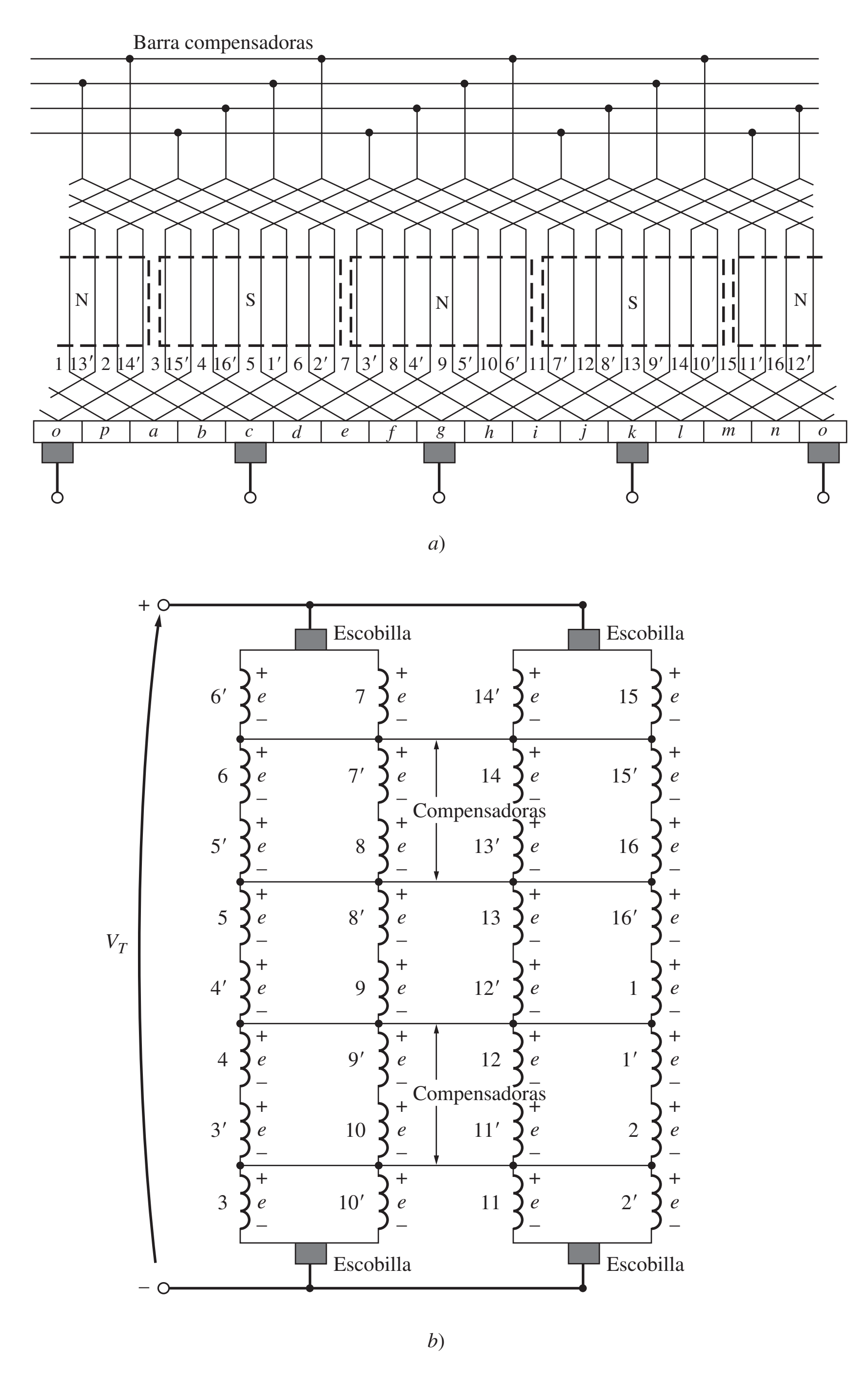


FIGURA 7-18 *a*) Conexión de un compensador en la máquina con cuatro polos de la figura 7-15. *b*) Diagrama de voltaje de la máquina que muestra los puntos en cortocircuito provocados por los compensadores.

Puesto que sólo hay dos caminos de corriente a través de un rotor devanado ondulado simple, sólo se necesitan dos escobillas para manejar la corriente. Esto se debe a que los segmentos en proceso de conmutación conectan los puntos con voltajes iguales bajo las caras polares. Si se desea, se pueden añadir más escobillas en puntos separados por 180 grados eléctricos, puesto que tienen el mismo potencial y están conectadas juntas por medio de los alambres en proceso de conmutación de la máquina. Normalmente se añaden escobillas extra a una máquina con devanado ondulado, incluso si no son necesarias, porque reducen la cantidad de corriente que debe circular a través de un grupo dado de escobillas.

Los devanados ondulados resultan adecuados para construir máquinas de alto voltaje, puesto que el número de bobinas en serie entre los segmentos del conmutador permite acumular un mayor voltaje más fácilmente que con un devanado imbricado.

Un devanado ondulado múltiple es un devanado con varios conjuntos *independientes* de devanados ondulados en el rotor. Estos conjuntos de devanados extra tienen dos caminos de corriente cada uno, por lo que el número de caminos de corriente en un devanado ondulado múltiple es

$$a = 2m \qquad \text{ondulado múltiple} \qquad \textbf{(7-28)}$$

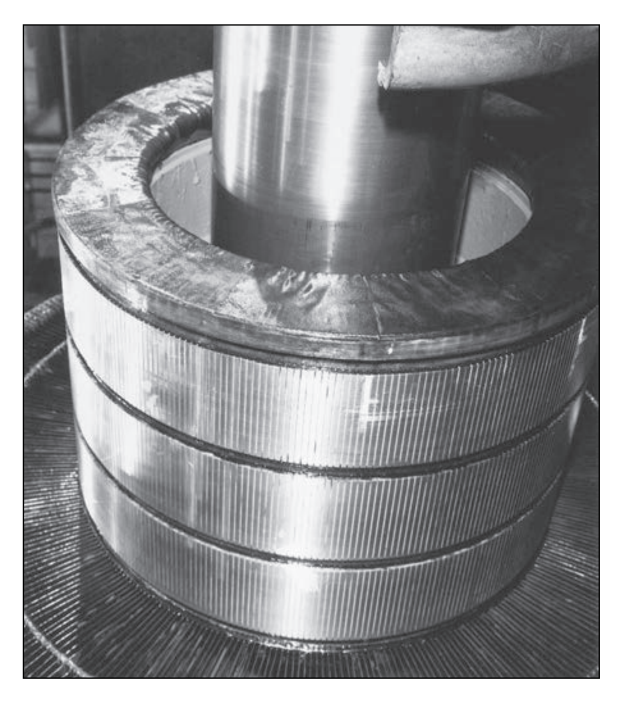


FIGURA 7-19 Vista de cerca del conmutador de una máquina de cd con devanado imbricado grande. Los compensadores están montados en el pequeño anillo, justo enfrente de los segmentos del conmutador. (*Cortesía de General Electric Company*.)

Devanado de pata de rana

El *devanado de pata de rana* o *devanado autocompensador* toma su nombre de la forma de sus bobinas, como se muestra en la figura 7-22. Consta de un devanado imbricado y un devanado ondulado combinados.

Los compensadores de un devanado imbricado común están conectados en puntos que tienen el mismo voltaje en los devanados. Los devanados ondulados se extienden entre puntos que tienen esencialmente el mismo voltaje bajo caras polares sucesivas con la misma polaridad, que son las mismas que los compensadores unen. Un devanado de pata de rana o autocompensador combina un devanado imbricado con un devanado ondulado, de tal manera que los devanados ondulados puedan funcionar como compensadores del devanado imbricado.

El número de caminos de corriente presentes en un devanado de pata de rana es

$$a = 2Pm_{\text{imb}} \qquad \text{devanado de pata de rana} \qquad \textbf{(7-29)}$$

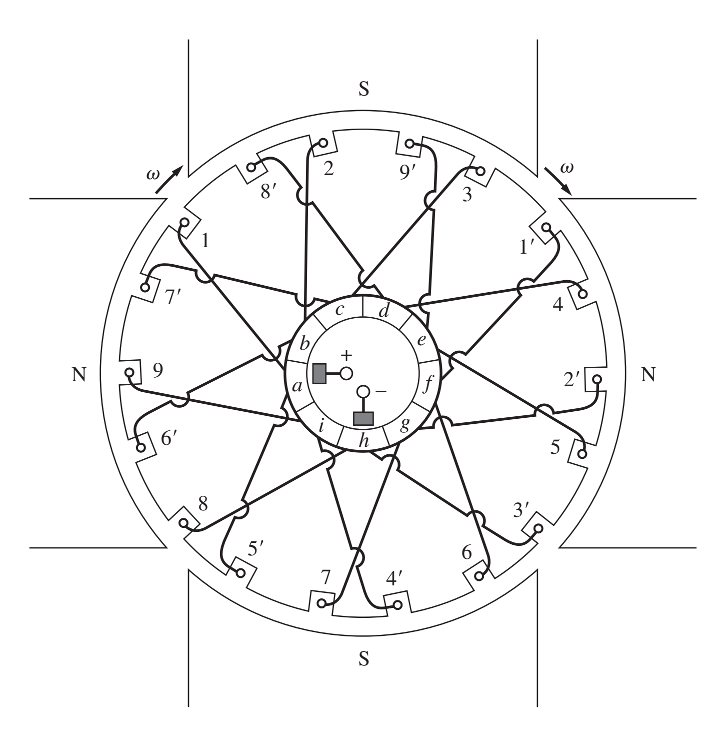


FIGURA 7-20 Máquina de cd sencilla con devanado ondulado y con cuatro polos.

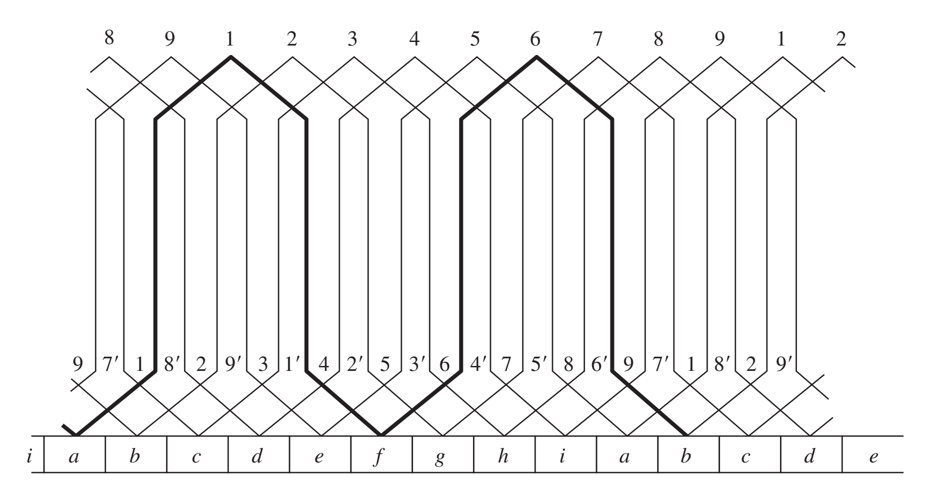


FIGURA 7-21 Diagrama de los devanados del rotor de la máquina de la figura 7-20. Nótese que el extremo final de cada segunda bobina en serie se conecta con el segmento siguiente al del comienzo de la primera bobina. Éste es un devanado ondulado progresivo.

donde P es el número de polos de la máquina y m_{imb} es el número de devanados completos e independientes de devanados imbricados.

EJEMPLO 7-2

Describa el arreglo del devanado del rotor de la máquina de cuatro espiras de la sección 7.2.

Solución

La máquina que se describe en la sección 7.2 tiene cuatro bobinas, cada una de una vuelta, lo que da un resultado de ocho conductores en total. Tiene un devanado imbricado progresivo.

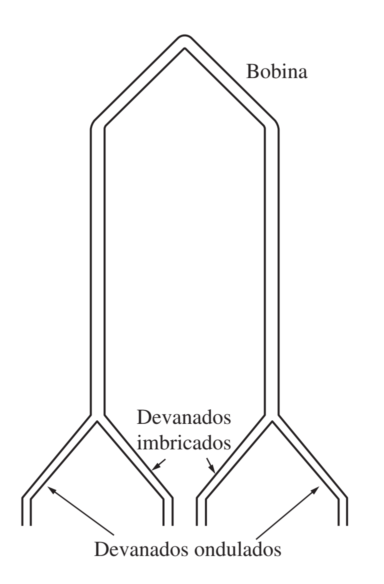


FIGURA 7-22 Bobina con devanado autocompensador o de pata de rana.

7.4 PROBLEMAS DE CONMUTACIÓN EN LAS MÁQUINAS REALES

El proceso de conmutación descrito en las secciones 7.2 y 7.3 no es tan simple en la práctica como en la teoría, lo cual se debe a dos grandes efectos que se presentan en las máquinas reales y que las perturban:

1. Reacción del inducido.
2. Voltajes $L\, di/dt$.

En esta sección se estudian la naturaleza de estos problemas y las soluciones que se utilizan para mitigar sus efectos.

Reacción del inducido

Si se conecta el campo magnético de los devanados de una máquina de cd a una fuente de potencia y el rotor de la máquina gira gracias a una fuente externa de potencia mecánica, entonces se inducirá un voltaje en los conductores del rotor. Este voltaje será rectificado en una salida de cd por medio de la acción del conmutador de la máquina.

Ahora conéctese la carga a los terminales de la máquina y fluirá corriente en los devanados del inducido. Este flujo de corriente producirá un campo magnético propio, que a su vez distorsionará el campo magnético original de los polos de la máquina. Esta distorsión del flujo en una máquina conforme se incrementa la carga que se llama *reacción del inducido*, provoca dos serios problemas en las máquinas de cd reales.

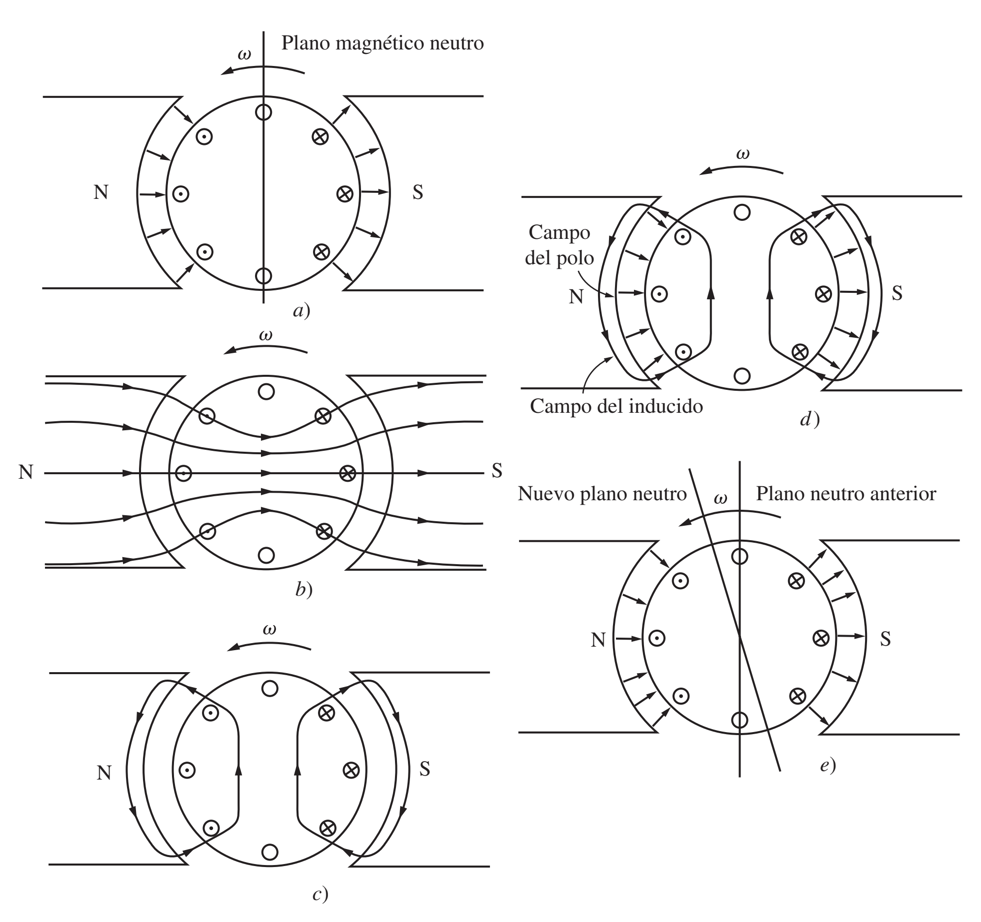


FIGURA 7-23 Desarrollo de la reacción del inducido en un generador de cd. *a*) Inicialmente, el flujo del polo está distribuido de manera uniforme y el plano magnético neutro es vertical; *b*) efecto del entrehierro en la distribución del flujo del polo: *c*) campo magnético del inducido resultante cuando se conecta una carga a la máquina: *d*) se muestran los flujos tanto del rotor como del polo y se indican los puntos en donde se suman y se restan: *e*) flujo resultante bajo los polos. El plano neutro se desplazó en la dirección del movimiento.

El primer problema que provoca la reacción del inducido es *el desplazamiento del plano neutro*. El *plano magnético neutro* se define como el plano dentro de la máquina en el que la velocidad de los alambres del rotor es perfectamente paralela a las líneas del flujo magnético, por lo que e_{ind} en los conductores en el plano es igual a cero.

Para entender el problema del desplazamiento del plano neutro examínese la figura 7-23. La figura 7-23*a*) muestra una máquina de cd de dos polos. Nótese que el flujo está uniformemente distribuido por debajo de las caras polares. Los devanados del rotor que se observan en la figura tienen un voltaje que va hacia afuera de la página en los cables bajo la cara polar norte y hacia dentro de la página en los cables bajo la cara polar sur. En esta máquina, el plano neutro es completamente vertical.

Ahora supóngase que se conecta una carga a la máquina de tal manera que actúa como generador. La corriente fluirá hacia afuera del terminal positivo del generador, por lo que fluirá corriente hacia afuera de la página en los cables debajo de la cara polar norte y hacia la página en los cables bajo la cara polar sur. Este flujo de corriente produce un campo magnético en los devanados del rotor, como se muestra en la figura 7-23*c*). Este campo magnético del rotor afecta el campo magnético original de los polos que produjo el voltaje en el generador en primera instancia. En algunos lugares bajo las superficies de los polos se resta del flujo polar y en otros lugares se suma al flujo polar. El resultado general es que el flujo magnético en el entrehierro de la máquina se distorsiona, como se puede ver en la figura 7-23 *d*) y *e*). Nótese que se desplazó el lugar en el rotor en donde el voltaje inducido en un conductor sería igual a cero (el plano neutro).

En el caso del generador que se muestra en la figura 7-23 el plano magnético neutro se desplazó en la dirección de rotación. Si esta máquina hubiera sido un motor, se invertiría la corriente en su rotor y el flujo se agruparía en las esquinas opuestas de las agrupaciones que se observan en la figura. Como resultado, el plano magnético neutro se desplazaría en sentido contrario.

En general, el plano neutro se desplaza en la dirección del movimiento en un generador y en la dirección contraria al movimiento en un motor. Además, la cantidad de desplazamiento depende de la corriente del rotor y, por lo tanto, de la carga en la máquina.

Entonces, ¿cuál es el problema que genera el desplazamiento del plano neutro? El problema es justamente éste: el conmutador debe provocar un cortocircuito en los segmentos del conmutador justo en el momento en que el voltaje a través de ellos es igual a cero. Si se colocan las escobillas de tal manera que provoquen un cortocircuito en los conductores en el plano vertical, entonces el voltaje entre los segmentos es en realidad cero *hasta que se carga la máquina*. Cuando ésta se carga, el plano neutro se desplaza y las escobillas provocan un cortocircuito en los segmentos del conmutador con un voltaje infinito a través de ellas. El resultado es un flujo de corriente circulante entre los segmentos en cortocircuito y grandes chispas en las escobillas al interrumpirse el camino de corriente cuando la escobilla se separa del segmento. El resultado final es *la formación de un arco y la generación de chispas en las escobillas*. Éste es un problema muy grave puesto que lleva a que la vida útil media de las escobillas se reduzca de manera drástica, a que se deterioren los segmentos del conmutador y a que se incrementen fuertemente los costos de mantenimiento. Nótese que este problema no se puede arreglar ubicando las escobillas sobre el plano neutro a plena carga puesto que sacarían chispas en vacío.

En casos extremos el desplazamiento del plano neutro puede producir un *chisporroteo* en los segmentos del conmutador que están cerca de las escobillas. El aire que se encuentra cerca de las escobillas en la máquina normalmente está ionizado como resultado de las chispas en las escobillas. El *chisporroteo* se presenta cuando el voltaje en los segmentos del conmutador adyacentes es lo suficientemente grande como para provocar un arco en el aire ionizado que está sobre ellos. Si se presenta el *chisporroteo*, el arco resultante puede incluso derretir la superficie del conmutador.

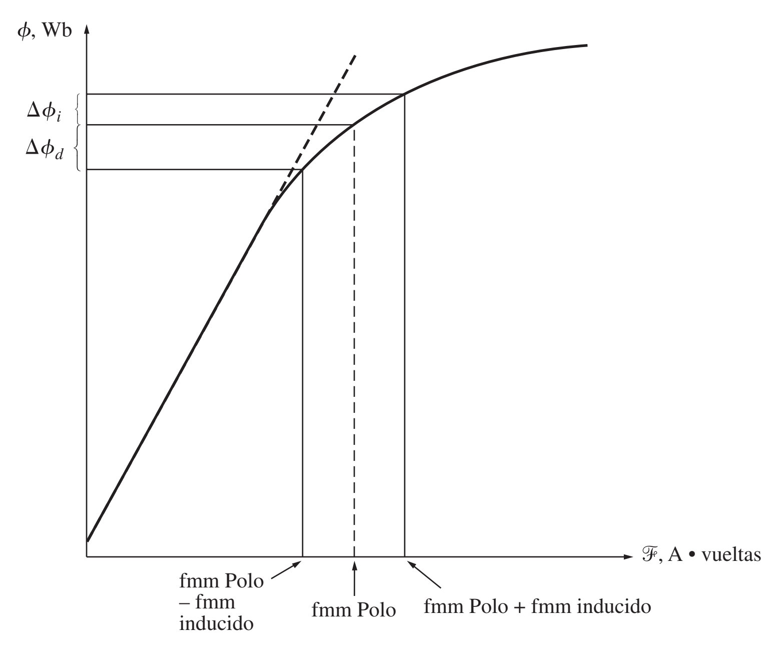


FIGURA 7-24 Curva típica de magnetización que muestra los efectos de la saturación de los polos cuando se suman las fuerzas magnetomotrices de los polos y del inducido.

El segundo gran problema que provoca la reacción del inducido se llama *debilitamiento del flujo* (o *del campo*). Para entender este concepto, remítase a la curva de magnetización que se muestra en la figura 7-24. La mayoría de las máquinas operan con densidades de flujo cercanas al punto de saturación. Por lo tanto, en los sitios de las superficies polares donde la fuerza magnetomotriz del rotor se suma a la fuerza magnetomotriz del polo, sólo se presenta un pequeño incremento del flujo. Pero en los sitios de las superficies polares donde la fuerza magnetomotriz del rotor se resta a la fuerza magnetomotriz del polo, se presenta una mayor disminución en el flujo. El resultado neto es que *se disminuye el flujo total promedio bajo toda la cara polar* (véase la figura 7-25).

El debilitamiento del flujo causa problemas tanto en los generadores como en los motores. En los generadores el debilitamiento del flujo provoca la reducción del voltaje suministrado por el generador a cualquier carga. En los motores produce efectos más graves. En los primeros ejemplos de este capítulo se mostró que cuando disminuye el flujo de un motor se incrementa su velocidad. Pero el incrementar la velocidad de un motor aumenta su carga, lo que provoca un debilitamiento aún mayor del flujo. Algunos motores de cd en derivación pueden llegar a alcanzar una condición de giro desbocado como resultado del debilitamiento del flujo, en la cual la velocidad del motor continúa incrementándose hasta que la máquina se desconecta de la línea de potencia o se destruye a sí misma.

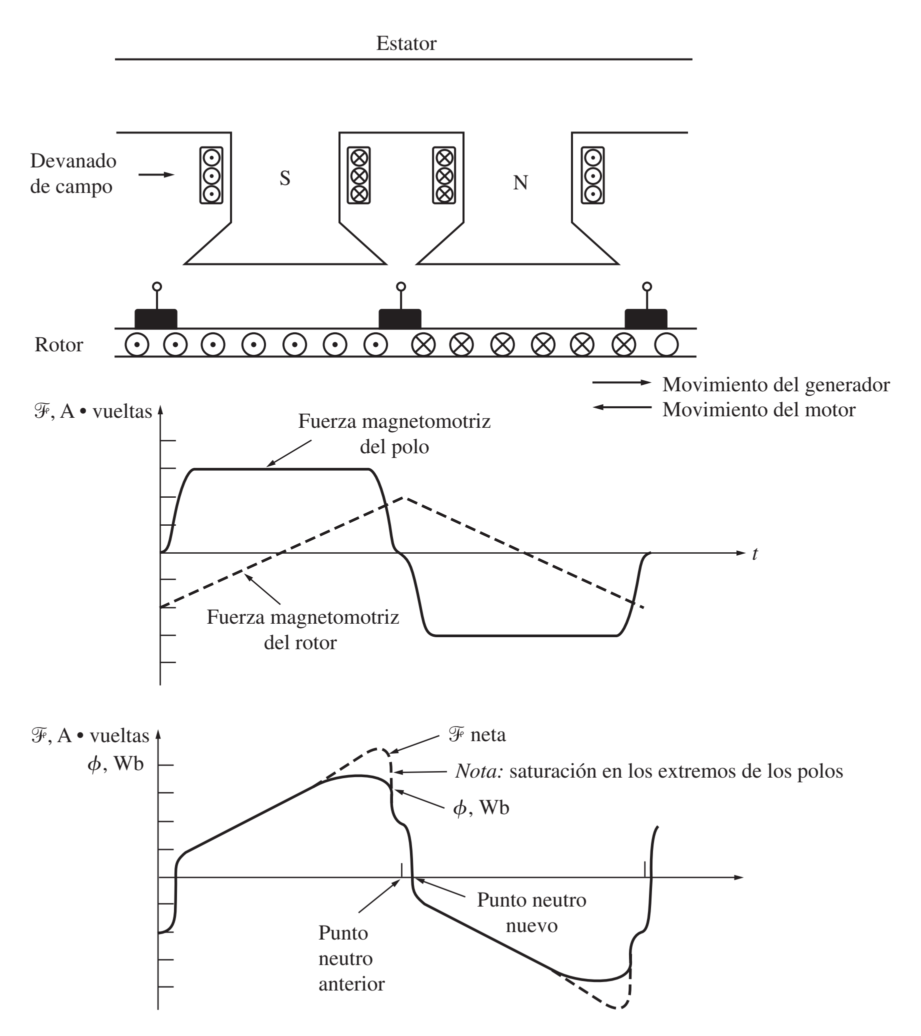


FIGURA 7-25 El flujo y la fuerza magnetomotriz bajo las caras polares en una máquina de cd. En los puntos en los que se restan las fuerzas magnetomotrices el flujo sigue de cerca la fuerza magnetomotriz neta en el hierro; pero en los puntos donde se suman las fuerzas magnetomotrices la saturación limita el flujo total presente. Nótese también que el punto neutro del rotor se desplazó.

Voltajes *L di/dt*

El segundo gran problema, llamado *golpe inductivo*, es el voltaje $L\,di/dt$ que se presenta en los segmentos del conmutador que están en cortocircuito debido a las escobillas. Para entender este problema véase la figura 7-26. Esta figura representa una serie de segmentos de conmutador y los conductores conectados entre ellos. Si se supone que la corriente en las escobillas es de 400 A, la corriente en cada camino es de 200 A. Nótese que cuando un segmento del conmutador entra en cortocircuito, se debe invertir el flujo de corriente a través de él. ¿Qué tan rápida debe ser esta inversión? Suponga que la máquina gira a 800 r/min y que hay 50 segmentos del conmutador (un número razonable en el caso de un motor regular), cada segmento del conmutador se mueve bajo una escobilla y la libera de nuevo en $t = 0.0015$ s. Por lo tanto, la tasa de cambio en la corriente con respecto al tiempo en la espira en cortocircuito debe ser *en promedio*

$$\frac{di}{dt} = \frac{400\text{ A}}{0.0015\text{ s}} = 266\,667\text{ A/s} \tag{7-30}$$

Incluso con una inductancia mínima en la espira, se inducirá un golpe de voltaje $v = L\,di/dt$ significativo en el segmento del conmutador en cortocircuito. Este alto voltaje naturalmente que provoca

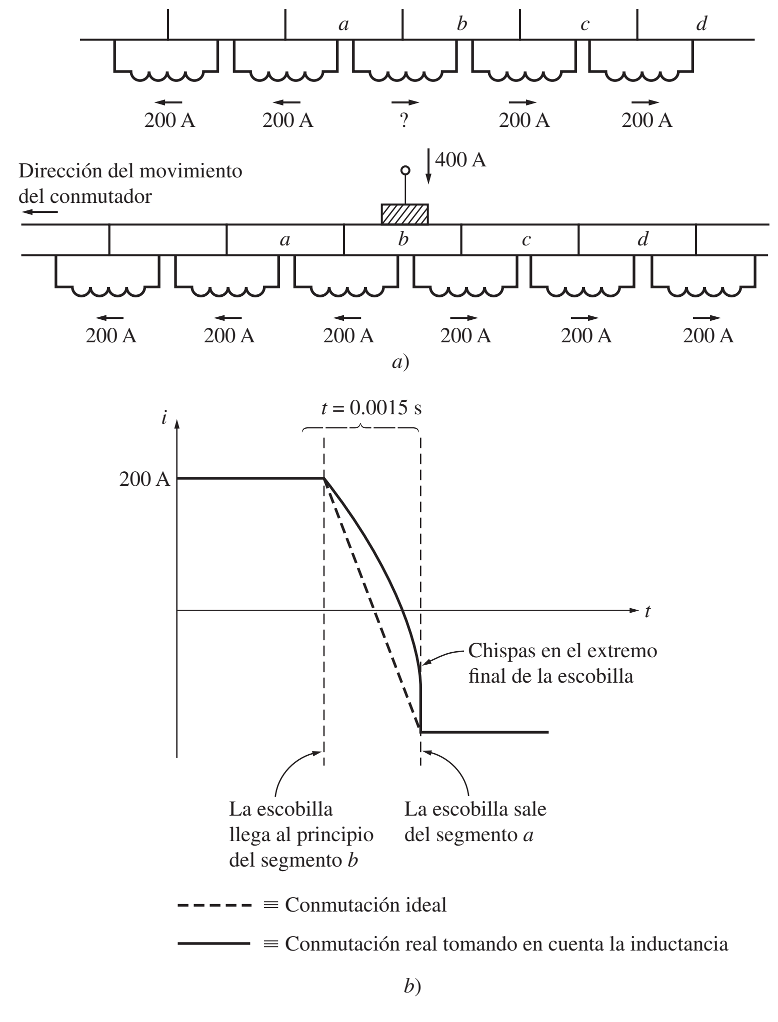


FIGURA 7-26 *a*) Inversión del flujo de corriente en una bobina en proceso de conmutación. Nótese que la corriente en la bobina entre los segmentos *a* y *b* debe invertir su dirección cuando las escobillas hacen cortocircuito entre los dos segmentos del conmutador. *b*) La inversión de corriente en la bobina en proceso de conmutación en función del tiempo, tanto en el caso de la conmutación real como en el de la conmutación ideal, tomando en cuenta la inductancia de la bobina.

chispas en las escobillas de la máquina, lo que da como resultado los mismos problemas de arco que causa el desplazamiento del plano neutro.

Soluciones a los problemas de conmutación

Se han desarrollado tres técnicas para corregir parcial o totalmente el problema de la reacción del inducido y de los voltajes $L\,di/dt$:

1. Desplazamiento de las escobillas.
2. Polos o interpolos de conmutación.
3. Devanados de compensación.

A continuación se explica cada una de estas técnicas, junto con sus ventajas y desventajas.

DESPLAZAMIENTO DE LAS ESCOBILLAS Históricamente, los primeros intentos para mejorar el proceso de conmutación en las máquinas de cd reales comenzó mediante el intento de eliminar la producción de chispas en las escobillas generadas por los efectos del desplazamiento del plano neutro y por $L\,di/dt$. La primera técnica que ingeniaron los diseñadores de máquinas fue muy simple: si se desplaza el plano neutro de una máquina, ¿por qué no desplazar también las escobillas para que no se produzcan chispas? Parecía una buena idea, pero hay varios problemas asociados con ella. Para comenzar, el plano neutro se mueve con cada cambio en la carga y la dirección del desplazamiento se invierte cuando la máquina cambia de motor a generador. Por lo tanto, alguien tenía que ajustar las escobillas cada vez que cambiaba la carga en la máquina. Adicionalmente, el desplazamiento de las escobillas puede controlar la generación de chispas, pero *agrava* el efecto de debilitamiento del flujo de la reacción del inducido en la máquina. Esto se demuestra por dos efectos:

1. La fuerza magnetomotriz del rotor ahora tiene un componente vectorial que se opone a la fuerza magnetomotriz de los polos (véase la figura 7-27).
2. El cambio en la distribución de la corriente del inducido provoca que el flujo se acumule más en las partes saturadas de las caras polares.

Otra técnica que se utilizaba, que difiere ligeramente de la anterior, era fijar las escobillas en una posición determinada (por decir, una que no provocara chispas a dos tercios de la condición de plena carga). En este caso el motor sacaba chispas en vacío y también un poco a plena carga, pero si pasaba la mayoría de su vida útil operando a alrededor de dos tercios de plena carga, se minimizaba la generación de chispas. Claro que este tipo de máquina no se podía utilizar como generador puesto que producía demasiadas chispas.

En 1910 la técnica de desplazar las escobillas para controlar la generación de chispas ya era obsoleta. Hoy día el desplazamiento de escobillas sólo se utiliza en máquinas muy pequeñas que sólo operan como motor. Esto se debe a que las soluciones que dan mejores resultados son muy costosas en el caso de los motores pequeños.

POLOS DE CONMUTACIÓN O INTERPOLOS Debido a las desventajas de la técnica anterior, y en especial por la necesidad de que una persona ajustara la posición de las escobillas de las máquinas conforme cambiaran las cargas, se desarrolló otra solución para el problema de la generación de chispas en las escobillas. La idea básica de esta técnica es que el voltaje en los alambres en proceso de conmutación puede ser cero, y entonces no habría chispas en las escobillas. Para lograr este objetivo, se colocan polos pequeños, llamados *polos de conmutación* o *interpolos*, en el punto medio entre los polos principales. Dichos polos de conmutación se ubican *directamente sobre* los conductores en conmutación. Si se suministra un flujo desde los polos de conmutación, se puede cancelar por completo el voltaje en las bobinas en proceso de conmutación. Si la cancelación es exacta, entonces no se generan chispas en las escobillas.

Los polos de conmutación no cambian en ningún otro sentido la operación de la máquina, debido a que son tan pequeños que sólo afectan los pocos conductores a punto de entrar en el proceso de conmutación. Nótese que no se ve afectada la *reacción del inducido* bajo las caras polares principales, puesto que los efectos de los polos de conmutación no llegan tan lejos. Esto quiere decir que los polos de conmutación no afectan el debilitamiento del flujo en la máquina.

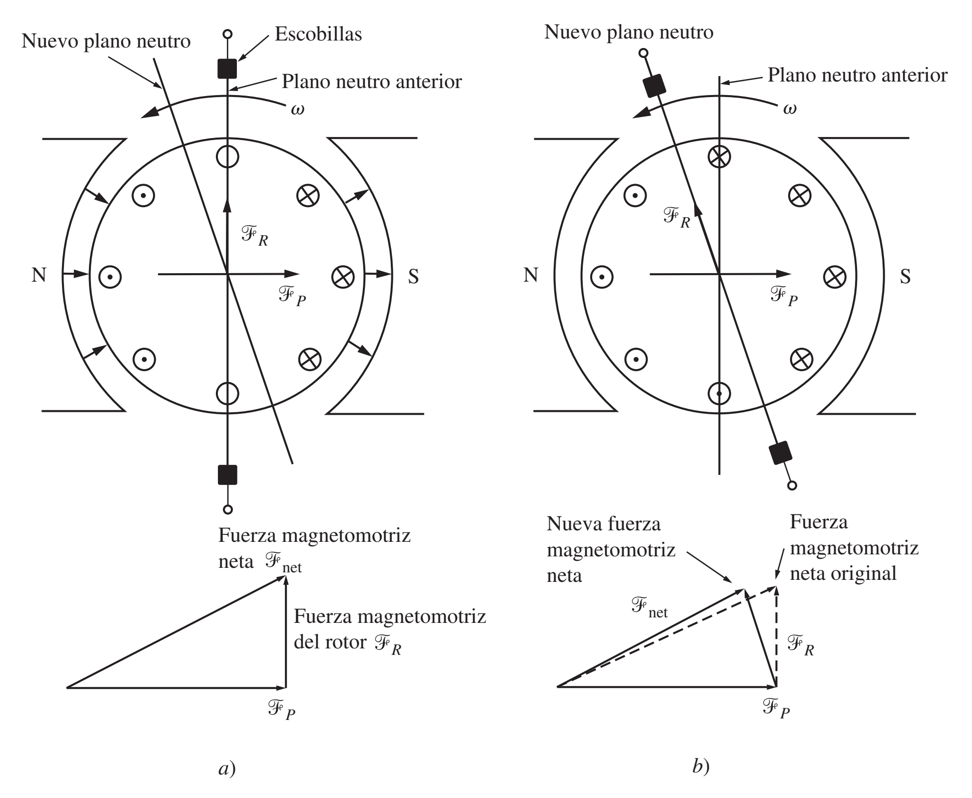


FIGURA 7-27 *a*) Fuerza magnetomotriz neta de una máquina de cd con escobillas en el plano vertical. *b*) Fuerza magnetomotriz neta de una máquina de cd con escobillas sobre el plano neutro ya desplazado. Nótese que ahora hay un componente de la fuerza magnetomotriz del inducido *directamente en sentido opuesto* a la fuerza magnetomotriz de los polos y que se reduce la fuerza magnetomotriz neta en la máquina.

¿Cómo se logra la cancelación del voltaje en los segmentos del conmutador de todas las cargas posibles? Simplemente conectando los devanados interpolares en *serie* con los devanados del rotor, como se muestra en la figura 7-28. Conforme se incrementa la carga y se incrementa la corriente en el rotor, los efectos de la magnitud del desplazamiento del plano neutro y del tamaño de $L\,di/dt$ también se incrementan. Estos dos efectos aumentan el voltaje en los conductores en proceso de con-

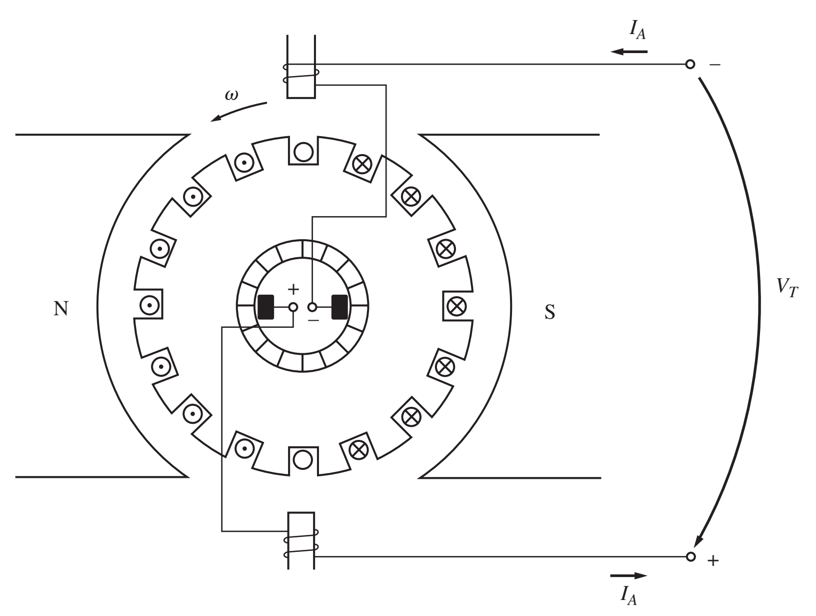


FIGURA 7-28 Máquina de cd con interpolos.

mutación. Sin embargo, el flujo interpolar también se incrementa y provoca un voltaje más grande en los conductores que se opone al voltaje debido al desplazamiento del plano neutro. El resultado neto es que sus efectos se cancelan entre sí en el caso de un amplio intervalo de cargas. Nótese que los interpolos trabajan tanto en la operación como motor como en la operación como generador, puesto que cuando la máquina cambia de motor a generador, se invierte la dirección de la corriente tanto en el rotor como en los interpolos. Por lo tanto, los efectos de voltaje también se cancelan.

¿Qué polaridad debe tener el flujo en los interpolos? Los interpolos deben inducir un voltaje en los conductores en proceso de conmutación *que es opuesto* al voltaje provocado por los efectos del desplazamiento del plano neutro y de $L\, di/dt$. En el caso de un generador, el plano neutro se desplaza en la dirección de rotación, lo que quiere decir que los conductores en proceso de conmutación tienen la misma polaridad de voltaje que el polo que acaban de dejar atrás (véase la figura 7-29). Para oponerse a este voltaje, los interpolos deben tener un flujo en sentido opuesto, que corresponde al flujo del polo que se aproxima. Para oponerse a este voltaje, los interpolos deben tener la misma polaridad que el polo principal anterior. Por lo tanto,

1. Los interpolos deben tener la misma polaridad que el siguiente polo principal del generador.
2. Los interpolos deben tener la misma polaridad que el polo principal anterior del motor.

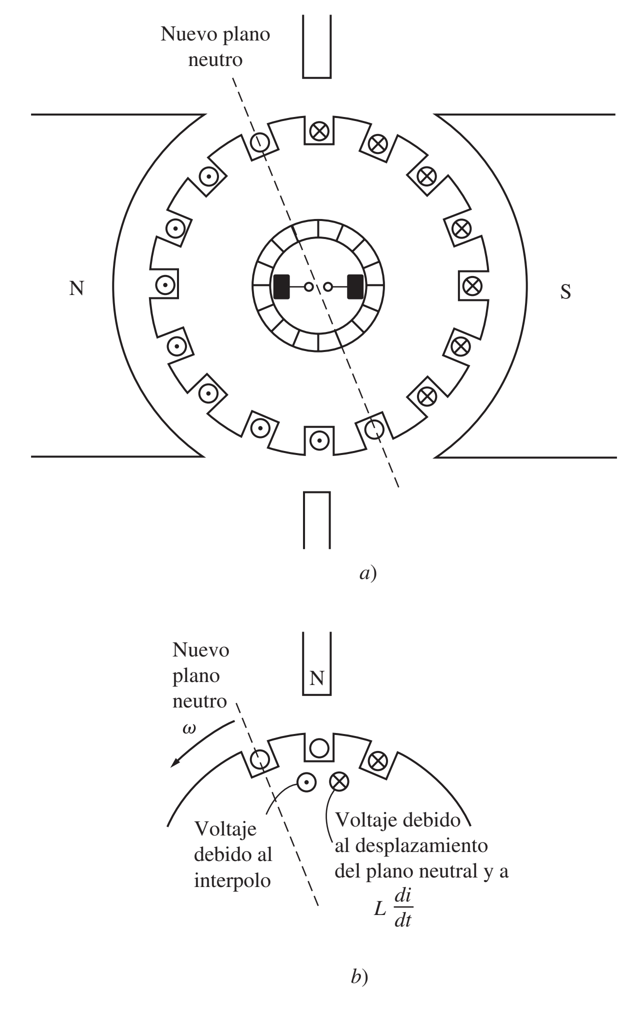


FIGURA 7-29 Determinación de la polaridad que se requiere de un interpolo. El flujo del interpolo debe producir un voltaje que se oponga al voltaje existente en el conductor.

La utilización de polos o interpolos de conmutación es muy común, debido a que corrigen los problemas de generación de chispas de las máquinas de cd a un costo relativamente bajo. Casi siempre se encuentran en cualquier máquina de cd de 1 hp o mayor. Sin embargo, es importante recalcar que no ayudan *en nada* a la distribución del flujo bajo las caras polares, por lo que el problema de debilitamiento de flujo aún persiste. La mayoría de los motores medianos de uso corriente corrigen el problema de generación de chispas mediante interpolos y soportan los efectos de debilitamiento del flujo.

DEVANADOS DE COMPENSACIÓN Para los motores de ciclos de trabajo pesado e intenso, el problema de debilitamiento de flujo es muy serio. Para cancelar por completo la reacción del inducido y por lo tanto eliminar el deslizamiento del plano neutro y el debilitamiento del flujo, se desarrolló una técnica diferente. Esta tercera técnica involucra la ubicación de *devanados de compensación* en ranuras labradas en las caras de los polos paralelas a los conductores del rotor para cancelar el efecto de distorsión de la reacción del inducido. Estos devanados están conectados en serie con los devanados del rotor, por lo que cuando la carga en el rotor cambia, también cambia la corriente en los devanados de compensación. La figura 7-30 muestra este concepto básico. En la figura 7-30*a*) se ilustra por sí solo el flujo polar. En la figura 7-30*b*) se observa el flujo del rotor y el flujo en el devanado de compensación. En la figura 7-30*c*) se puede ver la suma de estos tres flujos, que es igual al flujo polar original en sí mismo.

La figura 7-31 muestra un desarrollo más cuidadoso del efecto de los devanados de compensación en una máquina de cd. Nótese que la fuerza magnetomotriz debida a los devanados de compensación es igual y opuesta a la fuerza magnetomotriz debida al rotor en cada punto ubicado por debajo de las caras polares. La fuerza magnetomotriz neta resultante es igual a la fuerza magnetomotriz debida a los polos, por lo que el flujo en la máquina permanece igual sin importar la carga en la máquina. En la figura 7-32 se ilustra el estator de una máquina de cd grande con devanados de compensación.

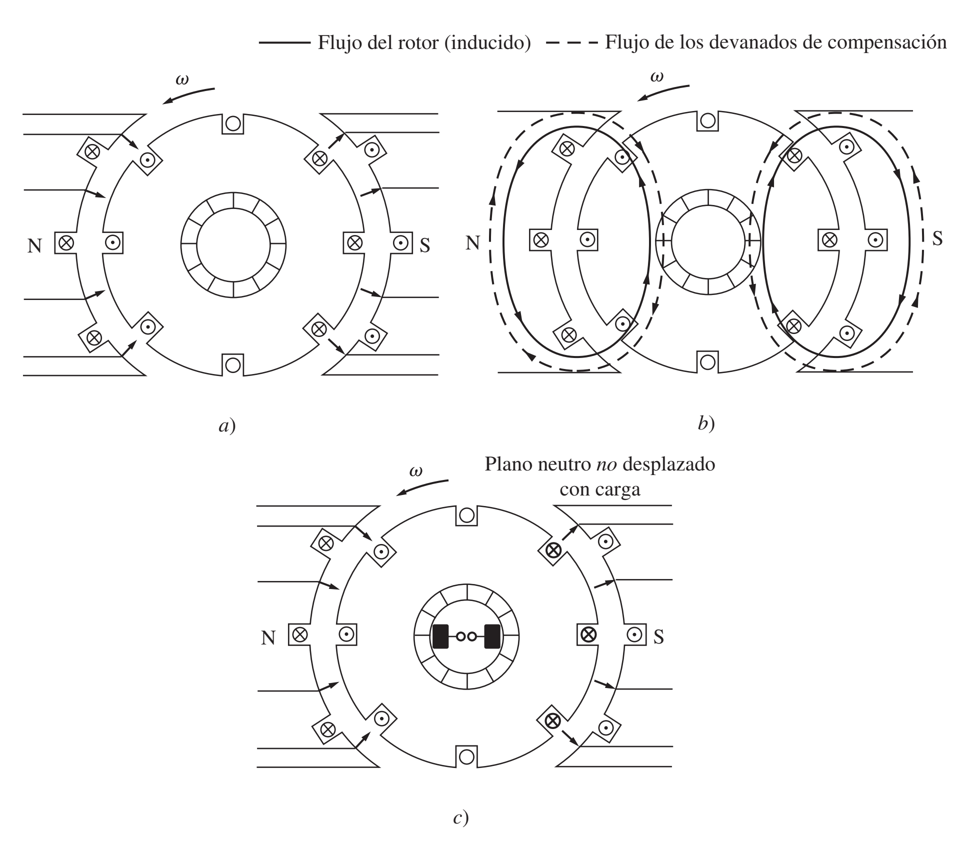


FIGURA 7-30 Efecto de los devanados de compensación en una máquina de cd. *a*) El flujo del polo en la máquina; *b*) los flujos del inducido y de los devanados de compensación. Nótese que son iguales y tienen sentido opuesto; *c*) el flujo neto en la máquina, que es igual al flujo original en el polo.

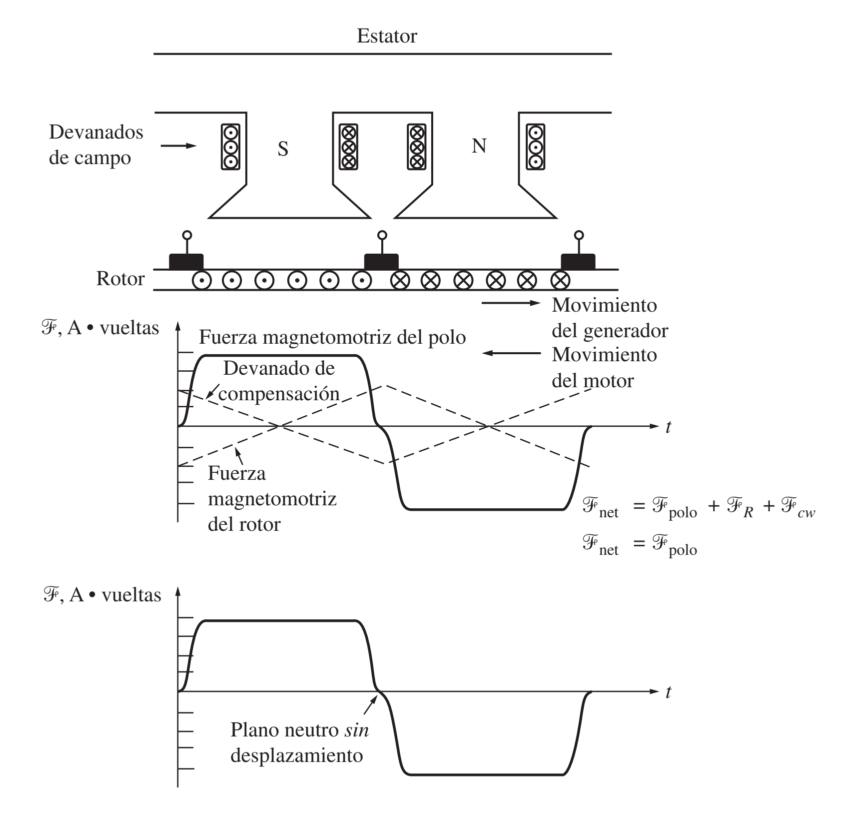


FIGURA 7-31 Flujo y fuerzas magnetomotrices en una máquina de cd con devanados de compensación.

La mayor desventaja de los devanados de compensación es su precio, puesto que deben maquinarse en las caras de los polos. Cualquier motor que los utilice también debe tener interpolos, puesto que los devanados de compensación no cancelan los efectos de $L\, di/dt$. Sin embargo, los interpolos no tienen que ser tan robustos, puesto que sólo cancelan los voltajes $L\, di/dt$ en los devanados y no los voltajes debidos al desplazamiento del plano neutro. Debido al costo que ocasiona tener tanto devanados de compensación como interpolos en una sola máquina, los devanados sólo se utilizan en el caso en que la naturaleza extremadamente severa de operación del motor los requiera.

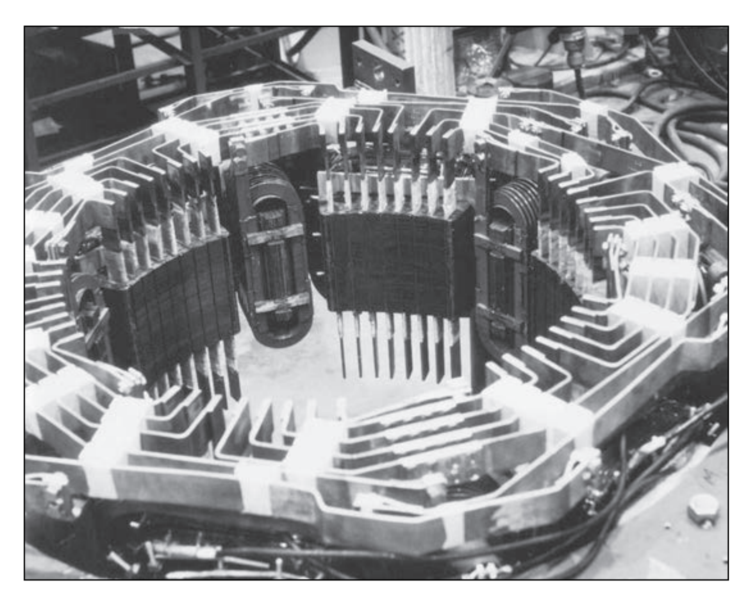


FIGURA 7-32 Estator de una máquina de cd con seis polos con interpolos y devanados de compensación. (*Cortesía de Westinghouse Electric Company*.)

7.5 ECUACIONES DE VOLTAJE INTERNO GENERADO Y PAR INDUCIDO EN LAS MÁQUINAS DE CD REALES

¿Cuánto voltaje se produce en una máquina de cd real? El voltaje inducido en cualquier máquina dada depende de tres factores:

1. El flujo ϕ en la máquina.
2. La velocidad ω_m del rotor de la máquina.
3. Una constante que depende de la construcción de la máquina.

¿Cómo se puede determinar el voltaje en los devanados del rotor de una máquina real? El voltaje que sale del inducido de una máquina real es igual al número de conductores por camino de corriente multiplicado por el voltaje en cada conductor. Ya se demostró que el voltaje en *cualquier conductor ubicado bajo las caras polares* es

$$e_{\text{ind}} = e = vBl \tag{7-31}$$

Entonces, el voltaje que sale del inducido de una máquina real es

$$E_A = \frac{ZvBl}{a} \tag{7-32}$$

donde Z es el número total de conductores y a es el número de caminos de corriente. La velocidad de cada conductor en el rotor se puede expresar como $v = r\omega_m$, donde r es el radio del rotor, por lo que

$$E_A = \frac{Zr\omega_m Bl}{a} \tag{7-33}$$

Este voltaje también se puede expresar de manera más conveniente si se nota que el flujo de un polo es igual a la densidad de flujo bajo el polo multiplicado por el área del polo:

$$\phi = BA_P$$

El rotor de la máquina tiene forma cilíndrica, por lo que su área es igual a

$$A = 2\pi rl \tag{7-34}$$

Si hay P polos en una máquina, entonces la porción del área asociada con cada polo es el área total A dividida entre el número de polos P:

$$A_P = \frac{A}{P} = \frac{2\pi rl}{P} \tag{7-35}$$

Entonces, el *flujo por polo* total en la máquina es

$$\phi = BA_P = \frac{B(2\pi rl)}{P} = \frac{2\pi rlB}{P} \tag{7-36}$$

Por lo tanto, el voltaje interno generado en la máquina se puede expresar como

$$E_A = \frac{Zr\omega_m Bl}{a} \tag{7-33}$$

$$= \left(\frac{ZP}{2\pi a}\right)\left(\frac{2\pi rlB}{P}\right)\omega_m$$

$$E_A = \frac{ZP}{2\pi a}\phi\omega_m \tag{7-37}$$

Finalmente,

$$E_A = K\phi\omega_m \tag{7-38}$$

donde

$$K = \frac{ZP}{2\pi a} \tag{7-39}$$

En la práctica industrial moderna se acostumbra expresar la velocidad de una máquina en revoluciones por minuto en lugar de en radianes por segundo. La fórmula de la conversión de revoluciones por minuto a radianes por segundo es

$$\omega_m = \frac{2\pi}{60} n_m \tag{7-40}$$

por lo que la ecuación del voltaje con la velocidad expresada en términos de revoluciones por minuto es

$$E_A = K'\phi n_m \tag{7-41}$$

donde

$$K' = \frac{ZP}{60a} \tag{7-42}$$

¿Cuánto par se induce en el inducido de una máquina de cd real? El par en cualquier máquina de cd depende de tres factores:

1. El flujo ϕ en la máquina.
2. La corriente en el inducido (o rotor) I_A en la máquina.
3. Una constante que depende de la construcción de la máquina.

¿Cómo se puede determinar el par en el rotor de una máquina real? El par en el inducido de una máquina real es igual al número de conductores Z multiplicado por el par en cada conductor. Ya se demostró que el par en *cualquier conductor ubicado por debajo de las caras polares* es

$$\tau_{\text{cond}} = rI_{\text{cond}}lB \tag{7-43}$$

Si hay a caminos de corriente en la máquina, entonces la corriente en el inducido total I_A se divide entre los a caminos de corriente, por lo que la corriente en un solo conductor está dada por

$$I_{\text{cond}} = \frac{I_A}{a} \tag{7-44}$$

y el par de un solo conductor en el motor se puede expresar como

$$\tau_{cond} = \frac{rI_A lB}{a} \quad \textbf{(7-45)}$$

Puesto que hay Z conductores, el par inducido total en el rotor de una máquina de cd es

$$\tau_{ind} = \frac{ZrlBI_A}{a} \quad \textbf{(7-46)}$$

El flujo por polo en la máquina se puede expresar como

$$\phi = BA_P = \frac{B(2\pi rl)}{P} = \frac{2\pi rlB}{P} \quad \textbf{(7-47)}$$

por lo que el par inducido se puede expresar como

$$\tau_{ind} = \frac{ZP}{2\pi a}\phi I_A \quad \textbf{(7-48)}$$

Finalmente,

$$\tau_{ind} = K\phi I_A \quad \textbf{(7-49)}$$

donde

$$K = \frac{ZP}{2\pi a} \quad \textbf{(7-39)}$$

Tanto la ecuación del voltaje interno generado como la del par inducido son sólo aproximaciones, puesto que no todos los conductores en la máquina están ubicados bajo las caras polares en cierto momento y también porque las superficies de cada polo no cubren por completo $1/P$ de la superficie del rotor. Para lograr una mayor exactitud, se puede utilizar el número de conductores ubicados bajo las caras polares en lugar del número total de conductores en el rotor.

EJEMPLO 7-3

Se utiliza un inducido con devanado imbricado doble en una máquina de cd con seis polos con seis conjuntos de escobillas, cada uno de los cuales abarca dos segmentos de conmutador. Hay 72 bobinas en el inducido, cada una con 12 vueltas. El flujo por polo en la máquina es de 0.039 Wb y la máquina gira a 400 r/min.

a) ¿Cuántos caminos de corriente hay en la máquina?
b) ¿Cuál es el voltaje inducido E_A?

Solución

a) El número de caminos de corriente en la máquina es de

$$a = mP = 2(6) = 12 \text{ caminos de corriente} \quad \textbf{(7-26)}$$

b) El voltaje inducido en la máquina es

$$E_A = K'\phi n_m \quad \textbf{(7-41)}$$

y

$$K' = \frac{ZP}{60a} \quad \textbf{(7-42)}$$

El número de conductores en la máquina es

$$Z = 2CN_C \quad \textbf{(7-22)}$$

$$= 2(72)(12) = 1\,728 \text{ conductores}$$

Por lo tanto, la constante K' es

$$K' = \frac{ZP}{60a} = \frac{(1\ 728)(6)}{(60)(12)} = 14.4$$

y el voltaje E_A es

$$\begin{aligned} E_A &= K'\phi n_m \\ &= (14.4)(0.039\ \text{Wb})(400\ \text{r/min}) \\ &= 224.6\ \text{V} \end{aligned}$$

EJEMPLO 7-4

Un generador de cd con 12 polos tiene un inducido con devanado ondulado sencillo con 144 bobinas de 10 vueltas cada una. La resistencia de cada vuelta es de 0.011 Ω. El flujo por polo es de 0.05 Wb y gira a una velocidad de 200 r/min.

a) ¿Cuántos caminos de corriente hay en la máquina?
b) ¿Cuál es el voltaje inducido en el inducido de la máquina?
c) ¿Cuál es la resistencia efectiva del inducido de la máquina?
d) Si se conecta un resistor de 1 kΩ a los terminales del generador, ¿cuál es el par opuesto inducido en el eje de la máquina? (Desprecie la resistencia interna del inducido de la máquina.)

Solución

a) Hay $a = 2m = 2$ caminos de corriente en el devanado.
b) Hay $Z = 2CN_c = 2(144)(10) = 2\ 880$ conductores en el rotor del generador. Por lo que

$$K' = \frac{ZP}{60a} = \frac{(2\ 880)(12)}{(60)(2)} = 288$$

Por lo tanto, el voltaje inducido es

$$\begin{aligned} E_A &= K'\phi n_m \\ &= (288)(0.05\ \text{Wb})(200\ \text{r/min}) \\ &= 2\ 880\ \text{V} \end{aligned}$$

c) Hay dos caminos paralelos a través del rotor de la máquina, cada uno consta de $Z/2 = 1\ 440$ conductores o 720 vueltas. Por lo tanto, la resistencia en cada camino de corriente es

$$\text{Resistencia/camino} = (720\ \text{vueltas})(0.011\ \Omega/\text{vuelta}) = 7.92\ \Omega$$

Puesto que hay dos caminos paralelos, la resistencia efectiva en el inducido es de

$$R_A = \frac{7.92\ \Omega}{2} = 3.96\ \Omega$$

d) Si se conecta una carga de 1 000 Ω a los terminales del generador y si se desprecia R_A, entonces fluye una corriente de $I = 2\ 880\ \text{V}/1\ 000\ \Omega = 2.88\ \text{A}$. La constante K está dada por

$$K = \frac{ZP}{2\pi a} = \frac{(2\ 880)(12)}{(2\pi)(2)} = 2\ 750.2$$

Por lo tanto, el par opuesto en el eje del generador es

$$\begin{aligned} \tau_{\text{ind}} &= K\phi I_A = (2\ 750.2)(0.05\ \text{Wb})(2.88\ \text{A}) \\ &= 396\ \text{N} \bullet \text{m} \end{aligned}$$

7.6 CONSTRUCCIÓN DE LAS MÁQUINAS DE CD

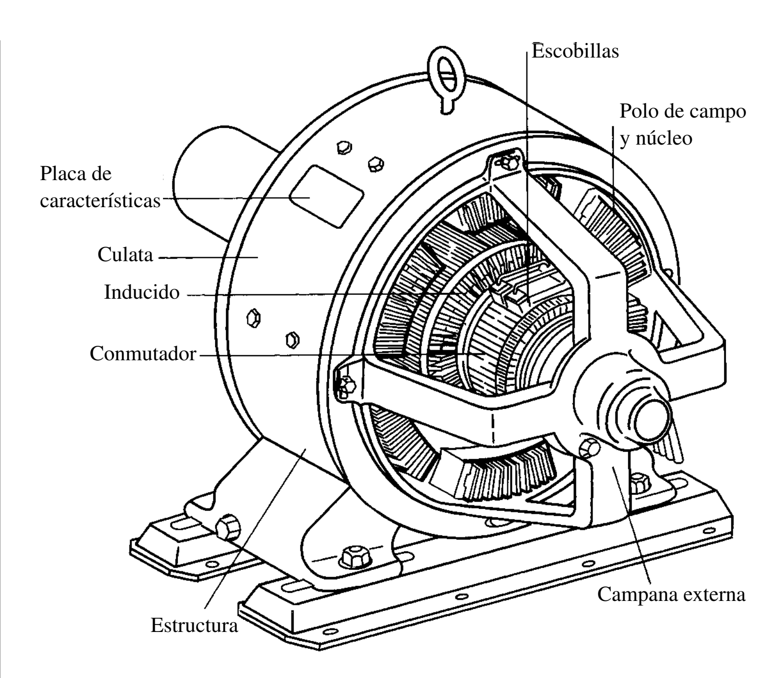


FIGURA 7-33 Diagrama simplificado de una máquina de cd.

En la figura 7-33 se ve un dibujo simplificado de una máquina de cd y en la figura 7-34 se muestra un corte transversal más detallado de ella.

La estructura física de la máquina consta de dos partes: el *estator* o parte estacionaria y el *rotor* o parte giratoria. La parte estacionaria de la máquina consta de una *estructura*, que proporciona el soporte físico, y de las *piezas polares*, que se proyectan hacia adentro y proporcionan un camino para el flujo magnético de la máquina. Los extremos de las piezas polares que están cerca del rotor se extienden sobre la superficie de éste para distribuir su flujo uniformemente sobre la superficie del rotor. Estos extremos se llaman *zapatas polares*. La superficie expuesta de una zapata polar se llama *cara polar* y la distancia entre la cara polar y el rotor se llama *entrehierro*.

Hay dos devanados principales en una máquina de cd: los devanados del inducido y los devanados de campo. Los *devanados del inducido* se definen como aquellos en los que se induce el voltaje mientras que los *devanados de campo* se definen como aquellos que producen el flujo magnético principal en la máquina. En una máquina de cd normal, los devanados del inducido están ubicados en el rotor y los devanados de campo están ubicados en el estator. Puesto que los devanados del inducido están ubicados en el rotor, el rotor de una máquina de cd a menudo se llama *inducido*.

A continuación se describen algunas de las principales características de la construcción típica de un motor de cd.

Construcción de los polos y de la estructura

Con frecuencia, las máquinas de cd más antiguas a menudo estaban hechas de una sola pieza de metal fundido y los devanados de campo estaban acomodados a su alrededor. A menudo los extremos laminados estaban atornillados para reducir las pérdidas del núcleo en las caras polares. Desde

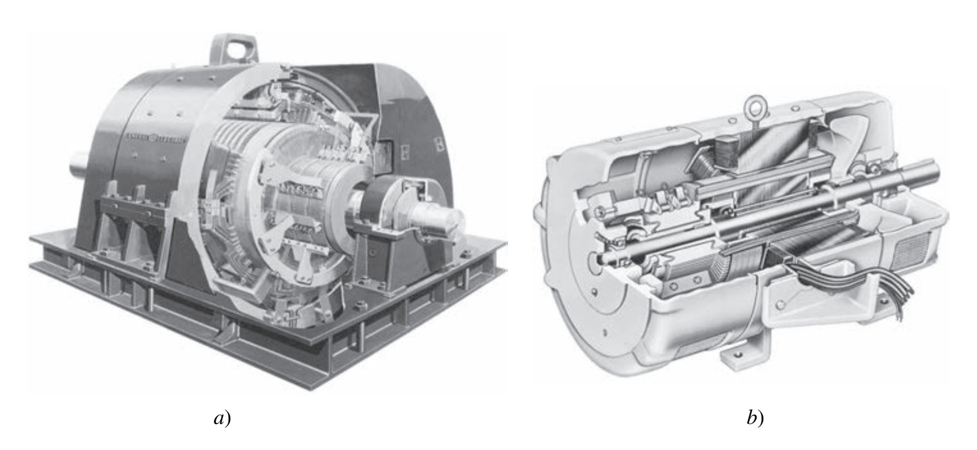


FIGURA 7-34 *a*) Corte transversal de una máquina de cd de 4 000 hp, 700 V y con 18 polos que muestra los devanados de compensación, los interpolos, el compensador y el conmutador. (*Cortesía de General Electric Company.*) *b*) Corte transversal de un motor de cd de cuatro polos más pequeño con interpolos, pero sin devanados de compensación. (*Cortesía de MagneTek, Inc.*)

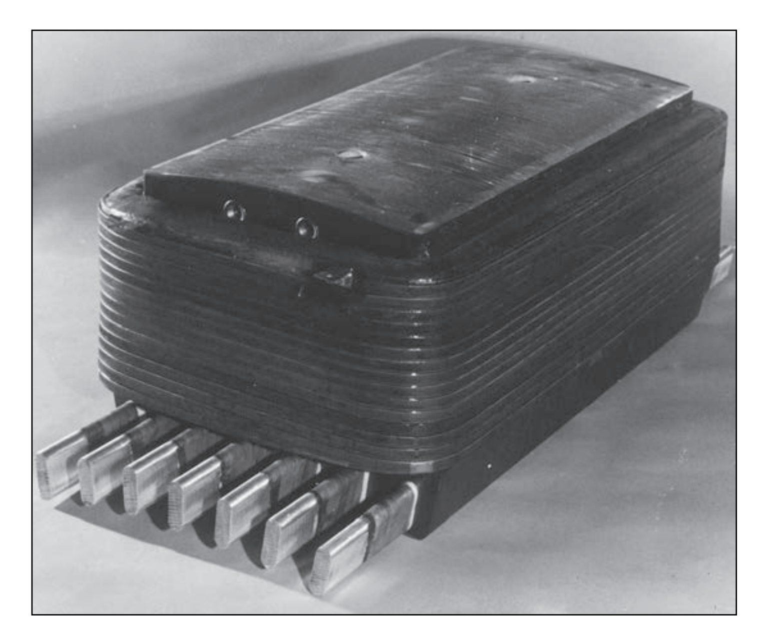


FIGURA 7-35 Conjunto del polo de campo principal de un motor de cd. Nótense las láminas del polo y los devanados de compensación. (*Cortesía de General Electric Company.*)

que se volvieron comunes los paquetes de controladores en estado sólido, los polos principales de las máquinas más nuevas están hechos en su totalidad de material laminado (véase la figura 7-35). Esto se debe a que hay un contenido de ca mucho más grande en la potencia suministrada a los motores de cd controlados por paquetes de controladores en estado sólido, lo que provoca pérdidas por corrientes parásitas mucho más grandes en los estatores de las máquinas. Normalmente la construcción de las caras de los polos es *achaflanada* o *excéntrica*, lo que quiere decir que los extremos externos de las caras polares están un poco más lejos de la superficie del rotor que el centro de la cara polar (véase la figura 7-36). Esto incrementa la reluctancia en los extremos de la cara polar y, por lo tanto, reduce el efecto de agrupamiento de flujo ocasionado por la reacción del inducido en la máquina.

Los polos en las máquinas de cd se llaman *polos salientes*, puesto que se proyectan hacia fuera de la superficie del estator.

Los interpolos en las máquinas de cd están ubicados entre los polos principales. Cada vez es más común que estén hechos de laminado, debido a los mismos problemas que se presentan en los polos principales.

Incluso algunos fabricantes elaboran con láminas una porción de la estructura que sirve como el camino de regreso del flujo magnético (la *culata*) para reducir aún más las pérdidas en el núcleo en los motores controlados electrónicamente.

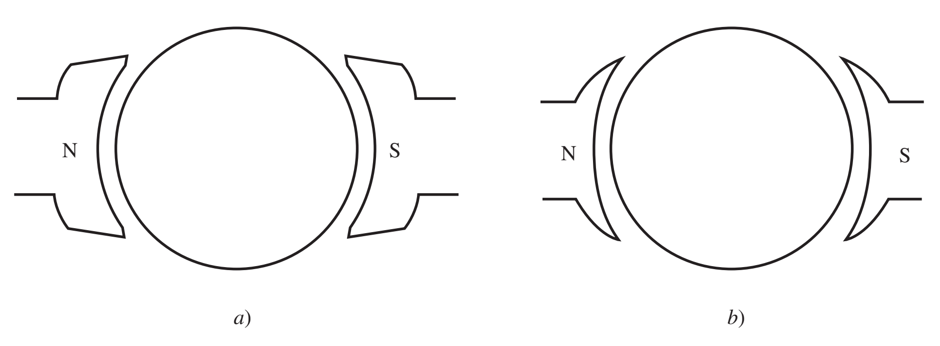


FIGURA 7-36 Polos con un entrehierro más ancho en los extremos para reducir la reacción del inducido. *a*) Polos achaflanados; *b*) polos excéntricos o uniformemente nivelados.

Construcción del rotor o inducido

El rotor o inducido de una máquina de cd consta de un eje maquinado a partir de una barra de acero y al que se le construye un núcleo montado sobre él. El núcleo está compuesto por muchas láminas troqueladas de una placa de acero, con muescas o ranuras en su superficie exterior para sostener los devanados del inducido. El conmutador se construye sobre el eje del rotor en un extremo del núcleo. Las bobinas del inducido se disponen en las ranuras en el núcleo, como se describe en la sección 7.4 y sus extremos se conectan a los segmentos del conmutador. En la figura 7-37 se muestra un gran rotor de una máquina de cd.

El conmutador y las escobillas

Por lo regular, el conmutador de una máquina de cd (figura 7-38) está hecho de barras de cobre aisladas con un material parecido a la mica. Las barras de cobre son lo suficientemente gruesas como para resistir el desgaste normal que sufrirán durante la vida útil del motor. El aislamiento de mica entre los segmentos del conmutador es más duro que el material del conmutador mismo, por lo que conforme pasa el tiempo, a menudo es necesario *rebajar* el aislamiento del conmutador para asegurar que no sobresalga por encima del nivel de las barras de cobre.

Las escobil1as de la máquina están hechas de carbón, grafito, metal grafitado o una mezcla de carbón y grafito. Tienen una conductividad alta para reducir las pérdidas eléctricas y un bajo coeficiente de fricción para reducir el desgaste excesivo. Se fabrican deliberadamente de un material mucho más blando que el de los segmentos del conmutador para que la superficie del conmutador sufra muy poco desgaste. En la selección de la dureza de las escobillas hay que tomar en cuenta que si las escobillas son demasiado blandas, tendrán que ser reemplazadas con demasiada frecuencia; pero si son muy duras, la superficie del conmutador se desgastará excesivamente durante la vida útil de la máquina.

Todo el desgaste de la superficie del conmutador es resultado directo del hecho de que las escobillas deben pasar por encima de él para convertir el voltaje de ca de los cables del rotor en voltaje

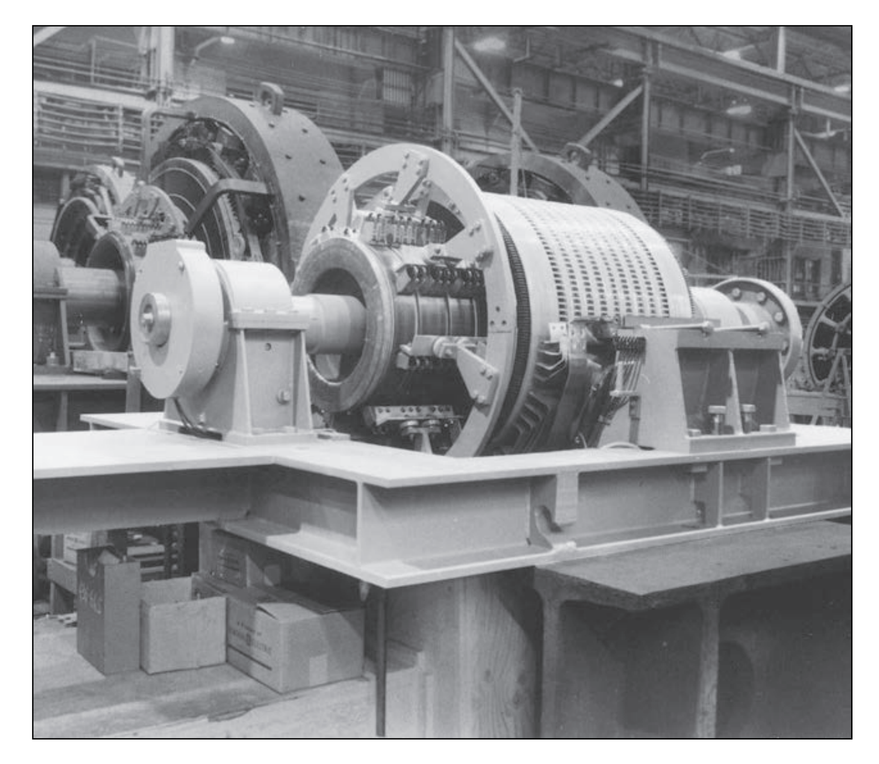


FIGURA 7-37 Fotografía de una máquina de cd, a la cual se le removió la parte superior del estator para mostrar la construcción de su rotor. (*Cortesía de General Electric Company.*)

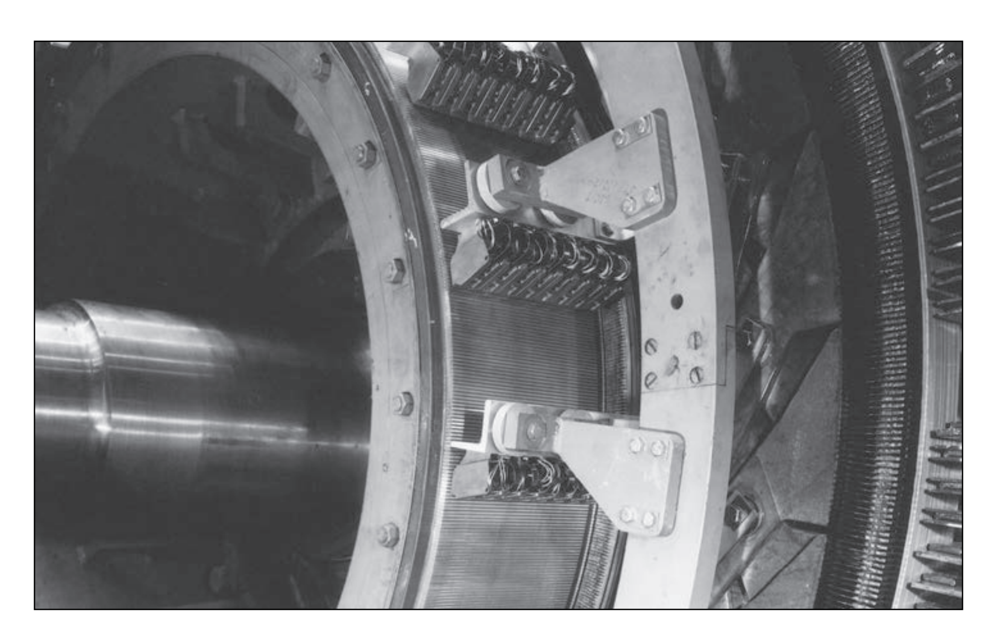


FIGURA 7-38 Vista en detalle de un conmutador y las escobillas de una máquina de cd grande. (*Cortesía de General Electric Company*.)

de cd en los terminales de la máquina. Si la presión de las escobillas es demasiado alta, tanto ellas como las barras del conmutador se desgastan de manera excesiva. Sin embargo, si la presión de las escobillas es demasiado baja, tienden a saltar ligeramente y se generan muchas chispas en la interfaz entre el segmento y las escobillas. Por lo tanto, la presión de las escobillas sobre la superficie del conmutador debe ajustarse con cuidado para obtener la mayor vida útil posible.

Otro factor que afecta el desgaste de las escobillas y de los segmentos del conmutador de una máquina de cd es la cantidad de corriente que fluye en la máquina. Las escobillas normalmente pasan sobre la superficie del conmutador cubierta por una delgada capa de óxido que lubrica el movimiento de las escobillas sobre los segmentos. Sin embargo, si la corriente es muy pequeña, esta capa se desintegra y la fricción entre las escobillas y el conmutador se incrementa fuertemente, lo cual contribuye a un desgaste rápido. Para obtener la mayor vida útil de las escobillas, la máquina debe estar por lo menos cargada parcialmente todo el tiempo.

Aislamiento de los devanados

Además del conmutador, la parte más crítica del diseño de un motor de cd es el aislamiento de los devanados, ya que si se desintegra el motor hace cortocircuito. La reparación de una máquina con el aislamiento en cortocircuito es demasiado costosa, si es que es posible hacerla. Para evitar que el aislamiento en los devanados de la máquina se desintegre por el sobrecalentamiento, se requiere limitar la temperatura en los devanados. Esto se puede lograr en forma parcial suministrando una corriente de aire frío sobre ellos, pero finalmente la temperatura máxima en el devanado limita la potencia máxima que la máquina puede suministrar de manera continua.

Es muy raro que el aislamiento falle de inmediato ante una temperatura crítica. En cambio, el incremento de la temperatura provoca una degradación paulatina del aislamiento, volviéndolo propenso a fallar por alguna otra causa, tal como un impacto, vibración o fatiga eléctrica. Hay una vieja regla práctica que dice que la esperanza de vida de un motor con cierto aislamiento se reduce a la mitad por cada incremento de 10% de la temperatura del devanado. Esta regla aún está vigente hasta cierto punto.

Para estandarizar los límites de temperatura del aislamiento de la máquina, la National Electrical Manufacturers Association (NEMA) definió en Estados Unidos una *serie de clases de sistemas de aislamiento*. Cada una de ellas especifica el aumento de temperatura máximo para esa clase de aislamiento. Hay tres clases comunes de aislamiento de NEMA para motores de cd de caballos de fuerza enteros: A, B, F y H. Cada clase representa una temperatura permisible en el devanado más

alta que la clase anterior. Por ejemplo, si la temperatura en el devanado del inducido aumenta a un valor mayor a la temperatura ambiente en un tipo de motor de inducción de cd que opera continuamente se mide con un termómetro, ésta debe estar limitada a 70°C en el caso del aislamiento clase A, 100°C en el clase B, 130°C para el clase F y 155°C en el clase H.

Las especificaciones de temperaturas específicas se muestran con detalle en la norma NEMA Standard MG1-1993, *Motors and Generators*. La International Electrotechnical Commission (IEC) ha definido varias normas similares, así como lo han hecho varias organizaciones de regulación nacional en otros países.

7.7 FLUJO DE POTENCIA Y PÉRDIDAS EN LAS MÁQUINAS DE CD

Los generadores de cd se alimentan de potencia mecánica y producen potencia eléctrica, mientras que los motores de cd se alimentan de potencia eléctrica y producen potencia mecánica. En ambos casos, no toda la potencia de entrada a la máquina aparece en forma útil en el otro extremo de ella: *siempre* hay pérdidas asociadas con el proceso.

La eficiencia de una máquina de cd se define por medio de la ecuación

$$\eta = \frac{P_{\text{sal}}}{P_{\text{entr}}} \times 100\% \tag{7-50}$$

La diferencia entre la potencia de entrada y la potencia de salida de una máquina son las pérdidas que suceden en su interior. Por lo tanto,

$$\eta = \frac{P_{\text{sal}} - P_{\text{pérd}}}{P_{\text{entr}}} \times 100\% \tag{7-51}$$

Pérdidas en las máquinas de cd

Las pérdidas que hay en las máquinas de cd se pueden dividir en cinco categorías básicas:

1. Pérdidas eléctricas o pérdidas en el cobre (pérdidas I^2R).
2. Pérdidas en las escobillas.
3. Pérdidas en el núcleo.
4. Pérdidas mecánicas.
5. Pérdidas dispersas o misceláneas.

PÉRDIDAS ELÉCTRICAS O PÉRDIDAS EN EL COBRE Las pérdidas en el cobre son las que se presentan en los devanados del inducido y de campo de la máquina. Las pérdidas en el cobre para los devanados del inducido y del campo están dadas por

$$\text{Pérdida en el inducido:} \quad P_A = I_A^2 R_A \tag{7-52}$$

$$\text{Pérdida en el campo:} \quad P_F = I_F^2 R_F \tag{7-53}$$

donde

P_A = pérdida en el inducido
P_F = pérdida en el circuito de campo
I_A = corriente del inducido
I_F = corriente de campo
R_A = resistencia del inducido
R_F = resistencia de campo

Normalmente, la resistencia que se utiliza en estos cálculos es la que existe en el devanado a temperatura de operación normal.

PÉRDIDAS EN LAS ESCOBILLAS Las pérdidas por caída en las escobillas son la potencia perdida a través del contacto potencial de las escobillas de la máquina. Están dadas por la ecuación

$$P_{CE} = V_{CE} I_A \tag{7-54}$$

donde

P_{CE} = pérdida por caída en las escobillas
V_{CE} = caída de voltaje en las escobillas
I_A = corriente del inducido

La razón por la que las pérdidas en las escobillas se calculan de esta manera es que la caída de voltaje a través de un conjunto de escobillas es aproximadamente constante dentro de una amplia gama de corrientes del inducido. A menos que se especifique otro valor, se supone que la caída de voltaje en las escobillas es de 2 V.

PÉRDIDAS EN EL NÚCLEO Las pérdidas en el núcleo son las producidas por histéresis y por corrientes parásitas que se presentan en el metal del motor; se describen en el capítulo 1. Estas pérdidas varían conforme al cuadrado de la densidad de flujo (B^2) y, en el rotor, conforme a la 1.5-ésima potencia de la velocidad de rotación ($n^{1.5}$).

PÉRDIDAS MECÁNICAS Las pérdidas mecánicas en una máquina de cd están asociadas con los efectos mecánicos. Hay dos tipos básicos de pérdidas mecánicas: *fricción* y *rozamiento con el aire*. Las pérdidas por fricción son causadas por el frotamiento en los cojinetes de las máquinas, mientras que las pérdidas por rozamiento con el aire son causadas por el roce entre las partes móviles de la máquina y el aire dentro de la caja del motor. Estas pérdidas varían conforme al cubo de la velocidad de rotación de la máquina.

PÉRDIDAS DISPERSAS (O PÉRDIDAS MISCELÁNEAS) Las pérdidas dispersas no se pueden ubicar en ninguna de las categorías anteriores. Sin importar qué tanta precisión se tenga para considerar las pérdidas, siempre hay algunas que se escapan de las categorías anteriores. Todas éstas se agrupan en las pérdidas dispersas. Por convención, en la mayoría de las máquinas, las pérdidas dispersas se toman como 1% de la carga plena.

Diagrama de flujo de potencia

Una de las técnicas más convenientes para considerar las pérdidas de potencia de una máquina es el *diagrama de flujo de potencia*. En la figura 7-39*a*) se muestra el diagrama de flujo de potencia de un generador de cd. En esta figura se suministra potencia mecánica a la máquina y luego se restan las pérdidas dispersas, las pérdidas mecánicas y las pérdidas en el núcleo. Una vez que se han restado, en situaciones ideales, la potencia restante se convierte de potencia mecánica a eléctrica en el punto llamado P_{conv}. La potencia mecánica que se convierte es igual a

$$P_{\text{conv}} = \tau_{\text{ind}}\omega_m \tag{7-55}$$

y la potencia eléctrica producida resultante está dada por

$$P_{\text{conv}} = E_A I_A \tag{7-56}$$

Sin embargo, ésta no es la potencia que está presente en los terminales de la máquina. Antes de llegar a los terminales se deben restar las pérdidas eléctricas I^2R y las pérdidas en las escobillas.

En el caso de los motores de cd, este diagrama de flujo de potencia simplemente se invierte. En la figura 7-39*b*) se muestra el diagrama de flujo de potencia de un motor.

En los capítulos 8 y 9 se plantearán ejercicios de ejemplo con cálculos de eficiencia de motores y generadores.

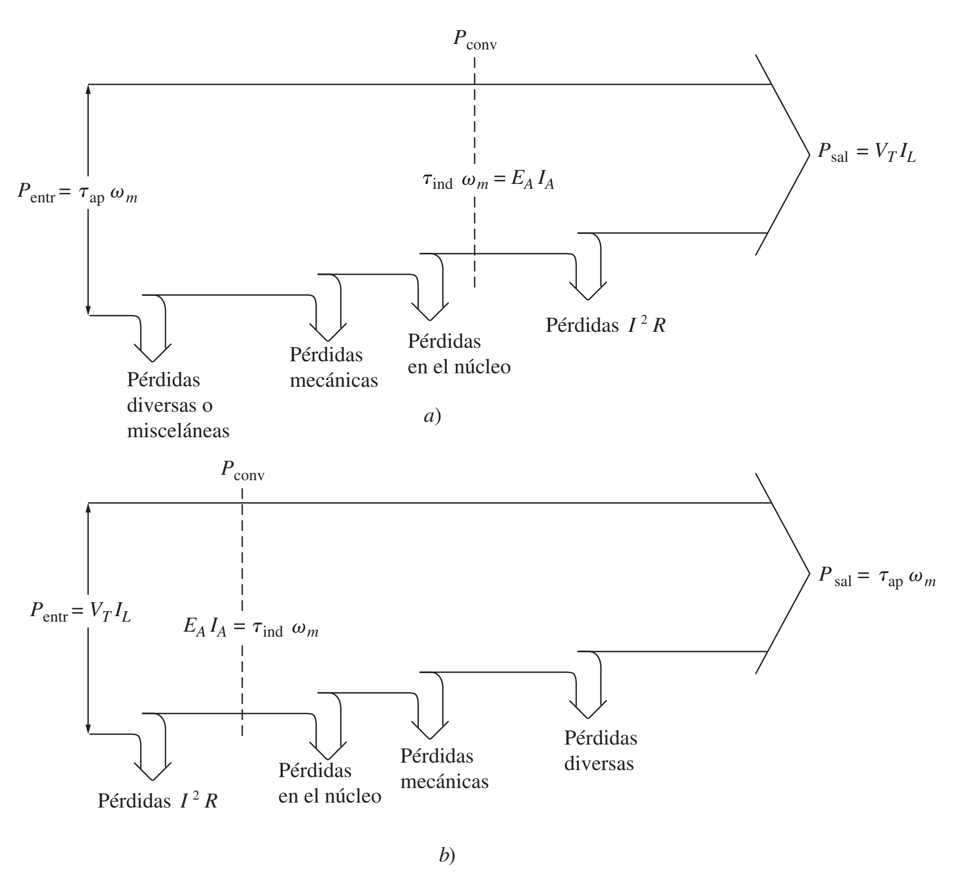


FIGURA 7-39 Diagramas de flujo de potencia de una máquina de cd que actúa como: *a*) generador; *b*) motor.

7.8 RESUMEN

Las máquinas de cd convierten potencia mecánica en potencia de cd eléctrica y viceversa. En este capítulo se explicaron los principios básicos de la operación de las máquinas de cd, primero con una máquina lineal simple y luego con una máquina que constaba de una espira giratoria sencilla.

Se presentó el concepto de conmutación como una técnica para convertir voltaje de ca en los conductores del rotor a salida de cd y también se exploraron los problemas asociados con él. Asimismo, se examinaron las posibles distribuciones de los conductores en los devanados de un rotor de cd (devanados imbricados y ondulados).

Se dedujeron las ecuaciones del voltaje y par inducido en una máquina de cd y se describió la construcción física de las máquinas. Finalmente, se expusieron los tipos de pérdidas en las máquinas de cd y se relacionaron con su eficiencia general de operación.

PREGUNTAS

7-1. ¿Qué es la conmutación? ¿Cómo puede un conmutador convertir voltajes de ca en el inducido de una máquina en voltajes de cd en sus terminales?

7-2. ¿Por qué la curvatura en las caras polares de una máquina de cd contribuye a uniformar el voltaje de cd que sale de ella?

7-3. ¿Qué es el factor de paso de una bobina?

7-4. Explique el concepto de grados eléctricos. ¿Cómo se relaciona el ángulo eléctrico del voltaje en el conductor de un rotor con el ángulo mecánico del eje de la máquina?

7-5. ¿Qué es el paso de conmutación?

7-6. ¿Qué es la multiplicidad de un devanado del inducido?

7-7. ¿En qué se diferencian los devanados imbricados de los devanados ondulados?

7-8. ¿Qué son los devanados compensadores? ¿Por qué se requieren en una máquina con devanado imbricado y no en una máquina con devanado ondulado?

7-9. ¿Qué es la reacción del inducido? ¿Cómo afecta la operación de una máquina de cd?

7-10. Explique el problema de voltaje $L\, di/dt$ en los conductores en proceso de conmutación.

7-11. ¿Cómo afecta el desplazamiento de las escobillas al problema de generación de chispas en las máquinas de cd?

7-12. ¿Qué son los polos de conmutación? ¿Cómo se utilizan?

7-13. ¿Qué son los devanados de compensación? ¿Cuál es su peor desventaja?

7-14. ¿Por qué se utilizan polos laminados en las máquinas modernas de cd?

7-15. ¿Qué es una clase de aislamiento?

7-16. ¿Qué tipos de pérdidas se presentan en una máquina de cd?

PROBLEMAS

7-1. Se tiene la siguiente información sobre la espira giratoria sencilla de la figura 7-6:

$B = 0.4$ T $\qquad V_B = 48$ V

$l = 0.5$ m $\qquad R = 0.4\ \Omega$

$r = 0.25$ m $\qquad \omega = 500$ rad/s

a) ¿Esta máquina opera como motor o como generador? Explique.

b) ¿Qué es la corriente *i* que fluye hacia o desde la máquina? ¿Qué potencia fluye hacia o desde la máquina?

c) Si se cambia la velocidad del rotor a 550 rad/s, ¿qué sucedería con el flujo de corriente hacia o desde la máquina?

d) Si se cambia la velocidad del rotor a 450 rad/s, ¿qué sucedería con el flujo de corriente hacia o desde la máquina?

7-2. Remítase a la máquina simple de dos polos y ocho bobinas que se muestra en la figura P7-1. Se tiene la siguiente información sobre la máquina:

$B = 1.0$ T en entrehierro

$l = 0.3$ m (longitud de los lados de la bobina)

$r = 0.10$ m (radio de las bobinas)

$n = 1\,800$ r/min en sentido contrario al de las manecillas del reloj

La resistencia de cada bobina del rotor es de 0.04 Ω.

a) ¿El devanado del inducido que se muestra es un devanado regresivo o progresivo?

b) ¿Cuántas trayectorias de corriente hay a través del inducido de la máquina?

c) ¿Cuál es la magnitud y polaridad del voltaje en las escobillas de la máquina?

d) ¿Cuál es la resistencia del inducido R_A de la máquina?

e) Si se conecta un resistor de 5 Ω a los terminales de la máquina, ¿cuánta corriente fluirá en los terminales? Considere la resistencia interna de la máquina para determinar el flujo de corriente.

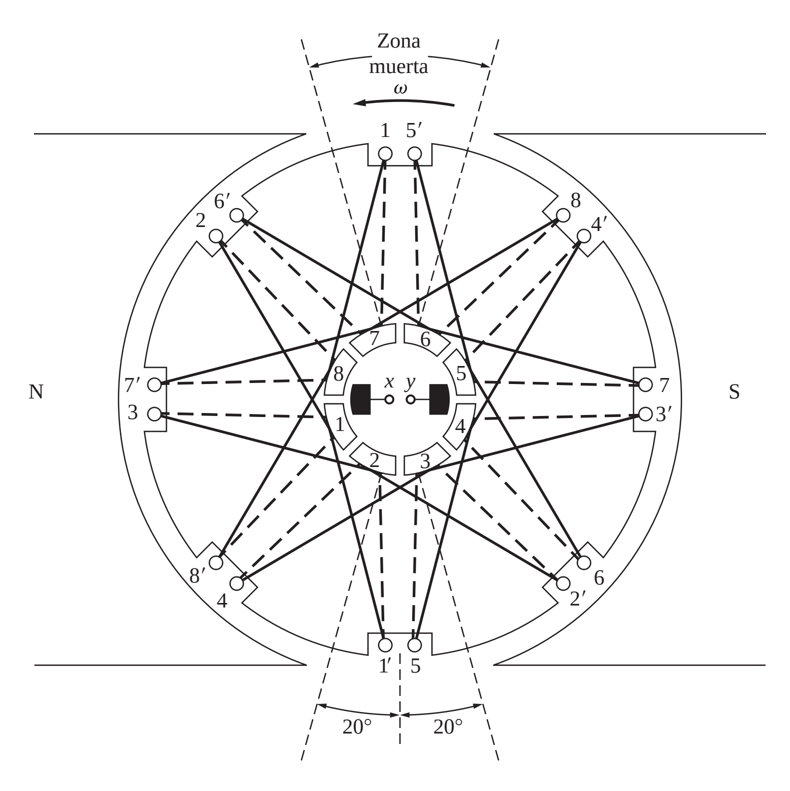


FIGURA P7-1 Máquina del problema 7-2.

N

S

a)

1 9′ 2 10′ 3 11′ 4 12′ 5 13′ 6 14′ 7 15′ 8 16′ 9 1′ 10 2′ 11 3′ 12 4′ 13 5′ 14 6′ 15 7′ 16 8′

m n o p a b c d e f g h i j k l m n

b)

FIGURA P7-2 *a*) Máquina del problema 7-9. *b*) Diagrama del devanado del inducido de la máquina.

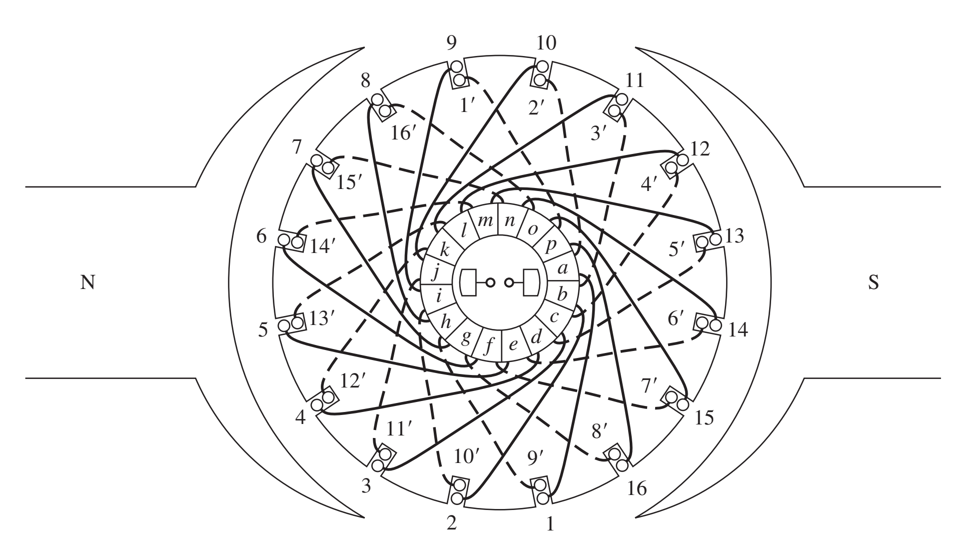


FIGURA P7-3 Máquina del problema 7-10.

f) ¿Cuál es la magnitud y la dirección del par inducido resultante?

g) Suponiendo que la velocidad de rotación y la densidad del flujo magnético son constantes, haga una gráfica del voltaje terminal de esta máquina en función de la corriente que suministra.

7-3. Pruebe que la ecuación del voltaje inducido en una sola espira giratoria simple

$$e_{\text{ind}} = \frac{2}{\pi}\phi\omega_m \qquad \textbf{(7-6)}$$

es un caso especial de la ecuación general del voltaje inducido en una máquina de cd

$$E_A = K\phi\omega_m \qquad \textbf{(7-38)}$$

7-4. Una máquina de cd tiene ocho polos y una corriente nominal de 120 A. ¿Cuánta corriente fluirá en cada camino en condiciones nominales si el inducido es *a*) devanado imbricado simple, *b*) devanado imbricado doble, *c*) devanado ondulado simple?

7-5. ¿Cuántos caminos de corriente paralelos habrá en el inducido de una máquina de 20 polos si el inducido es *a*) devanado imbricado simple, *b*) devanado ondulado doble, *c*) devanado imbricado triple, *d*) devanado ondulado cuádruple?

7-6. La potencia convertida de una forma a otra dentro de un motor de cd está dada por

$$P_{\text{conv}} = E_A I_A = \tau_{\text{ind}}\omega_m$$

Utilice las ecuaciones de E_A y τ_{ind} [ecuaciones (7-38) y (7-49)] para probar que $E_A I_A = \tau_{\text{ind}}\omega_m$; esto es, pruebe que la potencia eléctrica que desaparece en el punto de conversión de potencia es exactamente igual a la potencia mecánica que aparece en ese punto.

7-7. Un generador de cd de ocho polos, 25 kW y 120 V, cuenta con un inducido con devanado imbricado doble que tiene 64 bobinas con 10 vueltas por bobina. Su velocidad nominal es de 3 600 r/min.

a) ¿Cuánto flujo por polo se requiere para producir el voltaje nominal en el generador en condiciones de vacío?

b) ¿Cuál es la corriente por trayectoria en el inducido del generador con carga nominal?

c) ¿Cuál es el par inducido en la máquina con carga nominal?

d) ¿Cuántas escobillas debe tener este motor? ¿Qué tan anchas deben ser?

e) Si la resistencia del devanado es de 0.011 Ω por vuelta, ¿cuál es la resistencia del inducido R_A de la máquina?

7-8. La figura P7-4 muestra un motor de cd pequeño de dos polos con ocho bobinas de rotor y 10 vueltas por bobina. El flujo por polo en la máquina es de 0.006 Wb.

a) Si el motor se conecta a una batería de coche de cd de 12 V, ¿cuál será la velocidad en vacío del motor?

b) Si se conecta el terminal positivo de la batería a la escobilla que está en el extremo derecho del motor, ¿hacia qué dirección girará?

c) Si se carga el motor de tal manera que consuma 600 W de la batería, ¿cuál será el par inducido del motor? (Desprecie cualquier resistencia interna en el motor.)

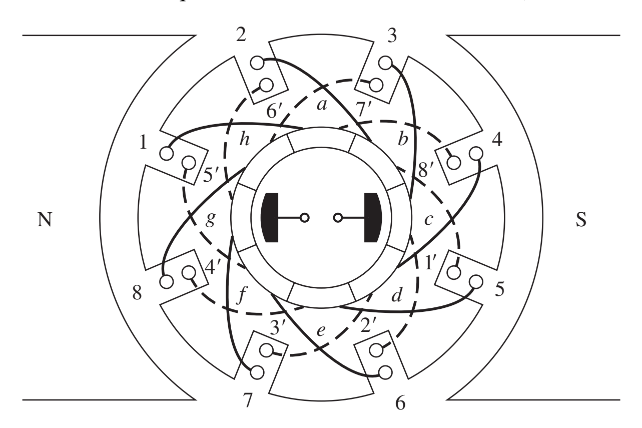


FIGURA P7-4 Máquina del problema 7-8.

7-9. Remítase al devanado de la máquina que se muestra en la figura P7-2.

a) ¿Cuántas trayectorias de corriente paralelas hay a través del devanado del inducido?

b) ¿Dónde deben estar ubicadas las escobillas de esta máquina para lograr una conmutación adecuada? ¿Qué tan anchas deben ser?

c) ¿Cuál es la multiplicidad de la máquina?

d) Si el voltaje en cualquier conductor bajo las caras polares en esta máquina es *e*, ¿cuál es el voltaje en los terminales de la máquina?

7-10. Describa con detalle el devanado de la máquina que se muestra en la figura P7-3. Si se aplica un voltaje positivo a la escobilla bajo la cara polar norte, ¿en qué sentido girará el motor?

BIBLIOGRAFÍA

1. Del Toro. V., *Electric Machines and Power Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, Nueva Jersey, 1985.
2. Fitzgerald. A.E., C. Kingsley, Jr. y S.D. Umans, *Electric Machinery*, McGraw-Hill, 5a. ed., Nueva York, 2003.
3. Hubert, Charles I., *Preventive Maintenance of Electrical Equipment*, McGraw-Hill, 2a. ed., Nueva York, 1969.
4. Kosow, Irving L., *Electric Machinery and Transformers*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, Nueva Jersey, 1972.
5. National Electrical Manufacturers Association, *Motors and Generators*, Publicación núm. MG1-2006, NEMA, Washington, D.C., 2006.
6. Siskind, Charles. *Direct Current Machinery*, McGraw-Hill, Nueva York, 1952.
7. Werninck, E.H. (ed.), *Electric Motor Handbook*, McGraw-Hill, Londres, 1978.

CAPÍTULO 8 Motores y generadores de corriente directa

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

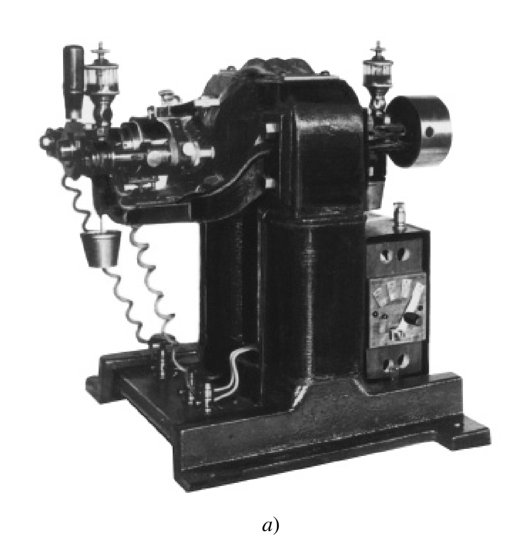
- Entender los tipos de motores de cd en uso general.
- Comprender el circuito equivalente de un motor de cd.
- Entender cómo deducir las características de par-velocidad de motores de cd de excitación separada, en derivación, en serie y compuestos.
- Poder realizar análisis no lineal de motores de cd mediante la curva de magnetización, tomando en cuenta los efectos de reacción del inducido.
- Entender cómo controlar la velocidad de diferentes tipos de motores de cd.
- Comprender las características especiales de motores de cd en serie, y las aplicaciones para las que son especialmente adecuados.
- Poder explicar los problemas asociados con un motor de cd diferencialmente compuesto.
- Entender los métodos para hacer arrancar con seguridad motores de cd.
- Comprender el circuito equivalente de un generador de cd.
- Entender cómo puede trabajar un generador de cd sin una fuente externa de voltaje.
- Comprender cómo deducir las características de voltaje-corriente de generadores de cd de excitación separada, en derivación, en serie y compuestos.
- Poder realizar análisis no lineal de generadores de cd mediante la curva de magnetización, tomando en cuenta los efectos de reacción del inducido.

Los motores de cd se utilizan como motores y los generadores de cd se usan como generadores. Como se resaltó en el capítulo 7, la misma máquina puede operar físicamente como motor o como generador; sólo es una cuestión de la dirección del flujo de potencia que circule a través de ella. En este capítulo se estudiarán los diferentes tipos de motores y generadores de cd que se pueden construir y se explicarán las desventajas y ventajas de cada uno. Se incluirá una exposición sobre el arranque de un motor de cd y los controladores en estado sólido. Finalmente, el capítulo concluye con una explicación sobre generadores de cd.

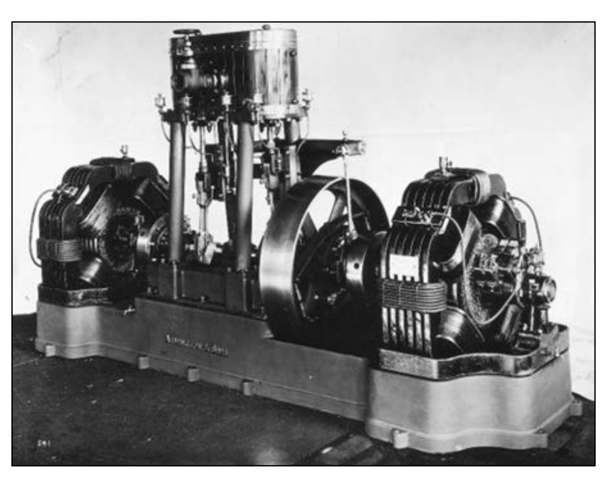
8.1 INTRODUCCIÓN A LOS MOTORES DE CD

Los primeros sistemas de potencia en Estados Unidos eran de cd (véase la figura 8-1), pero a finales de la década de 1890 era claro que los sistemas de potencia de ca ganaban terreno. A pesar de esto, los motores de cd siguieron siendo una parte significativa de la maquinaria comprada cada año hasta la década de 1960 (parte que ha disminuido significativamente en los últimos 40 años). ¿Por qué eran tan comunes los motores de cd, cuando los sistemas de potencia de cd eran tan poco usuales?

Hay muchas razones para la popularidad continua de los motores de cd. Una es que los sistemas de potencia de cd aún son comunes en los coches, camiones y aviones. Cuando un vehículo tiene un sistema de potencia de cd, es lógico considerar el empleo de motores de cd. Otra aplicación de los motores de cd es cuando se requieren variaciones amplias de velocidad. Antes de la creciente difusión de los rectificadores-inversores de potencia electrónicos, no había un mejor motor que uno de cd para las aplicaciones de control de velocidad. Incluso si no había una fuente de potencia de cd disponible, se usaban rectificadores en estado sólido y circuitos recortadores para crear la potencia de cd que se requería y se utilizaban motores de cd para suministrar el control de velocidad deseado. (Hoy en día se prefieren los motores de inducción con paquetes accionadores en estado sólido a los motores de cd para la mayoría de las aplicaciones de control de velocidad. Sin embargo, aún hay ciertas aplicaciones en las que se prefieren los motores de cd.)



a)



b)

FIGURA 8-1 Primeros motores de cd. *a*) Uno de los primeros construido por Elihu Thompson en 1886. Estaba calculado en alrededor de ½ hp. (*Cortesía de General Electric Company*.) *b*) Motor de cd más grande con cuatro polos de principios del siglo xx. Nótese la manija para desplazar las escobillas al plano neutro. (*Cortesía de General Electric Company*.)

A menudo se comparan los motores de cd entre sí con base en su regulación de velocidad. La *regulación de velocidad* (RV) de un motor se define como

$$\text{SR} = \frac{\omega_{\text{m,sc}} - \omega_{\text{m,pc}}}{\omega_{\text{m,pc}}} \times 100\% \qquad \textbf{(8-1)}$$

$$\text{SR} = \frac{n_{\text{m,sc}} - n_{\text{m,pc}}}{n_{\text{m,pc}}} \times 100\% \qquad \textbf{(8-2)}$$

RV es una medida aproximada de la forma de la característica par-velocidad de un motor: una regulación de velocidad positiva significa que la velocidad del motor cae cuando se incrementa la carga, mientras que una regulación de voltaje negativa implica que la velocidad del motor se incrementa cuando disminuye la carga. La magnitud de la regulación de velocidad dicta aproximadamente la inclinación de la pendiente de la curva par-velocidad.

Los motores de cd son, por supuesto, accionados desde una fuente de potencia de cd. A menos que se especifique lo contrario, *se supone que el voltaje de entrada de un motor de cd es constante*, porque esto simplifica el análisis de los motores y la comparación entre diferentes tipos de ellos.

Hay cinco grandes tipos de motores de cd de uso general:

1. Motor de cd de excitación separada.
2. Motor de cd en derivación.
3. Motor de cd de imán permanente.
4. Motor de cd en serie.
5. Motor de cd compuesto.

Cada uno se examinará por separado.

8.2 CIRCUITO EQUIVALENTE EN UN MOTOR DE CD

En la figura 8-2 se muestra el circuito equivalente de un motor de cd. En esta figura el circuito del inducido se representa por medio de una fuente de voltaje ideal E_A y un resistor R_A. Esta representación es en realidad el equivalente de Thevenin de toda la estructura del rotor, la cual incluye las bobinas, interpolos y devanados de compensación, si es que éstos existen. La caída de voltaje en las escobillas se representa por medio de una pequeña batería V_{escob} en sentido opuesto a la dirección del flujo de corriente en la máquina. Las bobinas de campo, que producen el campo magnético en el generador, están simbolizadas por medio de un inductor L_F y de un resistor R_F. El resistor independiente R_{ajus} representa un resistor variable externo utilizado para controlar la cantidad de corriente en el circuito de campo.

Hay unas cuantas variaciones y simplificaciones de este circuito equivalente básico. Con frecuencia, la caída de voltaje en las escobillas es tan sólo una pequeña fracción del voltaje generado en la máquina. Por lo tanto, en los casos en que no es demasiado crítico, se puede dejar fuera la caída de voltaje en las escobillas o incluirla aproximadamente en el valor de R_A. Además, en ocasiones, la resistencia interna de las bobinas de campo se agrupa con el resistor variable y al total se le llama R_F (véase la figura 8-2*b*). Una tercera variación consiste en que algunos generadores tienen más de una bobina de campo y todas ellas se representan en el circuito equivalente.

El voltaje interno que genera esta máquina está dado por la ecuación

$$E_A = K\phi\omega_m \qquad \textbf{(7-38)}$$

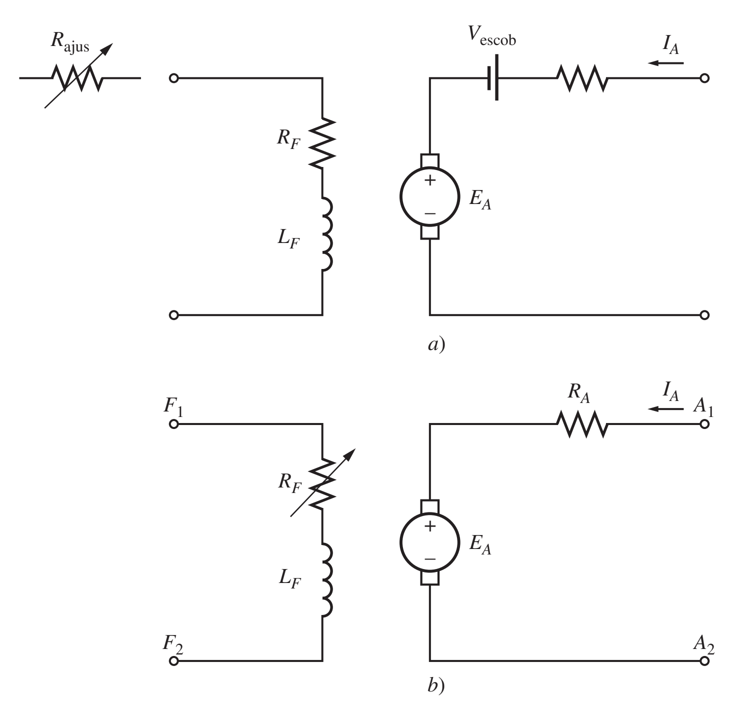


FIGURA 8-2 *a*) Circuito equivalente de un motor de cd. *b*) Circuito equivalente simplificado que elimina la caída de voltaje en las escobillas y combina R_{ajus} con la resistencia de campo.

y el par inducido desarrollado por la máquina está dado por

$$\tau_{ind} = K\phi I_A \tag{7-49}$$

Estas dos ecuaciones, la ecuación de la ley de voltaje de Kirchhoff del circuito del inducido y la curva de magnetización de la máquina, son todas las herramientas necesarias para analizar el comportamiento y desempeño de un motor de cd.

8.3 CURVA DE MAGNETIZACIÓN DE UNA MÁQUINA DE CD

El voltaje interno generado E_A en un motor de cd está dado por la ecuación (7-38):

$$E_A = K\phi\omega_m \tag{7-38}$$

Por lo tanto, E_A es directamente proporcional al flujo en la máquina y a la velocidad de rotación de ella. ¿Cómo se relaciona el voltaje interno generado con la corriente de campo en la máquina?

La corriente de campo en una máquina de cd produce una fuerza magnetomotriz de campo dada por $\mathcal{F} = N_F I_F$. Esta fuerza magnetomotriz produce un flujo en la máquina de acuerdo con su curva de magnetización (figura 8-3). Debido a que la corriente de campo es directamente proporcional a la fuerza magnetomotriz y puesto que E_A también lo es con respecto al flujo, se acostumbra representar la curva de magnetización como una gráfica de E_A y la corriente de campo dada una cierta velocidad ω_0 (figura 8-4).

Vale la pena resaltar que para obtener de una máquina la potencia máxima posible por libra de peso, la mayoría de los

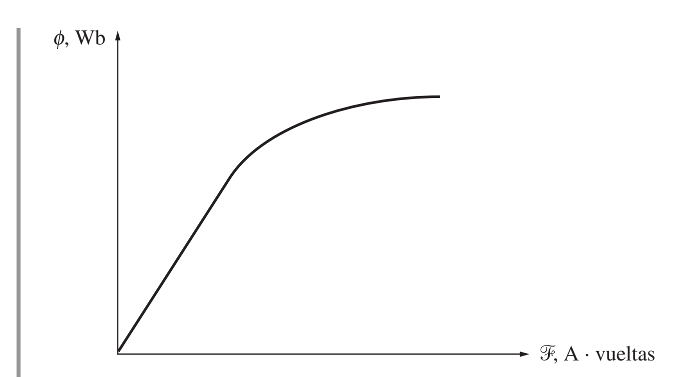


FIGURA 8-3 Curva de magnetización de un material ferromagnético (ϕ *versus* $\mathcal{F}$).

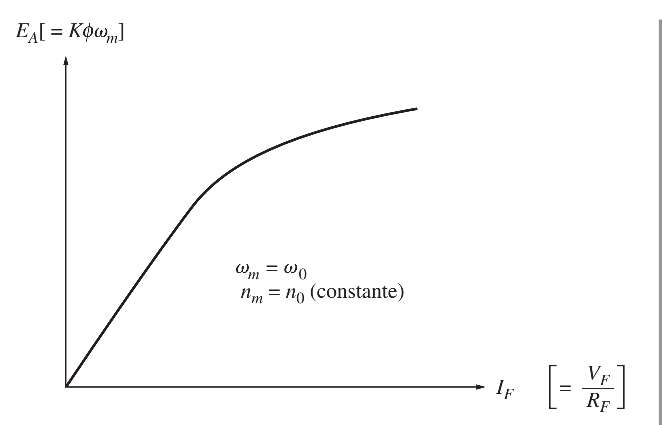


FIGURA 8-4 Curva de magnetización de una máquina de cd expresada como una gráfica de E_A *versus* I_F, para una velocidad fija ω_0.

motores y generadores están diseñados para operar cerca del punto de saturación de la curva de magnetización (en la rodilla de la curva). Esto implica que a menudo se requiere relativamente un gran incremento de la corriente de campo para obtener un pequeño incremento en E_A cuando se opera casi a plena carga.

Las curvas de magnetización de las máquinas de cd que se utilizan en este libro están disponibles en formato electrónico para simplificar la solución de los problemas con MATLAB. Cada curva de magnetización está guardada en un archivo M diferente. Cada archivo M contiene tres variables: `if_values`, que incluye los valores de la corriente de campo: `ea_values`, que contiene los valores correspondientes a E_A: y `n_0`, que incluye la velocidad a la que se midió la curva de magnetización en revoluciones por minuto.

8.4 MOTORES DE CD DE EXCITACIÓN SEPARADA Y EN DERIVACIÓN

En la figura 8-5*a*) se muestra el circuito equivalente de un motor de cd de excitación separada y en la figura 8-5*b*) se ilustra el circuito equivalente de un motor de cd en derivación. Un motor de cd de excitación separada es aquel cuyo circuito de campo se alimenta de una fuente de potencia de voltaje constante independiente, mientras que un motor de cd en derivación es aquel cuyo circuito de campo obtiene su potencia directamente a través de las terminales del inducido del motor. Cuando se supone que el voltaje que se suministra a un motor es constante, no hay diferencia práctica entre el comportamiento de estas dos máquinas. A menos que se especifique lo contrario, cuando se describa el comportamiento de un motor en derivación, se incluye también al motor de excitación separada.

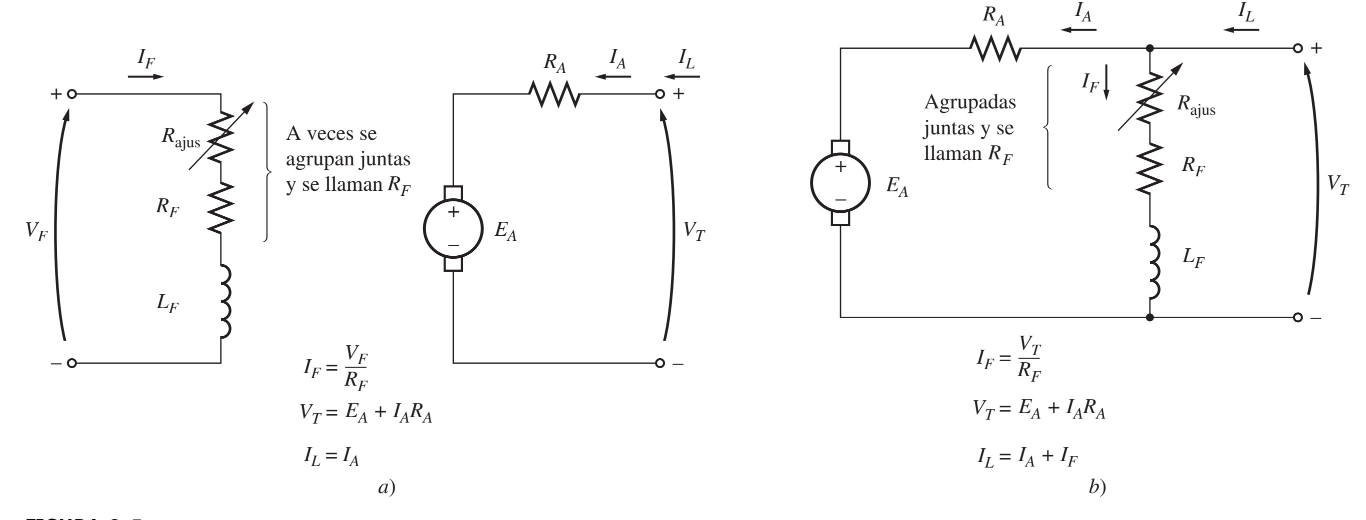


FIGURA 8-5 *a*) Circuito equivalente de un motor de cd de excitación separada. *b*) Circuito equivalente de un motor de cd en derivación.

La ecuación de la ley de voltaje de Kirchhoff (KVL, por sus siglas en inglés) del circuito del inducido de estos motores es

$$V_T = E_A + I_A R_A \tag{8-3}$$

Característica de las terminales de un motor de cd en derivación

La característica de las terminales de una máquina es una gráfica de sus cantidades de salida, donde se puede apreciar la forma de éstas. En un motor, las cantidades de salida son el par y la velocidad del eje, por lo que la característica de las terminales de un motor es una gráfica donde se aprecia la relación entre su *par de salida* y *su velocidad de salida*.

¿Cómo responde un motor de cd en derivación a la carga? Supóngase que se incrementa la carga en el eje de un motor en derivación. Entonces, el par de carga τ_{carga} excederá el par inducido τ_{ind} en la máquina y el motor comenzará a perder velocidad. Cuando el motor pierde velocidad, el voltaje interno generado cae ($E_A = K\phi\omega_m\downarrow$) por lo que se incrementa la corriente en el inducido del motor $I_A = (V_T - E_A\downarrow)/R_A$. Conforme aumenta la corriente en el inducido, también lo hace el par inducido en el motor ($\tau_{\text{ind}} = K\phi I_A\uparrow$), y finalmente el par inducido es igual al par de carga a una baja velocidad de rotación ω_m.

La característica de salida de un motor de cd en derivación se puede deducir de las ecuaciones de voltaje y par inducidos en el motor más la ley de voltaje de Kirchhoff (KVL). La ecuación KVL de un motor en derivación es

$$V_T = E_A + I_A R_A \tag{8-3}$$

El voltaje inducido $E_A = K\phi\omega_m$, por lo que

$$V_T = K\phi\omega_m + I_A R_A \tag{8-4}$$

Puesto que $\tau_{\text{ind}} = K\phi I_A$, la corriente I_A se puede expresar como

$$I_A = \frac{\tau_{\text{ind}}}{K\phi} \tag{8-5}$$

La combinación de las ecuaciones (8-4) y (8-5) produce

$$V_T = K\phi\omega_m + \frac{\tau_{\text{ind}}}{K\phi} R_A \tag{8-6}$$

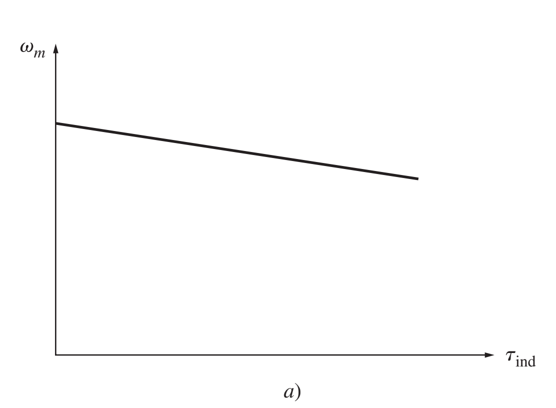
Por último, si se despeja la velocidad del motor se obtiene

$$\omega_m = \frac{V_T}{K\phi} - \frac{R_A}{(K\phi)^2}\tau_{\text{ind}} \tag{8-7}$$

Esta ecuación es una línea recta con pendiente negativa. La característica par-velocidad resultante de un motor de cd en derivación se muestra en la figura 8-6*a*).

Es importante darse cuenta de que para que la velocidad del motor varíe linealmente con el par, los otros términos de la expresión deben permanecer constantes ante cambios en la carga. Se supone que el voltaje en las terminales que suministra la fuente de potencia de cd es constante; si no, entonces las variaciones de voltaje afectarán la forma de la curva par-velocidad.

Otro factor *interno del motor* que también puede afectar la forma de la curva par-velocidad es la reacción del inducido. Si un motor tiene una reacción del inducido, entonces, ante un aumento en la carga, los efectos de debilitamiento de flujo *reducen* su flujo. Como muestra la ecuación (8-7), el efecto de reducción de flujo es el incremento de la velocidad del motor ante cualquier carga, más allá de la velocidad a la que operaría si no tuviera una reacción del inducido. En la figura 8-6*b*) se puede apreciar la característica par-velocidad de un motor en derivación con reacción en el inducido. Si el motor tiene devanados de compensación, por supuesto que no se presentará ningún problema de debilitamiento de flujo en la máquina y éste será constante.



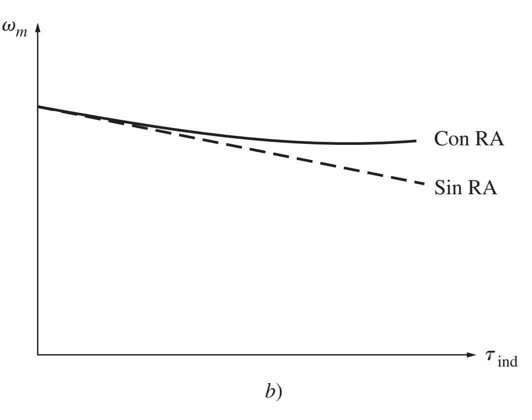


FIGURA 8-6 *a*) Característica par-velocidad de un motor de cd en derivación o de excitación separada con devanados de compensación para eliminar la reacción del inducido. *b*) Característica par-velocidad de un motor con reacción del inducido.

Si un motor de cd en derivación tiene devanados de compensación de tal manera que *su flujo es constante sin importar la carga* y se conocen la velocidad del motor y la corriente en el inducido para cualquier valor de carga, entonces es posible calcular su velocidad para cualquier otro valor de carga, siempre y cuando la corriente en el inducido con esa carga se conozca o se pueda determinar. El ejemplo 8-1 ilustra estos cálculos.

EJEMPLO 8-1

Un motor de cd en derivación de 50 hp, 250 V y 1 200 r/min con devanados de compensación tiene una resistencia del inducido (que incluye las escobillas, los devanados de compensación y los interpolos) de 0.06 Ω. Su circuito de campo tiene una resistencia total $R_{ajus} + R_F$ de 50 Ω, que produce una velocidad *en vacío* de 1 200 r/min. Hay 1 200 vueltas por polo en el devanado de campo en derivación (véase la figura 8-7).

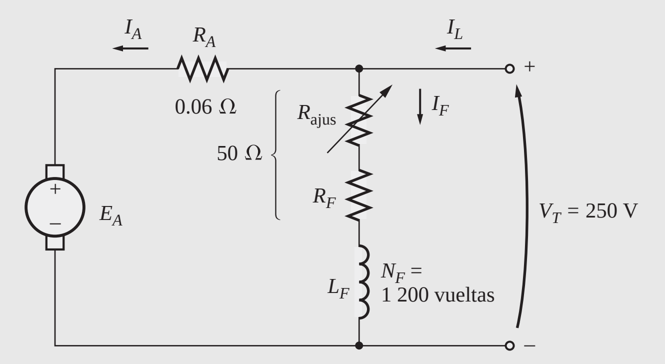


FIGURA 8-7 El motor en derivación del ejemplo 8-1.

a) Encuentre la velocidad del motor si la corriente de entrada es de 100 A.
b) Encuentre la velocidad del motor si la corriente de entrada es de 200 A.
c) Encuentre la velocidad del motor si la corriente de entrada es de 300 A.
d) Haga la gráfica de la característica par-velocidad de este motor.

Solución

El voltaje interno generado por una máquina de cd con la velocidad expresada en revoluciones por minuto está dado por

$$E_A = K'\phi n_n \tag{7-41}$$

Puesto que la corriente de campo en la máquina es constante (debido a que tanto V_T como la resistencia de campo son constantes) y puesto que no hay efectos de reacción del inducido, *el flujo en este motor es constante*. Por lo tanto, la relación entre las velocidades y los voltajes internos generados del motor en dos condiciones diferentes de carga es

$$\frac{E_{A2}}{E_{A1}} = \frac{K'\phi n_{m2}}{K'\phi n_{m1}} \tag{8-8}$$

Se cancela la constante K', puesto que es una constante para cualquier máquina y se cancela el flujo ϕ, como se describe arriba. En consecuencia,

$$n_{m2} = \frac{E_{A2}}{E_{A1}} n_{m1} \tag{8-9}$$

En vacío, la corriente en el inducido es cero, por lo que $E_{A1} = V_T = 250$ V, mientras que la velocidad $n_{m1} = 1\,200$ r/min. Si se puede calcular el voltaje interno generado para cualquier otra carga, se podrá determinar la velocidad del motor para esa carga a partir de la ecuación (8-9).

a) Si $I_L = 100$ A, entonces la corriente en el inducido del motor es

$$I_A = I_L - I_F = I_L - \frac{V_T}{R_F}$$
$$= 100\text{ A} - \frac{250\text{ V}}{50\ \Omega} = 95\text{ A}$$

Por lo tanto, E_A con esta carga será

$$\begin{aligned} E_A &= V_T - I_A R_A \\ &= 250 \text{ V} - (95 \text{ A})(0.06 \ \Omega) = 244.3 \text{ V} \end{aligned}$$

La velocidad resultante del motor es

$$n_{m2} = \frac{E_{A2}}{E_{A1}} n_{m1} = \frac{244.3 \text{ V}}{250 \text{ V}} 1\,200 \text{ r/min} = 1\,173 \text{ r/min}$$

b) Si $I_L = 200$ A, entonces la corriente en el inducido del motor es

$$I_A = 200 \text{ A} - \frac{250 \text{ V}}{50 \ \Omega} = 195 \text{ A}$$

Por lo tanto, con esta carga E_A será

$$\begin{aligned} E_A &= V_T - I_A R_A \\ &= 250 \text{ V} - (195 \text{ A})(0.06 \ \Omega) = 238.3 \text{ V} \end{aligned}$$

La velocidad resultante del motor es

$$n_{m2} = \frac{E_{A2}}{E_{A1}} n_{m1} = \frac{238.3 \text{ V}}{250 \text{ V}} 1\,200 \text{ r/min} = 1\,144 \text{ r/min}$$

c) Si $I_L = 300$ A, entonces la corriente en el inducido del motor es

$$\begin{aligned} I_A &= I_L - I_F = I_L - \frac{V_T}{R_F} \\ &= 300 \text{ A} - \frac{250 \text{ V}}{50 \ \Omega} = 295 \text{ A} \end{aligned}$$

Por lo tanto, con esta carga E_A será

$$\begin{aligned} E_A &= V_T - I_A R_A \\ &= 250 \text{ V} - (295 \text{ A})(0.06 \ \Omega) = 232.3 \text{ V} \end{aligned}$$

La velocidad resultante del motor es

$$n_{m2} = \frac{E_{A2}}{E_{A1}} n_{m1} = \frac{232.3 \text{ V}}{250 \text{ V}} 1\,200 \text{ r/min} = 1\,115 \text{ r/min}$$

d) Para hacer la gráfica de la característica de salida del motor se requiere encontrar el par correspondiente a cada valor de velocidad. En vacío, el par inducido τ_{ind} es obviamente cero. El par inducido para cualquier otra carga se puede encontrar si se toma en cuenta que la potencia convertida en un motor de cd es

$$P_{conv} = E_A I_A = \tau_{ind} \omega_m \qquad \textbf{(7-55, 7-56)}$$

Con esta ecuación se sabe que el par inducido en un motor es

$$\tau_{ind} = \frac{E_A I_A}{\omega_m} \qquad \textbf{(8-10)}$$

Por lo tanto, el par inducido cuando $I_L = 100$ A es

$$\tau_{ind} = \frac{(244.3 \text{ V})(95 \text{ A})}{(1\,173 \text{ r/min})(1 \text{ min}/60 \text{ s})(2\pi \text{ rad/r})} = 190 \text{ N} \cdot \text{m}$$

En consecuencia, el par inducido cuando $I_L = 200$ A es

$$\tau_{ind} = \frac{(238.3 \text{ V})(95 \text{ A})}{(1\,144 \text{ r/min})(1 \text{ min}/60 \text{ s})(2\pi \text{ rad/r})} = 388 \text{ N} \cdot \text{m}$$

El par inducido cuando $I_L = 300$ A es

$$\tau_{\text{ind}} = \frac{(232.3 \text{ V})(295 \text{ A})}{(1\,115 \text{ r/min})(1 \text{ min}/60 \text{ s})(2\pi \text{ rad/r})} = 587 \text{ N} \cdot \text{m}$$

En la figura 8-8 se muestra la característica par-velocidad resultante del motor.

FIGURA 8-8 Característica par-velocidad del motor del ejemplo 8-1.

Análisis no lineal de un motor de cd en derivación

El flujo ϕ y por lo tanto el voltaje interno generado E_A por una máquina de cd es una función *no lineal* de su fuerza magnetomotriz. Por lo tanto, cualquier cosa que cambie la fuerza magnetomotriz de una máquina tendrá un efecto no lineal en el voltaje interno generado por la máquina. Puesto que el cambio en E_A no se puede calcular analíticamente, se debe utilizar la curva de magnetización para determinar con exactitud el E_A para cierta fuerza magnetomotriz dada. Los dos factores más importantes que contribuyen a la fuerza magnetomotriz de la máquina son la corriente de campo y la reacción del inducido, si es que ésta existe.

Puesto que la curva de magnetización es una gráfica directa de E_A *versus* I_F a cierta velocidad ω_o dada, el efecto de cambiar la corriente de campo de la máquina se puede determinar directamente a partir de ella.

Si una máquina tiene una reacción del inducido, se reducirá su flujo con cada incremento de carga. La fuerza magnetomotriz total de un motor de cd en derivación es la fuerza magnetomotriz del circuito de campo menos la fuerza magnetomotriz debida a la reacción del inducido (AR, por sus siglas en inglés):

$$\mathscr{F}_{\text{net}} = N_F I_F - \mathscr{F}_{\text{RA}} \tag{8-11}$$

Puesto que las curvas de magnetización se expresan como gráficas de E_A *versus* la corriente de campo, se acostumbra definir una *corriente de campo equivalente* que produciría el mismo voltaje de salida que la combinación de todas las fuerzas magnetomotrices de la máquina. Entonces se puede determinar el voltaje resultante E_A localizando la corriente de campo equivalente en la curva de magnetización. La corriente de campo equivalente en un motor de cd en derivación está dada por

$$I_F^* = I_F - \frac{\mathscr{F}_{\text{RA}}}{N_F} \tag{8-12}$$

Se debe tomar en cuenta otro efecto cuando se utiliza el análisis no lineal para determinar el voltaje interno generado de un motor de cd. Las curvas de magnetización para una máquina se dibujan para una velocidad específica, por lo general la velocidad nominal de la máquina. ¿Cómo se pueden determinar los efectos de una cierta corriente de campo si el motor gira a una velocidad diferente a la velocidad nominal?

La ecuación del voltaje inducido en una máquina de cd cuando la velocidad está dada en revoluciones por minuto es

$$E_A = K'\phi n_m \tag{7-41}$$

Para cierta corriente de campo efectiva, el flujo en la máquina es fijo, por lo que el voltaje interno generado está relacionado con la velocidad por medio de

$$\frac{E_A}{E_{A0}} = \frac{n_m}{n_0} \tag{8-13}$$

donde E_{A0} y n_0 representan los valores de referencia de voltaje y velocidad, respectivamente. Si se conocen las condiciones de referencia de la curva de magnetización y se conoce el E_A verdadero mediante la ley de voltaje de Kirchhoff, entonces se puede determinar la velocidad real n con la ecuación (8-13). El empleo de la curva de magnetización y de las ecuaciones (8-12) y (8-13) se ilustran en el siguiente ejemplo en el que se analiza un motor de cd con reacción en el inducido.

EJEMPLO 8-2

Un motor de cd en derivación de 50 hp, 250 V y 1 200 r/min *sin* devanados de compensación, tiene una resistencia del inducido (incluyendo las escobillas y los interpolos) de 0.06 Ω. El circuito de campo tiene una resistencia total de $R_F + R_{\text{ajus}}$ de 50 Ω, que produce una velocidad en vacío de 1 200 r/min. Hay 1 200 vueltas por polo en el devanado de campo en derivación y la reacción del inducido produce una fuerza magnetomotriz de desmagnetización de 840 A • vueltas con una corriente de carga de 200 A. En la figura 8-9 se muestra la curva de magnetización de esta máquina.

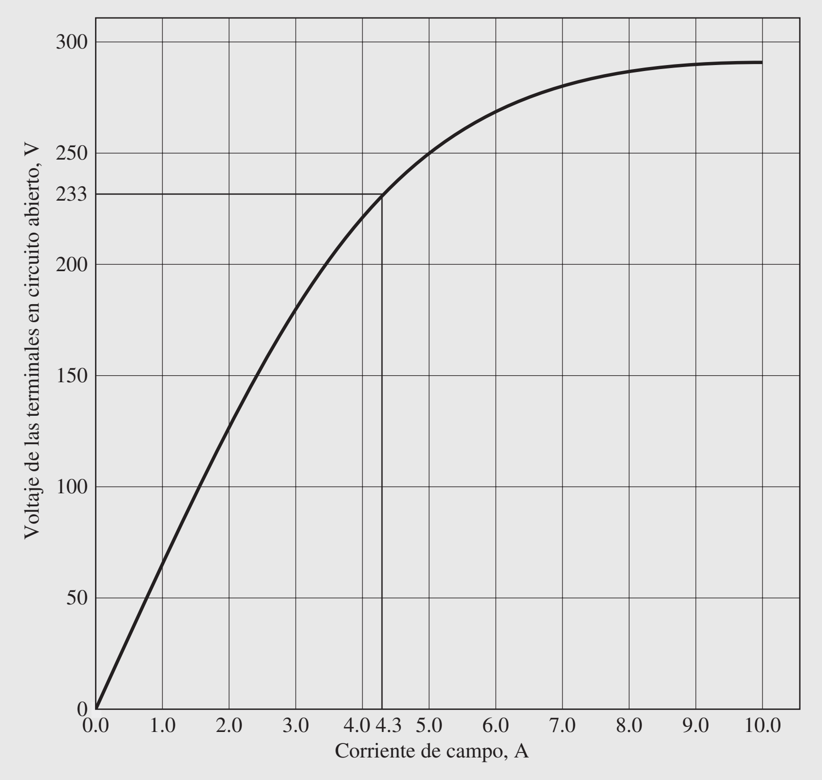


FIGURA 8-9 Curva de magnetización de un típico motor de cd de 250 V, tomada a una velocidad de 1 200 r/min.

a) Encuentre la velocidad del motor cuando su corriente de entrada es igual a 200 A.
b) Este motor es esencialmente idéntico al del ejemplo 8-1 excepto por la ausencia de devanados de compensación. ¿Cómo es esta velocidad en comparación con la del motor anterior con una corriente de carga de 200 A?
c) Calcule y haga la gráfica de la característica par-velocidad del motor.

Solución

a) Si $I_L = 200$ A, entonces la corriente en el inducido del motor es

$$I_A = I_L - I_F = I_L - \frac{V_T}{R_F}$$
$$= 200 \text{ A} - \frac{250 \text{ V}}{50 \, \Omega} = 195 \text{ A}$$

Por lo tanto, el voltaje interno generado por la máquina es

$$E_A = V_T - I_A R_A$$
$$= 250 \text{ V} - (195 \text{ A})(0.06 \, \Omega) = 238.3 \text{ V}$$

Si $I_L = 200$ A, la fuerza magnetomotriz de desmagnetización debida a la reacción del inducido es de 840 A • vueltas, por lo que la corriente de campo en derivación efectiva del motor es

$$I_F^* = I_F - \frac{\mathscr{F}_{\text{RA}}}{N_F} \tag{8-12}$$
$$= 5.0 \text{ A} - \frac{840 \text{ A • vueltas}}{1\,200 \text{ vueltas}} = 4.3 \text{ A}$$

Por la curva de magnetización se sabe que esta corriente de campo efectiva producirá un voltaje interno generado E_{A0} de 233 V a una velocidad n_0 de 1 200 r/min.

Se sabe que el voltaje interno generado E_{A0} será de 233 V a una velocidad de 1 200 r/min. Puesto que el voltaje interno generado presente E_A es de 238.3 V, la velocidad de operación actual del motor será

$$\frac{E_A}{E_{A0}} = \frac{n_m}{n_0} \tag{8-13}$$

$$n_m = \frac{E_A}{E_{A0}} n_0 = \frac{238.3 \text{ V}}{233 \text{ V}} (1\,200 \text{ r/min}) = 1\,227 \text{ r/min}$$

b) A 200 A de carga en el ejemplo 8-1, la velocidad del motor era $n_m = 1\,144$ r/min. En este ejemplo, la velocidad del motor es de 1 227 r/min. *Nótese que la velocidad de un motor con reacción en el inducido es mayor a la velocidad de un motor sin reacción en el inducido*. El incremento relativo de la velocidad se debe al debilitamiento del flujo en la máquina con reacción en el inducido.
c) Para deducir la característica par-velocidad del motor se debe calcular el par y la velocidad en varias condiciones diferentes de carga. Desafortunadamente, la fuerza magnetomotriz de reacción del inducido de desmagnetización sólo se conoce para una condición de carga (200 A). Puesto que no hay más información disponible, se supondrá que la fuerza de $\mathscr{F}_{\text{RA}}$ varía linealmente con la corriente de carga.

A continuación se muestra un archivo M de MATLAB que automatiza este cálculo y hace la gráfica de la característica par-velocidad resultante. Realiza los mismos pasos del inciso *a*) para determinar la velocidad dada cada corriente de carga y luego calcula el par inducido para esa velocidad. Nótese que lee la curva de magnetización de un archivo que se llama `fig8_9.mat`. Este archivo y las demás curvas de magnetización que aparecen en este capítulo están disponibles en el sitio web del libro (en el prefacio se encuentran los detalles).

```
% Archivo M: shunt_ts_curve.m
% Archivo M para crear una gráfica de la curva par-velocidad del
% motor de cd en
% derivación con reacción del inducido del
% ejemplo 8-2.

% Obtener la curva de magnetización. Este archivo contiene las
% tres variables if_value, ea_value y n_0.
load fig8_9.mat.
```

```
% Primero, inicializar los valores requeridos en el programa.
v_t = 250;                          % Voltaje en las terminales (V)
r_f = 50;                           % Resistencia de campo (ohms)
r_a = 0.06;                         % Resistencia en el inducido (ohms)
i_l = 10:10:300;                    % Corrientes de línea (A)
n_f = 1200;                         % Número de vueltas en campo
f_ar0 = 840;                        % Reacción del inducido a 200 A (A-t/m)

% Calcular la corriente en el inducido para cada carga.
i_a = i_1 - v_t / r_f;

% Ahora calcular el voltaje interno generado para
% cada corriente en el inducido.
e_a = v_t - i_a * r_a;

% Calcular la MMF de la reacción del inducido para cada
% corriente en el inducido.
f_ar = (i_a / 200) * f_ar0;

% Calcular la corriente de campo efectiva
i_f = v_t / r_f - f_ar / n_f;

% Calcular el voltaje interno generado resultante a
% 1 200 r/min por medio de la interpolación de la curva
% de magnetización del motor.
e_a0 = interp1(if_values,ea_values,i_f,'spline');

% Calcular la velocidad resultante con la ecuación (8-13).
n = ( e_a ./ e_a0 ) * n_0;

% Calcular el par inducido correspondiente a cada
% velocidad con las ecuaciones (7-55) y (7-56).
t_ind = e_a .* i_a ./ (n * 2 * pi / 60);

% Hacer la gráfica de la curva par-velocidad
plot(t_ind,n,'k-','LineWidth',2.0);
hold on;
xlabel('\bf\tau_{ind} (N-m)');
ylabel('\bf\itn_{m} (r/min)');
title ('\bfCaracterística par-velocidad de un motor cd en derivación')
axis ([ 0 600 1100 1300]);
grid on;
hold off;
```

En la figura 8-10 se muestra la característica par-velocidad resultante. Nótese que para cualquier carga, la velocidad de un motor con reacción en el inducido es mayor a la velocidad de un motor sin reacción en el inducido.

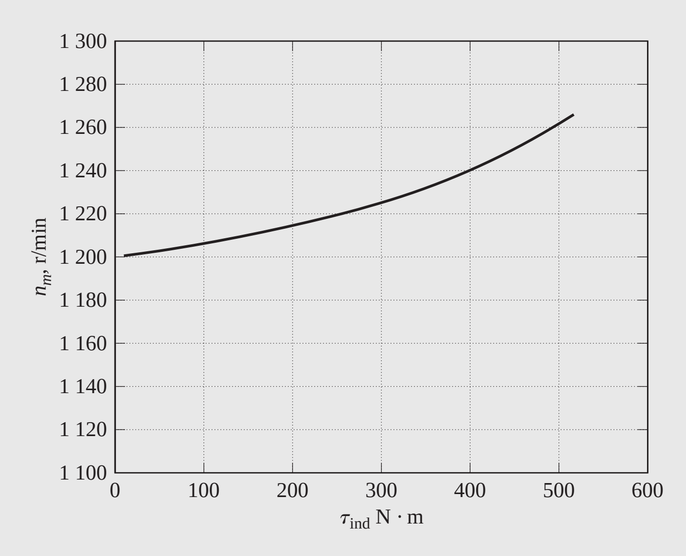


FIGURA 8-10 Característica par-velocidad del motor con reacción del inducido del ejemplo 8-2.

Control de velocidad en los motores de cd en derivación

¿Cómo se puede controlar la velocidad de un motor de cd en derivación? Para lograr este objetivo se utilizan dos métodos comunes y un método un poco menos usual. Los métodos comunes ya se describieron en el capítulo 1 en el tema de la máquina lineal simple y en el capítulo 7 en el tema de la espira simple giratoria. Estos dos métodos en que se controla la velocidad de una máquina de cd en derivación son

1. Ajustar la resistencia de campo R_F (y por lo tanto el flujo del campo).
2. Ajustar el voltaje en las terminales aplicado al inducido.

El método menos usual para controlar la velocidad es

3. Insertar un resistor en serie con el circuito del inducido (y con lo cual ajustar el voltaje en las terminales aplicado al inducido)

A continuación se describirá en detalle cada uno de estos métodos.

CAMBIO DE LA RESISTENCIA DE CAMPO Para entender lo que sucede cuando se cambia el resistor de campo de un motor de cd, suponga que se incrementa el resistor de campo y observe la respuesta. Si se incrementa la resistencia de campo, disminuye la corriente de campo ($I_F = V_T/R_F\uparrow$), y conforme disminuye la corriente de campo, también disminuye el flujo ϕ. Una disminución del flujo causa un decremento instantáneo del voltaje interno generado $E_A(= K\phi\downarrow\omega_m)$, que a su vez origina un gran incremento de la corriente del inducido de la máquina, puesto que

$$I_A\uparrow = \frac{V_T - E_A\downarrow}{R_A}$$

El par inducido en un motor está dado por $\tau_{\text{ind}} = K\phi I_A$. Puesto que el flujo ϕ en esta máquina disminuye cuando la corriente I_A aumenta, ¿hacia qué lado cambia el par inducido? La manera más fácil de contestar esta pregunta es por medio de un ejemplo. La figura 8-11 muestra un motor de cd en derivación con una resistencia interna de 0.25 Ω. Actualmente opera con un voltaje en las terminales de 250 V y un voltaje interno generado de 245 V. Por lo tanto, el flujo de corriente en el inducido es $I_A = (250\text{ V} - 245\text{ V})/0.25\ \Omega = 20\text{ A}$. ¿Qué sucede dentro del motor *si hay una disminución del flujo de 1%*? Si el flujo disminuye 1%, E_A debe disminuir en igual medida, puesto que $E_A = K\phi\omega_m$. Por lo tanto, E_A caerá a

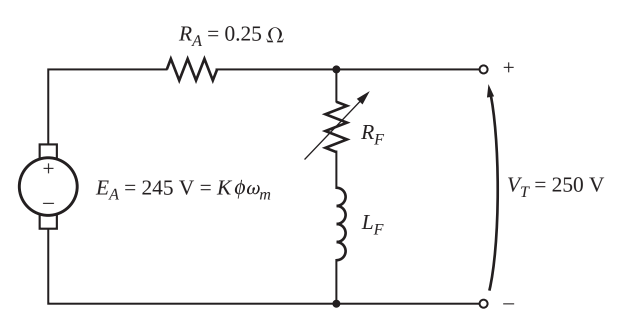


FIGURA 8-11 Motor de cd en derivación de 250 V con valores típicos de E_A y R_A.

$$E_{A2} = 0.99\ E_{A1} = 0.99(245\text{ V}) = 242.55\text{ V}$$

Entonces, la corriente en el inducido debe aumentar a

$$I_A = \frac{250\text{ V} - 242.55\text{ V}}{0.25\ \Omega} = 29.8\text{ A}$$

En consecuencia, una disminución de 1% del flujo produjo un incremento de 49% de la corriente en el inducido.

Regresando a la discusión original, el incremento de la corriente predomina sobre la disminución del flujo y el par inducido aumenta a:

$$\tau_{\text{ind}} = K\overset{\downarrow}{\phi}\overset{\Uparrow}{I_A}$$

Puesto que $\tau_{\text{ind}} > \tau_{\text{carga}}$, el motor se acelera.

Sin embargo, conforme el motor se acelera, aumenta el voltaje interno generado E_A, lo que provoca que I_A caiga. A medida que I_A cae, también cae el par inducido τ_{ind} y al final τ_{ind} una vez más es igual a τ_{carga} a una velocidad en estado estacionario más alta que la original.

Resumiendo el comportamiento causa y efecto involucrado en este método de control de velocidad:

1. Un incremento de R_F causa una disminución de I_F (= $V_T/R_F \uparrow$).
2. Una disminución de I_F disminuye ϕ.
3. Una disminución de ϕ disminuye E_A (= $K\phi \downarrow \omega_m$).
4. Una disminución de E_A aumenta I_A (= $V_T - E_A \downarrow)/R_A$.
5. Un aumento en I_A aumenta τ_{ind}(= $K\phi\downarrow I_A\Uparrow$) (y el cambio en I_A es más grande que el cambio del flujo).
6. Un aumento de τ_{ind} hace que $\tau_{ind} > \tau_{carga}$ y aumenta la velocidad ω_m.
7. Un aumento de ω_m causa otro aumento de $E_A = K\phi\omega_m\uparrow$.
8. Un aumento de E_A disminuye I_A.
9. Una disminución de I_A disminuye τ_{ind} hasta que $\tau_{ind} = \tau_{carga}$ a una velocidad ω_m más alta.

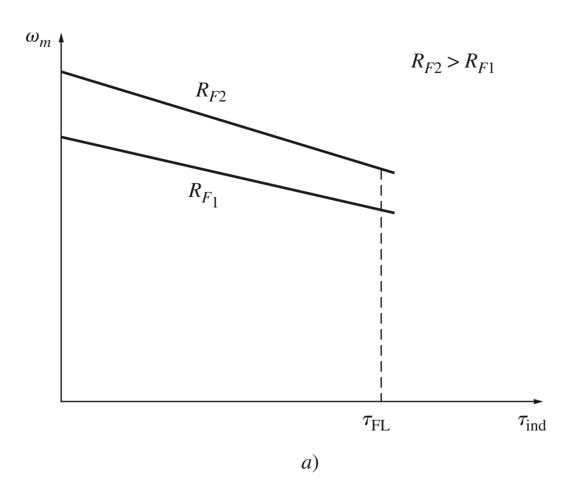
En la figura 8-12*a*) se muestra el efecto de aumentar la resistencia de campo en la característica de salida de un motor en derivación. Nótese que conforme disminuye el flujo en la máquina, se incrementa la velocidad en vacío del motor, mientras que la pendiente de la curva par-velocidad se vuelve más inclinada. Naturalmente, la disminución de R_F causaría un proceso inverso y caería la velocidad del motor.

ADVERTENCIA SOBRE EL CONTROL DE VELOCIDAD POR MEDIO DE LA RESISTENCIA DE CAMPO El efecto de incrementar la resistencia de campo en la característica de salida de un motor de cd en derivación se puede observar en la figura 8-12. Nótese que conforme disminuye el flujo en la máquina, se incrementa la velocidad en vacío del motor y la pendiente de la curva par-velocidad se vuelve más empinada. Esta forma es consecuencia de la ecuación (8-7), que describe la característica en las terminales del motor. En la ecuación (8-7) la velocidad en vacío es proporcional al inverso del flujo en el motor, mientras que la pendiente de la curva es proporcional al inverso del cuadrado del flujo. Por lo tanto, una disminución del flujo provoca que la pendiente de la curva par-velocidad sea más empinada.

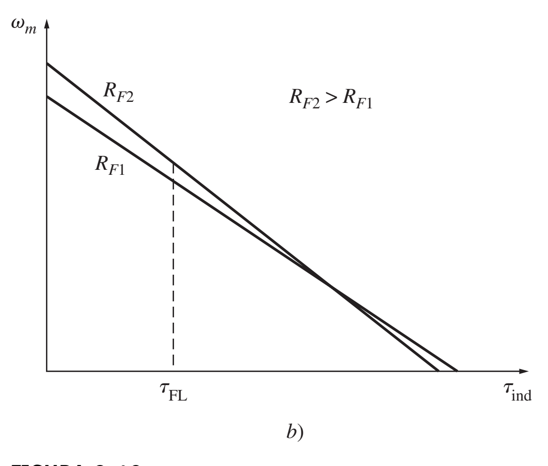
La figura 8-12*a*) muestra la característica en las terminales del motor dentro del intervalo desde condiciones en vacío hasta plena carga. Dentro de este intervalo, un incremento en la resistencia de campo incrementa la velocidad del motor, como se describió anteriormente en esta sección. Para los motores que operan entre condiciones de vacío y plena carga, se puede esperar que un incremento en R_F aumente la velocidad de operación.

Ahora examínese la figura 8-12*b*), que muestra la característica de las terminales del motor dentro del intervalo completo de condiciones desde vacío hasta plena carga. La figura hace aparente que a velocidades *muy bajas* un incremento en la resistencia de campo en realidad disminuye la velocidad del motor. Este efecto se presenta debido a que a velocidades muy bajas el incremento en la corriente del inducido causado por el decremento en E_A no es lo suficientemente grande como para compensar el decremento en el flujo en la ecuación de par inducido. Si el decremento del flujo en realidad es más grande que el incremento en la corriente del inducido, el par inducido disminuye y el motor pierde velocidad.

Algunos motores de cd pequeños que se utilizan como medios de control en realidad operan a velocidades cercanas a cero. En estos motores un incremento en la resistencia de campo puede no tener ningún efecto o incluso puede disminuir la velocidad del motor. Puesto que no se puede predecir el resultado, el control de velocidad por medio de resis-



a)



b)

FIGURA 8-12 Efecto del control de velocidad con resistencia de campo en la característica par-velocidad de un motor en derivación: *a*) en el rango normal de operación del motor; *b*) en todo el intervalo desde vacío hasta condiciones de rotor frenado.

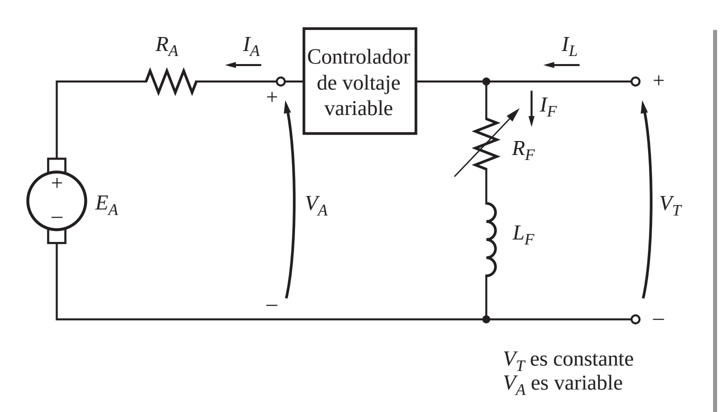


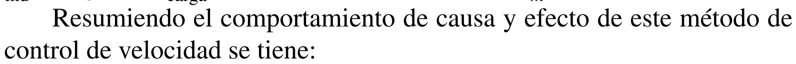
FIGURA 8-13 Control de voltaje del inducido de un motor de cd en derivación (o de excitación separada).

tencia de campo no se debe utilizar en este tipo de motores. En cambio, se debe usar el método de control de velocidad por medio del voltaje en el inducido.

CAMBIO DEL VOLTAJE EN EL INDUCIDO La segunda manera de controlar la velocidad involucra el cambio del voltaje aplicado al inducido del motor *sin cambiar el voltaje aplicado al campo*. Se requiere una conexión similar a la de la figura 8-13 para efectuar este tipo de control. En efecto, los motores deben ser *de excitación separada* para utilizar el control por medio del voltaje en el inducido.

Si se incrementa el voltaje V_A, entonces la corriente en el inducido del motor debe aumentar $[I_A = (V_A \uparrow - E_A)/R_A]$. Conforme aumenta I_A, el par inducido $\tau_{\text{ind}} = K\phi I_A \uparrow$ se incrementa, lo que hace que $\tau_{\text{ind}} > \tau_{\text{carga}}$ y que aumente la velocidad ω_m del motor.

Pero, conforme aumenta la velocidad ω_m, el voltaje interno generado $E_A(= K\phi\omega_m\uparrow)$ aumenta, lo que provoca que la corriente en el inducido disminuya. La disminución en I_A disminuye el par inducido y provoca que τ_{ind} sea igual a τ_{carga} a una velocidad de rotación ω_m más alta.



Resumiendo el comportamiento de causa y efecto de este método de control de velocidad se tiene:

1. Un incremento en V_A aumenta I_A $[= (V_A \uparrow - E_A)/R_A)$.
2. Un incremento en I_A aumenta τ_{ind} $(= K\phi\, I_A \uparrow)$.
3. Un incremento en τ_{ind} hace que $\tau_{\text{ind}} > \tau_{\text{carga}}$ y aumenta ω_m.
4. Un incremento en ω_m aumenta E_A $(= K\phi\omega_m\uparrow)$.
5. Un incremento en E_A disminuye I_A $[= (V_A \uparrow - E_A)/ R_A]$.
6. Una disminución en I_A disminuye τ_{ind} hasta que $\tau_{\text{ind}} = \tau_{\text{carga}}$ a una velocidad ω_m más alta.

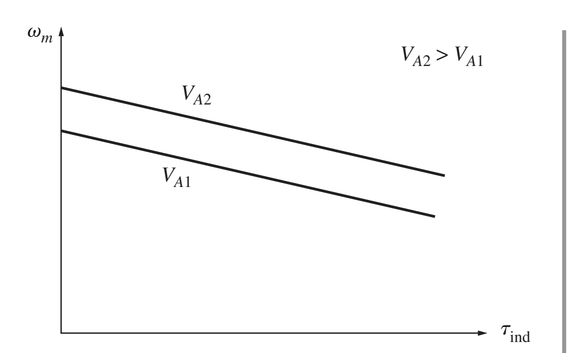


FIGURA 8-14 Efecto del control de velocidad de voltaje del inducido en la característica par-velocidad de un motor en derivación.

En la figura 8-14 se muestra el efecto de incrementar V_A en la característica par-velocidad de un motor de excitación separada. Nótese que la velocidad en vacío del motor se desplaza con este método de control de velocidad, pero la pendiente de la curva permanece constante.

INSERCIÓN DE UN RESISTOR EN SERIE CON EL CIRCUITO DEL INDUCIDO Si se inserta un resistor en serie con el circuito del inducido, el efecto es que la pendiente de la característica par-velocidad del motor se incrementa drásticamente y hace que opere en forma más lenta si está cargado (figura 8-15). Este hecho se puede observar con facilidad en la ecuación (8-7). La inserción de un resistor es un método de control de velocidad que causa mucho desperdicio, puesto que son muy grandes las pérdidas en el resistor insertado. Por esta razón casi no se utiliza. Se encuentra sólo en aplicaciones en las que el motor pasa casi todo el tiempo operando a plena velocidad o en aplicaciones demasiado baratas que no justifican otro método mejor de control de velocidad.

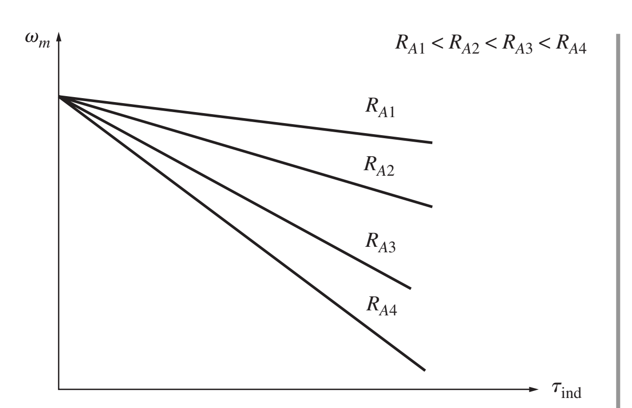


FIGURA 8-15 Efecto del control de velocidad de resistencia del inducido en la característica par-velocidad de un motor en derivación.

Los dos métodos más comunes de control de velocidad de motores en derivación (variación de la resistencia de campo y variación del voltaje en el inducido) tienen diferentes intervalos de operación seguros.

En el control por resistencia de campo, mientras más baja sea la corriente de campo en un motor de cd en derivación (o de excitación separada), más rápido girará; y mientras más alta sea la corriente de campo, más lento girará. Puesto que un incremento en la corriente de campo causa una disminución de la velocidad, siempre se puede lograr una velocidad mínima con el control de circuito de campo.

Esta velocidad mínima se presenta cuando a través del circuito de campo del motor fluye la corriente máxima permisible.

Si un motor opera en las terminales con un voltaje, potencia y corriente de campo nominales, entonces operará a velocidad nominal, también conocida como *velocidad base*. El control de resistencia de campo puede controlar la velocidad del motor en el caso de velocidades superiores a la velocidad base, pero no en el de velocidades por debajo de la velocidad base. Para lograr una velocidad menor a la velocidad base con un control de circuito de campo se requiere de una corriente de campo excesiva que probablemente queme los devanados de campo.

En el control de voltaje del inducido, mientras más bajo sea el voltaje del inducido en un motor de cd de excitación separada, más lento girará; y mientras más alto sea, más rápido girará. Puesto que un incremento del voltaje del inducido provoca un incremento de la velocidad, siempre se puede alcanzar una velocidad máxima con el control de voltaje del inducido. Esta velocidad máxima se presenta cuando el voltaje del inducido del motor alcanza su nivel máximo permisible.

Si el motor opera a un voltaje, corriente de campo y potencia nominales, girará a velocidad base. El control de voltaje del inducido puede controlar la velocidad del motor para velocidades inferiores a la velocidad base, pero no en el caso de velocidades superiores a la velocidad base. Para lograr una velocidad mayor a la velocidad base por medio del control de voltaje del inducido se requiere un voltaje del inducido excesivo que probablemente dañará el circuito del inducido.

Es obvio que estas dos técnicas de control de velocidad son complementarias. El control de voltaje del inducido funciona muy bien en el caso de velocidades por debajo de la velocidad base y el control de corriente de campo o de resistencia de campo funciona muy bien para velocidades superiores a la velocidad base. Si se combinan estas dos técnicas de control de velocidad en el mismo motor, se puede obtener un intervalo de variación de velocidad de hasta 40 a 1 o más. Los motores de cd en derivación o de excitación separada tienen características de control de velocidad excelentes.

Hay una diferencia significativa en los límites del par y de la potencia de las máquinas con estos dos tipos de control de velocidad. El factor limitante en ambos casos es el calentamiento de los conductores del inducido, que establece el límite superior de la magnitud de la corriente del inducido I_A.

Para el control de voltaje del inducido, *el flujo en el motor es constante*, por lo que el par máximo en el motor es

$$\tau_{\text{máx}} = K\phi I_{A,\,\text{máx}} \tag{8-14}$$

Este par máximo es constante sin que importe la velocidad de rotación del motor. Puesto que la potencia que sale del motor está dada por $P = \tau\omega$, la potencia máxima del motor a cualquier velocidad con el control de voltaje del inducido es de

$$P_{\text{máx}} = \tau_{\text{máx}}\omega_m \tag{8-15}$$

Entonces, *la potencia máxima que sale del motor es directamente proporcional a su velocidad de operación* con el control de voltaje del inducido.

Por otro lado, cuando se utiliza el control de resistencia de campo el flujo cambia. Con este tipo de control, la disminución del flujo en la máquina provoca un incremento de la velocidad. Para que no se exceda el límite de la corriente del inducido, el límite del par inducido debe disminuir a medida que se incrementa la velocidad del motor. Puesto que la potencia que sale del motor está dada por $P = \tau\omega$ y el límite del par disminuye conforme aumenta la velocidad del motor, *la potencia máxima que sale de un motor de cd con control por corriente de campo es constante*, mientras que *el par máximo varía con el inverso de la velocidad del motor*.

En la figura 8-16 se muestran estas limitaciones del par y la potencia del motor de cd para una operación segura en función de la velocidad.

Los siguientes ejemplos ilustran cómo se puede encontrar la nueva velocidad de un motor de cd si se modifica por medio de los métodos de control de resistencia de campo o voltaje del inducido.

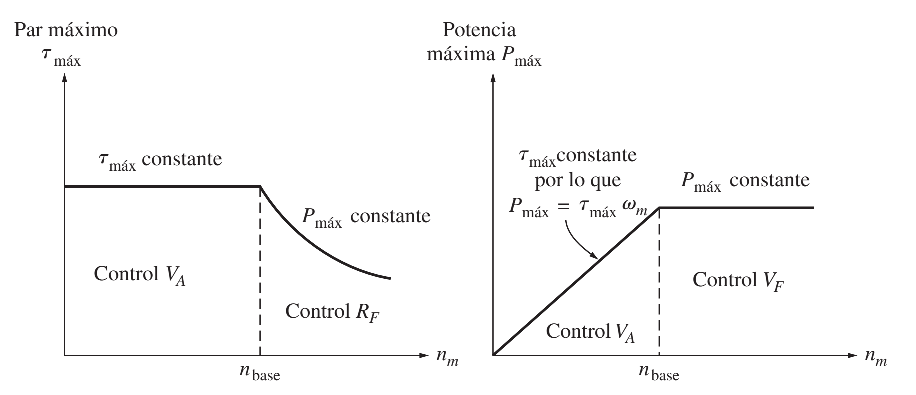


FIGURA 8-16 Límites del par y de la potencia en función de la velocidad de un motor en derivación con control de voltaje del inducido y de resistencia de campo.

EJEMPLO 8-3

La figura 8-17*a*) muestra un motor de cd en derivación de 100 hp, 250 V y 1 200 r/min con una resistencia del inducido de 0.03 Ω y una resistencia de campo de 41.67 Ω. El motor tiene devanados de compensación, por lo que se puede despreciar la reacción del inducido. Para solucionar este problema se pueden despreciar las pérdidas mecánicas y en el núcleo. Se supone que el motor tiene una carga con una corriente de línea de 126 A y una velocidad inicial de 1 103 r/min. Para simplificar el problema, suponga que la cantidad de corriente del inducido que utiliza el motor es constante.

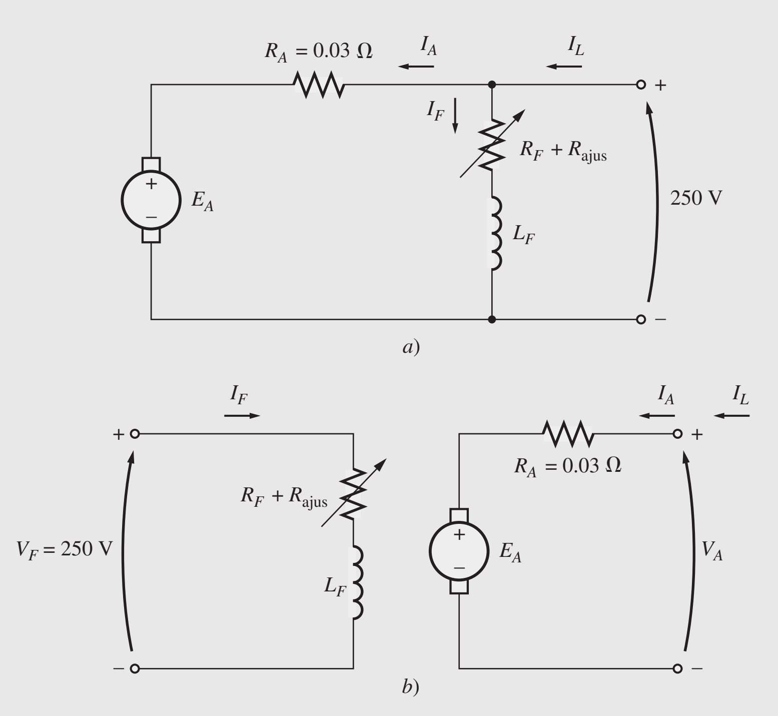


FIGURA 8-17 *a*) Motor en derivación del ejemplo 8-3. *b*) Motor de cd de excitación separada del ejemplo 8-4.

a) En la figura 8-9 se muestra la curva de magnetización de la máquina. ¿Cuál es la velocidad del motor si aumenta la resistencia de campo a 50 Ω?

b) Calcule y haga la gráfica de la velocidad de este motor en función de la resistencia de campo R_F suponiendo una carga con corriente constante.

Solución

a) El motor tiene una corriente de línea inicial de 126 A, por lo que la corriente inicial del inducido es de

$$I_{A1} = I_{L1} - I_{F1} = 126 \text{ A} - \frac{150 \text{ V}}{41.67\ \Omega} = 120 \text{ A}$$

Por lo tanto, el voltaje interno generado es de

$$\begin{aligned} E_{A1} &= V_T - I_{A1}R_A = 250 \text{ V} - (120 \text{ A})(0.03\ \Omega) \\ &= 246.4 \text{ V} \end{aligned}$$

Una vez que se incrementa la resistencia de campo a 50 Ω, la corriente de campo será

$$I_{F2} = \frac{V_T}{R_F} = \frac{250 \text{ V}}{50\ \Omega} = 5 \text{ A}$$

La relación entre el voltaje interno generado a una velocidad y el voltaje interno generado a otra velocidad está dado por la relación de la ecuación (7-41) de las dos velocidades:

$$\frac{E_{A2}}{E_{A1}} = \frac{K'\phi_2 n_{m2}}{K'\phi_1 n_{m1}} \tag{8-16}$$

Puesto que se supone que la corriente del inducido es constante, $E_{A1} = E_{A2}$, y esta ecuación se reduce a

$$1 = \frac{\phi_2 n_{m2}}{\phi_1 n_{m1}}$$

o

$$n_{m2} = \frac{\phi_1}{\phi_2} n_{m1} \tag{8-17}$$

Una curva de magnetización es una gráfica de E_A *versus* I_F para una velocidad dada. Puesto que los valores de E_A en la curva son directamente proporcionales al flujo, la relación de los voltajes internos generados que se lee en la curva es igual a la relación de los flujos dentro de la máquina. A $I_F = 5$ A, $E_{A0} = 250$ V, mientras que a $I_F = 6$ A, $E_{A0} = 268$ V. Por lo tanto, la relación de los flujos está dada por

$$\frac{\phi_1}{\phi_2} = \frac{268 \text{ V}}{250 \text{ V}} = 1.076$$

y la nueva velocidad del motor es de

$$n_{m2} = \frac{\phi_1}{\phi_2} n_{m1} = (1.076)(1\,103 \text{ r/min}) = 1\,187 \text{ r/min}$$

b) A continuación se muestra un archivo M de MATLAB que calcula la velocidad del motor en función de R_F.

```
% Archivo M: rf_speed_control.m
% Archivo M para crear una gráfica de la velocidad de un motor de cd
% en derivación en función de la resistencia de campo, suponiendo
% que la corriente del inducido es constante (ejemplo 8-3).

% Obtener la curva de magnetización. Este archivo contiene las
% tres variables if_value, ea_value y n_0.
load fig 8_9. mat

% Primero, inicializar los valores requeridos para el programa
v_t = 250;                          % Voltaje en las terminales (V)
r_f = 40:1:70;                      % Resistencia de campo (ohms)
r_a = 0.03;                         % Resistencia del inducido (ohms)
i_a = 120;                          % Corrientes del inducido (A)
```

```
% Este método consiste en calcular el e_a0 en la corriente
% de campo de referencia y luego calcular el e_a0 para cada
% corriente de campo. La velocidad de referencia es de 1103 r/min,
% por lo que si se conoce el e_a0 y la velocidad de referencia,
% se podrá calcular la velocidad con otras corrientes
% de campo.

% Calcular el voltaje interno generado a 1200 r/min
% para la corriente de campo de referencia (5 A) por medio
% de la interpolación de la curva de magnetización del motor.
% La velocidad de referencia que corresponde a esta corriente
% de campo es de 1103 r/min.
e_a0_ref = interp1(if_values,ea_values,5,'spline');
n_ref = 1103;

% Calcular la corriente de campo para cada valor de
% resistencia de campo.
i_f = v_t ./ r_f;

% Calcular el E_a0 para cada corriente de campo por medio de
% la interpolación de la curva de magnetización del motor.
e_a0 = interp1(if_values,ea_values,i_f,'spline');

% Calcular la velocidad resultante con la ecuación (8-17):
% n2 = (phi1 / phi2) * n1 = (e_a0_1 / e_a0_2 ) * n1
n2 = ( e_a0_ref ./ e_a0 ) * n_ref;

% Hacer la gráfica de la curva de la velocidad y r_f.
plot(r_f,n2,'k','LineWidth',2.0);
hold on;
xlabel('\bfField resistance, \Omega';
ylabel('\bf\itn_{m} \rm\bf(r/min)');
title ('\bfVelocidad y \itR_{F} \rm\bf de un motor de cd en
derivación');
axis([40 70 0 1400]);
grid on;
hold off;
```

En la figura 8-18 se muestra la gráfica resultante.

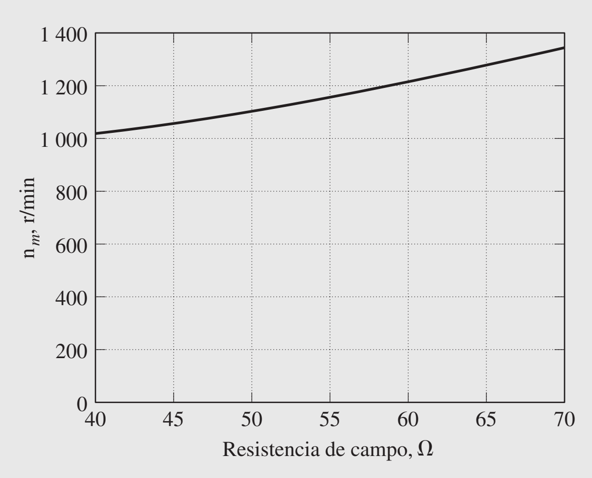


FIGURA 8-18 Gráfica de la velocidad *versus* a la resistencia de campo del motor de cd en derivación del ejemplo 8-3.

Nótese que la suposición de que la corriente del inducido es constante conforme varía R_F no es muy buena en el caso de cargas reales. La corriente en el inducido variará con la velocidad de forma dependiente en el par requerido por el tipo de carga del motor. Estas diferencias provocan que la curva de velocidad y R_F del motor sea un tanto diferente a la que se muestra en la figura 8-18, pero tendrá una forma similar.

EJEMPLO 8-4

El motor del ejemplo 8-3 ahora está conectado con excitación separada, como se ilustra en la figura 8-17*b*. El motor gira inicialmente con $V_A = 250$ V, $I_A = 120$ A y $n = 1\,103$ r/min, a la vez que suministra una carga de par constante. ¿Cuál será la velocidad del motor si se reduce V_A a 200 V?

Solución

El motor tiene una corriente de línea inicial de 120 A y un voltaje del inducido V_A de 250 V, por lo que el voltaje interno generado E_A es

$$E_A = V_T - I_A R_A = 250 \text{ V} - (120 \text{ A})(0.03\ \Omega) = 246.4 \text{ V}$$

Si se utiliza la ecuación (8-16) y se deduce que el flujo ϕ es constante, se puede expresar la velocidad del motor como

$$\frac{E_{A2}}{E_{A1}} = \frac{K'\phi_2 n_{m2}}{K'\phi_1 n_{m1}} \tag{8-16}$$

$$= \frac{n_{m2}}{n_{m1}}$$

$$n_{m2} = \frac{E_{A2}}{E_{A1}} n_{m1}$$

Para encontrar E_{A2} se utiliza la ley de voltaje de Kirchhoff:

$$E_{A2} = V_T - I_{A2} R_A$$

Puesto que el par, el flujo e I_A son constantes, resulta un voltaje de

$$E_{A2} = 200 \text{ V} - (120 \text{ A})(0.03\ \Omega) = 196.4 \text{ V}$$

Entonces, la velocidad final del motor es

$$n_{m2} = \frac{E_{A2}}{E_{A1}} n_{m1} = \frac{196.4 \text{ V}}{246.4 \text{ V}} 1\,103 \text{ r/min} = 879 \text{ r/min}$$

Efecto de campo abierto de un circuito

La sección anterior de este capítulo contiene una explicación sobre el control de la velocidad por medio de la variación de la resistencia de campo de un motor en derivación. Conforme aumenta la resistencia de campo, la velocidad del motor aumenta junto con ella. ¿Qué sucedería si este efecto se lleva al extremo, si se aumentara sustancialmente el resistor de campo? ¿Qué sucedería si el circuito de campo se abriera mientras el motor está en operación? Por lo dicho en la sección anterior, se sabe que el flujo en la máquina caería drásticamente hasta llegar a ϕ_{es} y E_A $(= K\phi\omega_m)$ caería junto con él. Esto provocaría un enorme incremento de la corriente del inducido y el par inducido resultante sería bastante más alto que el par de carga en el motor. Por lo tanto, la velocidad del motor aumentaría en forma constante.

Los resultados de un circuito de campo abierto pueden ser desastrosos. Cuando el autor estudiaba la universidad, su equipo de laboratorio cometió un error de este tipo. El equipo trabajaba con un pequeño conjunto de motor-generador controlado por un motor de cd en derivación de 3 hp. El motor estaba conectado y listo para arrancar, pero había *sólo* un pequeño error: cuando se conectó el circuito de campo, tenía un fusible de 0.3 A en lugar de el de 3 A que se debía utilizar.

Cuando el motor se puso en operación, funcionó con normalidad por cerca de 3 s y luego, repentinamente, se presentó un destello en el fusible. De inmediato, la velocidad del motor se disparó hacia arriba. En segundos, alguien apagó el interruptor principal, pero el tacómetro unido al motor marcaba 4 000 r/min. El motor tenía una velocidad nominal de 800 r/min.

No es necesario decir que la experiencia asustó a todos los presentes y les enseñó que se debe ser *extremadamente* cuidadoso en la protección del circuito de campo. En el arranque de un motor de cd y sus circuitos de protección, por lo regular se incluye un *relé de pérdida de campo* para desconectar el motor de la línea en caso de una pérdida de corriente de campo.

Se presenta un efecto similar en los motores de cd en derivación que operan con campos ligeros si los efectos de la reacción del inducido son lo suficientemente severos. Si la reacción del inducido en un motor de cd es severa, un aumento en su carga puede debilitar el flujo lo suficiente como para provocar que la velocidad del motor se incremente. Sin embargo, la mayoría de las cargas tiene curvas par-velocidad cuyos pares se *incrementan* con la velocidad, por lo que el aumento de velocidad del motor incrementa su carga, que a su vez eleva la reacción del inducido, lo que una vez más debilita su flujo. Este flujo debilitado provoca otro incremento de velocidad, lo que aumenta más la carga, etc., hasta que el motor se *desboca*. Esta condición se conoce como *embalamiento del motor*.

En motores que operan con severos cambios de carga y ciclos de trabajo pesados, el problema del debilitamiento del flujo se puede resolver instalando devanados de compensación. Desafortunadamente, los devanados de compensación son demasiado caros para que se utilicen en motores comunes y corrientes. La solución que se emplea para el problema de embalamiento en los motores menos costosos con ciclos de trabajo menos pesados es proporcionar una o dos vueltas de composición acumulativa en los polos del motor. A medida que se incrementa la carga, la fuerza magnetomotriz de las vueltas en serie se incrementa, lo que contrarresta la fuerza magnetomotriz desmagnetizadora de la reacción del inducido. Un motor en derivación equipado con tan sólo unas vueltas en serie se llama *motor en derivación estabilizado*.

8.5 MOTOR DE CD DE IMÁN PERMANENTE

Un *motor de cd de imán permanente* (MCDIP) es un motor de cd cuyos polos están hechos de imanes permanentes. Para ciertas aplicaciones, estos motores ofrecen varios beneficios en comparación con los motores de cd en derivación. Puesto que no requieren un circuito de campo externo, no sufren las pérdidas en el cobre del circuito de campo asociadas con los motores de cd en derivación. Debido a que no requieren devanados de compensación, pueden ser más pequeños que los correspondientes motores de cd en derivación. Por lo general, los motores MCDIP se pueden encontrar en tamaños hasta de 10 hp y, en años recientes, se han construido algunos motores hasta de 100 hp. Sin embargo, son especialmente comunes en tamaños más pequeños, de caballaje fraccional y subfraccional, donde no se puede justificar el costo y el espacio necesarios para un circuito de campo separado.

Por lo común, los motores MCDIP son menos costosos, más pequeños, más sencillos y con mayor eficiencia que los motores de cd correspondientes con campos electromagnéticos separados. Esto hace que sean una buena selección en muchas aplicaciones de motores de cd. Los inducidos de los motores MCDIP son esencialmente idénticos a los de los motores con circuitos de campos separados, de modo que sus costos también son similares. Sin embargo, la eliminación de electroimanes separados en el estator reduce el tamaño, el costo de éste y las pérdidas en los circuitos de campo.

Sin embargo, los MCDIP también tienen desventajas. Los imanes permanentes no pueden producir una densidad de flujo tan alta como la que suministra en forma externa un campo en derivación, por lo que un MCDIP tendrá un par inducido τ_{ind} menor por ampere de corriente del inducido I_A que un motor en derivación del mismo tamaño y misma construcción. Además, los MCDIP corren el riesgo de desmagnetizarse. Como se mencionó en el capítulo 7, la corriente del inducido I_A en una máquina de cd produce su propio campo magnético del inducido. La fuerza magnetomotriz del inducido se resta de la fmm de los polos en ciertas partes bajo las caras polares y se suma a la fmm de los polos en otras partes bajo las caras polares (véanse las figuras 8-23 y 8-25), lo cual reduce el flujo neto total en la máquina. Éste es el efecto del *inducido*. En una máquina MCDIP, el flujo polar es igual al flujo residual en los imanes permanentes. Si la corriente del inducido es muy grande, hay cierto riesgo de que la fmm del inducido desmagnetice los polos, y reduzca y reoriente de manera permanente el flujo residual que tienen. La desmagnetización también puede ser provocada por el calentamiento excesivo que se puede presentar durante periodos prologados de sobrecarga. Además, los materiales de MCDIP son físicamente más frágiles que la mayoría de los aceros normales, de

modo que los estatores construidos con ellos pueden estar limitados por los requerimientos físicos del par del motor.

La figura 8-19*a*) muestra la curva de magnetización de un material ferromagnético típico. Es una gráfica de la densidad del flujo **B** y la intensidad de magnetización **H** (o lo que es igual, una gráfica del flujo ϕ y la fmm $\mathcal{F}$). Cuando se aplica una fuerte fuerza magnetomotriz externa a este material y luego se retira, permanece un flujo residual $\mathbf{B}_{res}$ en el material. Para forzar a este flujo residual a ser cero, se debe aplicar una intensidad magnetizadora coercitiva $\mathbf{H}_C$ con una polaridad opuesta a la polaridad de la intensidad de magnetización **H** que estableció originalmente el campo magnético. Para las aplicaciones de máquinas normales, tales como rotores o estatores, se debe elegir un material ferromagnético que tenga los más pequeños $\mathbf{B}_{res}$ y $\mathbf{H}_C$ como sea posible, puesto que este tipo de material tendrá bajas pérdidas por histéresis.

Por otro lado, un buen material para los polos de un MCDIP debe tener *una densidad de flujo residual* $\mathbf{B}_{res}$ *tan grande como sea posible*, mientras que simultáneamente tiene *una intensidad de magnetización coercitiva* $\mathbf{H}_C$ *tan grande como sea posible*. En la figura 8-l9*b*) se ilustra la curva de magnetización de un material de este tipo. La $\mathbf{B}_{res}$ alta produce un gran flujo en la máquina, mien-

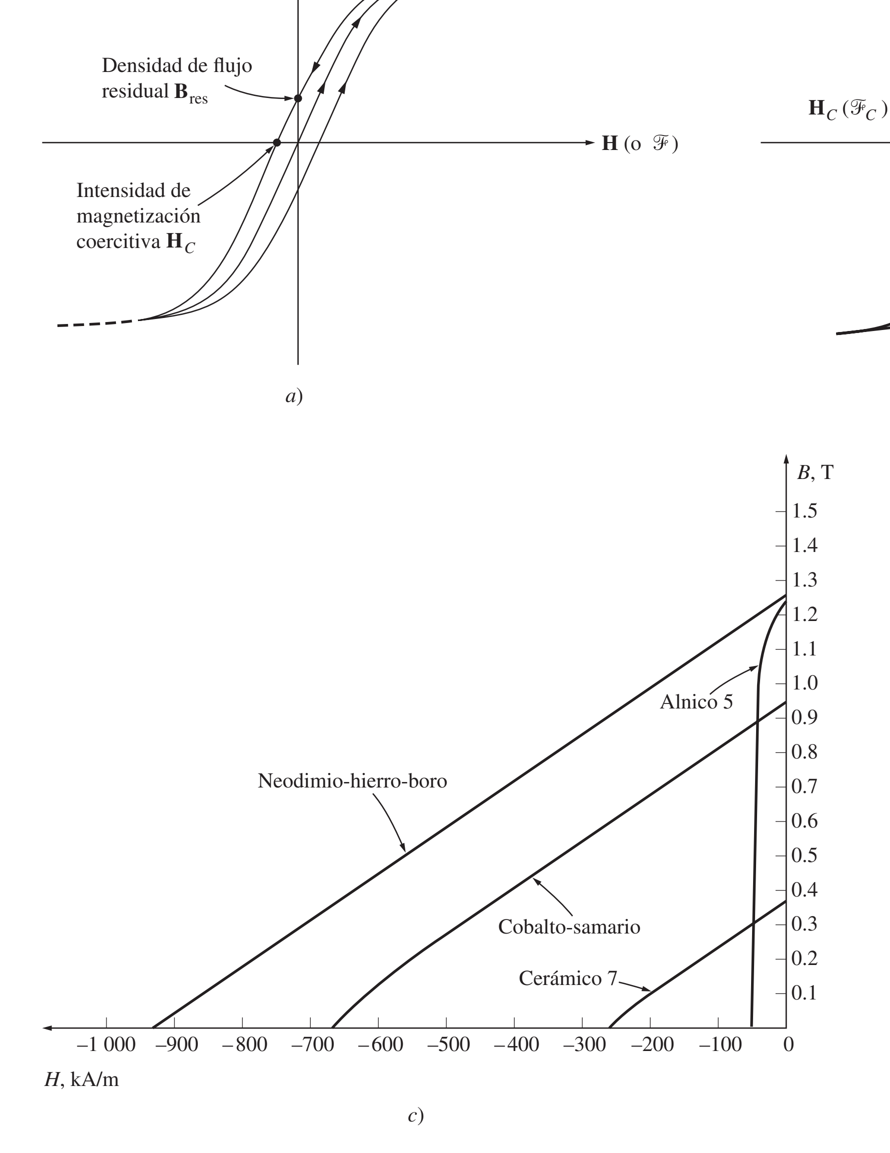


FIGURA 8-19 *a*) Curva de magnetización de un material ferromagnético típico. Nótese el lazo de histéresis. Una vez que se ha aplicado una intensidad de magnetización **H** alta al núcleo y luego se retira, queda una densidad de flujo residual $\mathbf{B}_{res}$ en el núcleo. Este flujo puede eliminarse si se aplica una intensidad de magnetización coercitiva $\mathbf{H}_C$ al núcleo con la polaridad opuesta. En este caso, un valor relativamente pequeño de ésta desmagnetizará el núcleo. *b*) Curva de magnetización de un material ferromagnético adecuado para utilizarlo en imanes permanentes. Nótese la alta densidad de flujo residual $\mathbf{B}_{res}$ y la relativamente grande intensidad de magnetización coercitiva $\mathbf{H}_C$. *c*) Segundo cuadrante de las curvas de magnetización de algunos de los materiales magnéticos típicos. Nótese que los imanes de tierras raras combinan tanto un alto flujo residual como una alta intensidad de magnetización coercitiva.

tras que un $\mathbf{H}_C$ grande significa que se requerirá una corriente muy grande para desmagnetizar los polos.

En los últimos 40 años se han desarrollado varios materiales magnéticos nuevos que tienen las características deseadas para fabricar imanes permanentes. Los principales tipos de materiales son los ceramicomagnéticos (ferrita) y los materiales magnéticos de tierras raras. La figura 8-19*c*) muestra el segundo cuadrante de las curvas de magnetización de algunos imanes cerámicos y de tierras raras típicos, en comparación con la curva de magnetización de una aleación ferromagnética (Alnico 5) convencional. Es obvio que los mejores imanes de tierras raras pueden producir el mismo flujo residual que las mejores aleaciones ferromagnéticas convencionales y simultáneamente ser en gran parte inmunes a los problemas de desmagnetización debidos a la reacción del inducido.

Un motor de cd de imán permanente es básicamente la misma máquina que un motor de cd en derivación, excepto en que *el flujo de un MCDIP es fijo*. Por lo tanto, no es posible controlar la velocidad de un motor MCDIP por medio de la variación de la corriente o flujo de campo. Los únicos métodos de control de velocidad disponibles para un MCDIP son el control de voltaje y el control de resistencia, ambos del inducido.

Las técnicas para analizar un motor MCDIP son básicamente las mismas que las que se utilizan para analizar un motor de cd en derivación con la corriente de campo constante.

Si se requiere más información sobre los MCDIP, véanse las referencias 4 y 10.

8.6 MOTOR DE CD EN SERIE

Un motor de cd en serie es aquel cuyos devanados de campo constan de relativamente pocas vueltas conectadas en serie con el circuito del inducido. En la figura 8-20 se muestra el circuito equivalente de un motor de cd en serie. En un motor de este tipo, la corriente del inducido, la corriente de campo y la corriente de línea son iguales. La ley de voltaje de Kirchhoff para esta clase de motor es

$$V_T = E_A + I_A(R_A + R_S) \quad \textbf{(8-18)}$$

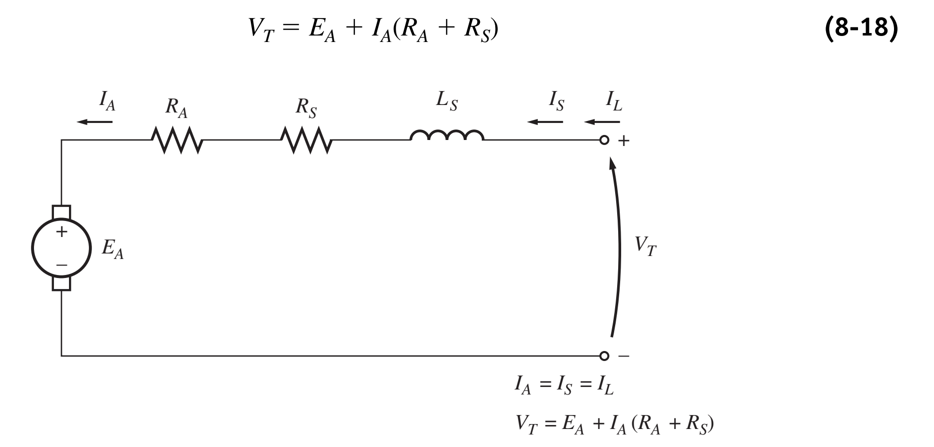


FIGURA 8-20 Circuito equivalente de un motor de cd en serie.

Par inducido en un motor de cd en serie

La característica de las terminales de un motor de cd en serie es muy diferente de la que ya se estudió del motor en derivación. El comportamiento básico de un motor de cd en serie se debe al hecho de que el *flujo es directamente proporcional a la corriente del inducido*, por lo menos hasta antes de llegar al punto de saturación. Conforme se incrementa la carga en el motor, también se incrementa su flujo. Como ya se describió, un incremento del flujo del motor causa una disminución de su velocidad. El resultado es que un motor en serie tiene una característica par-velocidad con una caída muy pronunciada.

El par inducido de esta máquina está dado por la ecuación (7-49):

$$\tau_{\text{ind}} = K\phi I_A \quad \textbf{(7-49)}$$

El flujo en esta máquina es directamente proporcional a la corriente del inducido (por lo menos hasta antes de que se sature el metal). Por lo tanto, el flujo en la máquina está dado por

$$\phi = cI_A \tag{8-19}$$

donde c es una constante de proporcionalidad. Entonces, el par inducido en esta máquina está dado por

$$\tau_{\text{ind}} = K\phi I_A = KcI_A^2 \tag{8-20}$$

En otras palabras, el par del motor es proporcional al cuadrado de la corriente del inducido. Como resultado de esta relación, está claro que un motor en serie proporciona más par por ampere que cualquier otro motor de cd. Por lo tanto, se utiliza en aplicaciones que requieren pares muy grandes. Por ejemplo, entre este tipo de aplicaciones se encuentran los motores de arranque de coches, de elevadores y de tracción en locomotoras.

Característica de las terminales de un motor de cd en serie

Para determinar la característica de las terminales de un motor de cd en serie, el análisis se basará en la suposición de que la curva de magnetización es lineal y luego se considerarán los efectos de la saturación mediante un análisis gráfico.

El supuesto de una curva de magnetización lineal implica que el flujo del motor estará dado por la ecuación (8-19):

$$\phi = cI_A \tag{8-19}$$

Esta ecuación se utilizará para deducir la curva característica par-velocidad del motor en serie.

La deducción de la característica par-velocidad de un motor en serie comienza con la ley de voltaje de Kirchhoff:

$$V_T = E_A + I_A(R_A + R_S) \tag{8-18}$$

De la ecuación (8-20) se sabe que la corriente del inducido se puede expresar como

$$I_A = \sqrt{\frac{\tau_{\text{ind}}}{Kc}}$$

También, $E_A = K\phi\omega_m$. Sustituyendo estas expresiones en la ecuación (8-18) se obtiene

$$V_T = K\phi\omega_m + \sqrt{\frac{\tau_{\text{ind}}}{Kc}}(R_A + R_S) \tag{8-21}$$

Si se puede eliminar el flujo de esta ecuación, se relacionará directamente el par de un motor con su velocidad. Para eliminar el flujo de la expresión, nótese que

$$I_A = \frac{\phi}{c}$$

y se puede escribir la ecuación del par inducido como

$$\tau_{\text{ind}} = \frac{K}{c}\phi^2$$

Por lo tanto, el flujo del motor se puede expresar como

$$\phi = \sqrt{\frac{c}{K}}\sqrt{\tau_{\text{ind}}} \tag{8-22}$$

Sustituyendo la ecuación (8-22) en la ecuación (8-21) y despejando la velocidad se obtiene

$$V_T = K\sqrt{\frac{c}{K}}\sqrt{\tau_{\text{ind}}}\,\omega_m + \sqrt{\frac{\tau_{\text{ind}}}{Kc}}\,(R_A + R_S)$$

$$\sqrt{Kc}\,\sqrt{\tau_{\text{ind}}}\,\omega_m = V_T - \frac{R_A + R_S}{\sqrt{Kc}}\sqrt{\tau_{\text{ind}}}$$

$$\omega_m = \frac{V_T}{\sqrt{Kc}\,\sqrt{\tau_{\text{ind}}}} - \frac{R_A + R_S}{Kc}$$

La relación par-velocidad resultante es

$$\omega_m = \frac{V_T}{\sqrt{Kc}}\frac{1}{\sqrt{\tau_{\text{ind}}}} - \frac{R_A + R_S}{Kc} \tag{8-23}$$

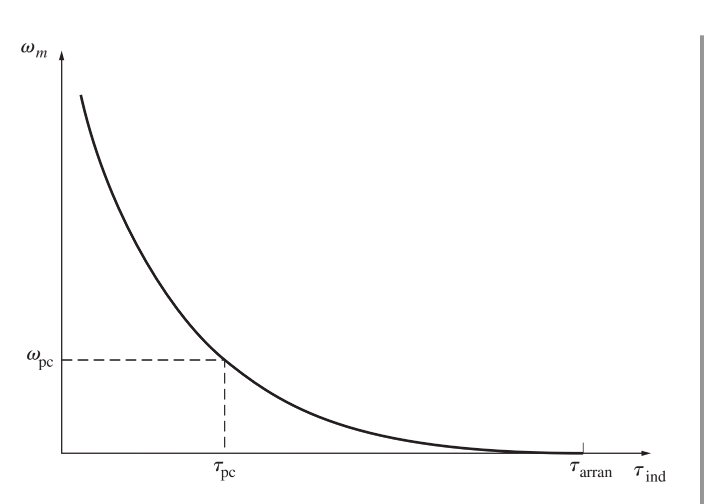


FIGURA 8-21 Característica par-velocidad de un motor de cd en serie.

Nótese que en el caso de un motor en serie no saturado, su velocidad varía con el inverso de la raíz cuadrada del par. Se trata de una relación muy poco común. En la figura 8-21 se muestra la gráfica de esta característica par-velocidad ideal.

En esta ecuación se puede observar inmediatamente una de las desventajas de los motores en serie. Cuando el par del motor llega a cero, su velocidad aumenta al infinito. En la práctica, el par nunca puede llegar a cero por las pérdidas mecánicas, en el núcleo y misceláneas que debe superar. Sin embargo, si no hay ninguna carga conectada al motor, puede girar lo suficientemente rápido como para dañarse. *Nunca* se debe descargar por completo un motor en serie y nunca se debe conectar a una carga por medio de una correa o banda o cualquier otro mecanismo que se pudiera romper. Si esto sucediera y el motor se encontrara de pronto operando sin carga, el resultado podría ser muy grave.

En el ejemplo 8-5 se ilustra el análisis no lineal de un motor de cd en serie tomando en cuenta los efectos de saturación magnética, pero despreciando la reacción del inducido.

EJEMPLO 8-5

La figura 8-20 muestra un motor de cd en serie de 250 V con devanados de compensación y una resistencia total en serie de $R_A + R_S$ de 0.08 Ω. El campo en serie consta de 25 vueltas por polo y tiene una curva de magnetización como la que se observa en la figura 8-22.

a) Encuentre la velocidad y par inducido del motor cuando la corriente del inducido es de 50 A.
b) Calcule y haga una gráfica de la característica par-velocidad del motor.

Solución

a) Para analizar el comportamiento de un motor en serie con saturación, se deben escoger puntos sobre la curva de operación y encontrar el par y velocidad de cada punto. Nótese que la curva de magnetización está dada en unidades de fuerza magnetomotriz (ampere-vueltas) y E_A para una velocidad de 1 200 r/min, por lo que los valores de E_A calculados deben compararse con los valores equivalentes a 1 200 r/min para determinar la velocidad real del motor.

Para $I_A = 50$ A,

$$E_A = V_T - I_A(R_A + R_S) = 250 \text{ V} - (50 \text{ A})(0.08\ \Omega) = 246 \text{ V}$$

Puesto que $I_A = I_F = 50$ A, la fuerza magnetomotriz es

$$\mathscr{F} = NI = (25 \text{ vueltas})(50 \text{ A}) = 1\,250 \text{ A} \bullet \text{vueltas}$$

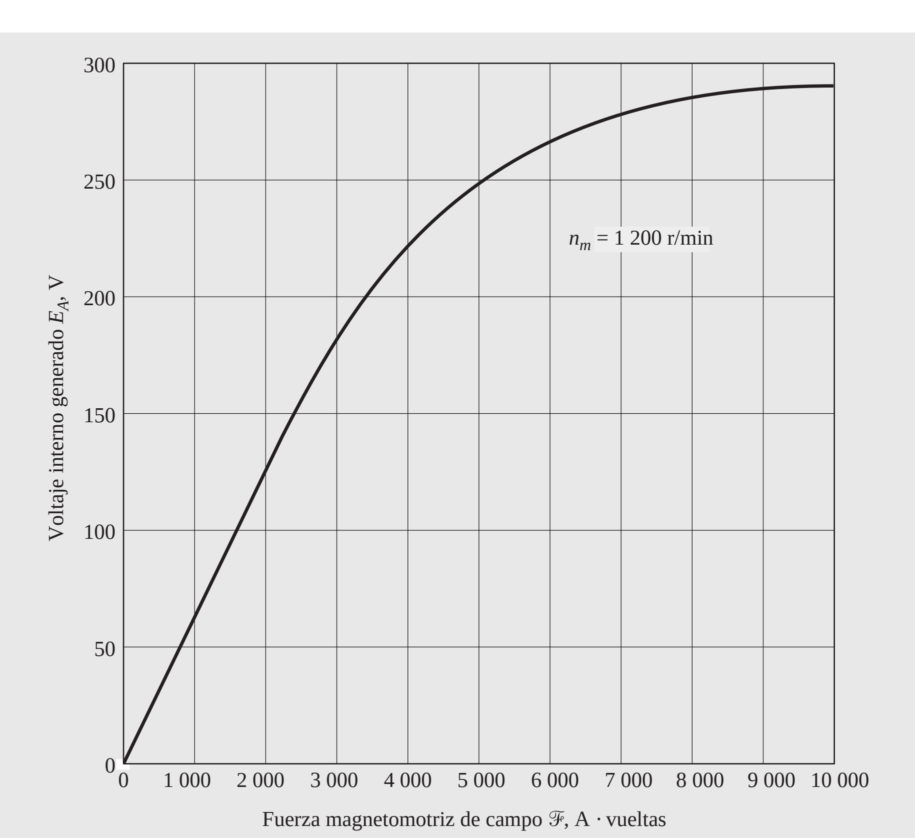


FIGURA 8-22 Curva de magnetización del motor del ejemplo 8-5. Esta curva se tomó a una velocidad n_m = 1 200 r/min.

De la curva de magnetización a $\mathscr{F}$ = 1 250 A • vueltas, E_{A0} = 80 V. Para obtener la velocidad correcta del motor, recuérdese que la ecuación (8-13) establece que,

$$n_m = \frac{E_A}{E_{A0}} n_0$$

$$= \frac{246 \text{ V}}{80 \text{ V}} 120 \text{ r/min} = 3\,690 \text{ r/min}$$

Para encontrar el par inducido suministrado al motor a esa velocidad, recuérdese que $P_{conv} = E_A I_A = \tau_{ind}\omega_m$. Por lo tanto,

$$\tau_{ind} = \frac{E_A I_A}{\omega_m}$$

$$= \frac{(246 \text{ V})(50 \text{ A})}{(3\,690 \text{ r/min})(1 \text{ min}/60 \text{ s})(2\pi \text{ rad/r})} = 31.8 \text{ N} \bullet \text{m}$$

b) Para calcular la característica par-velocidad completa, se deben repetir los pasos del inciso *a*) para muchos valores de corriente del inducido. A continuación se muestra un archivo M de MATLAB que calcula las características par-velocidad de un motor de cd en serie. Nótese que la curva de magnetización que se utiliza en este programa funciona en términos de fuerza magnetomotriz y no de corriente de campo efectiva.

```
% Archivo M: series_ts_curve.m
% El archivo M crea una gráfica de la curva par-velocidad del
% motor cd en serie con reacción del inducido del ejemplo
% 8-5.

% Obtener la curva de magnetización. Este archivo contiene las
% tres variables mmf_values, ea_values y n_0.
load fig8_22.mat
```

```
% Primero, inicializar los valores requeridos para el programa.
v_t=250;                       % Voltaje en las terminales (V)
r_a=0.08;                      % Resistencia del inducido + de campo (ohms)
i_a=10:10:300;                 % Corrientes del inducido (línea) (A)
n_s=25;                        % Número de vueltas en serie en el campo

% Calcular la MMF para cada carga
f = n_s * i_a;

% Calcular el voltaje interno generado e_a.
e_a = v_t - i_a * r_a;

% Calcular el voltaje interno generado resultante a
% 1 200 r/min por medio de la interpolación de la curva
% de magnetización del motor.
e_a0 = interp1(mmf_values,ea_values,f, 'spline'),

% Calcular la velocidad del motor con la ecuación (8-13).
n = (e_a ./ e_a0) * n_0;

% Calcular el par inducido correspondiente a cada velocidad
% con las ecuaciones (7-55) y (7-56).
t_ind = e_a .* i_a ./ (n * 2 * pi / 60);

% Hacer la gráfica de la curva par-velocidad
plot(t_ind,n,'Color','k', 'LineWidth',2.0);
hold on;
xlabel('\bf\tau_{ind} (N-m)’);
ylabel('\bf\itn_{m} \rm\bf(r/min)’);
title ('Característica par-velocidad de un motor de cd en serie');
axis([ 0 700 0 5000]);
grid on;
hold off;
```

En la figura 8-23 se muestra la característica par-velocidad resultante del motor. Nótese que se presenta un severo exceso de velocidad con pares muy pequeños.

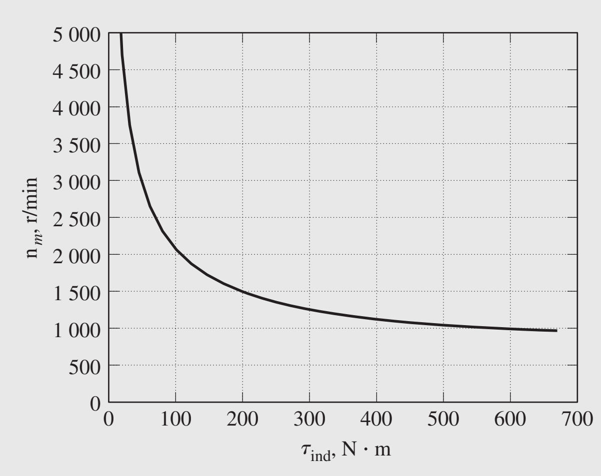


FIGURA 8-23 Característica par-velocidad del motor de cd en serie del ejemplo 8-5.

Control de velocidad en los motores de cd en serie

A diferencia del motor de cd en derivación, sólo hay una manera eficiente de cambiar la velocidad de un motor de cd en serie. Este método consiste en cambiar el voltaje en las terminales del motor. Si se incrementa el voltaje en las terminales, aumenta el primer término de la ecuación (8-23), lo cual provoca *una mayor velocidad con cualquier par.*

La velocidad de los motores de cd en serie también se puede controlar por medio de la inserción de un resistor en serie en el circuito del motor, pero esta técnica provoca un gran desperdicio de potencia y sólo se utiliza en periodos intermitentes durante el arranque de algunos motores.

Hasta hace más o menos 40 años no había una manera conveniente de cambiar V_T, por lo que la única forma de control de velocidad era el método de la resistencia en serie que causa un gran desperdicio. Esto ha cambiado con la introducción de circuitos de control en estado sólido.

8.7 MOTOR DE CD COMPUESTO

Un motor de cd compuesto incluye *tanto un campo en derivación como un campo en serie*. En la figura 8-24 se muestra un motor de este tipo. Los puntos que aparecen en las dos bobinas de campo tienen el mismo significado que los puntos en un transformador: *la corriente que fluye hacia un punto produce una fuerza magnetomotriz positiva*. Si la corriente fluye hacia los puntos en ambas bobinas de campo, las fuerzas magnetomotrices resultantes se suman para producir una fuerza magnetomotriz total más grande. Esta situación se conoce como *composición acumulativa*. Si la corriente fluye hacia el punto en una bobina de campo y hacia afuera del punto en la otra bobina de campo, la fuerza magnetomotriz resultante se resta. En la figura 8-24, los puntos redondos corresponden a la composición acumulativa del motor y los cuadrados a la composición diferencial.

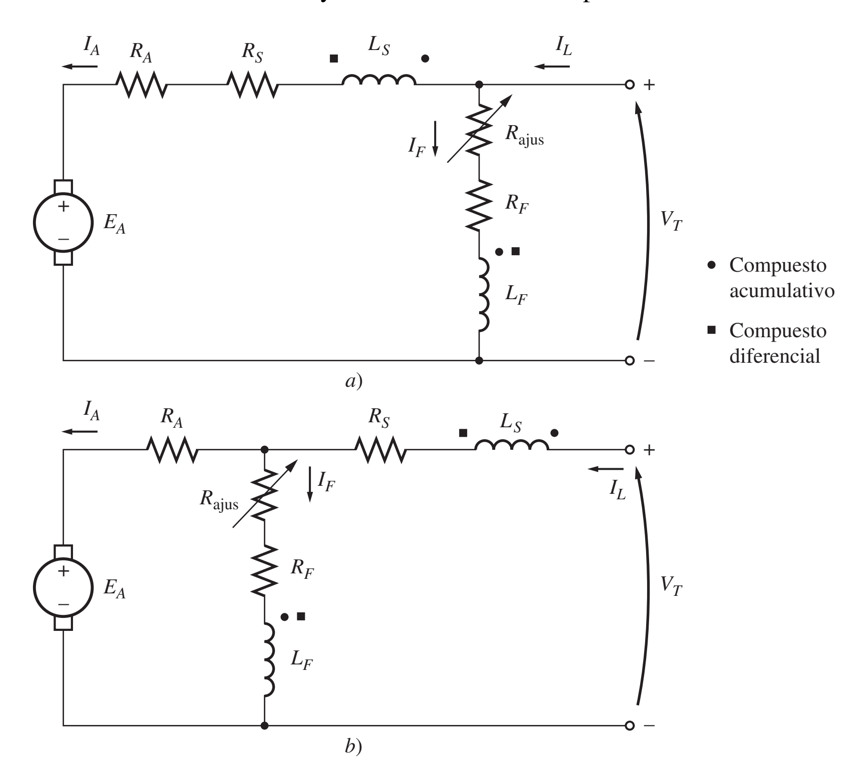


FIGURA 8-24 Circuito equivalente de los motores de cd compuestos: *a*) con conexión de derivación larga; *b*) con conexión de derivación corta.

La ley de voltaje de Kirchhoff de un motor de cd compuesto es

$$V_T = E_A + I_A(R_A + R_S) \tag{8-24}$$

Las corrientes en el motor compuesto están relacionados por

$$I_A = I_L - I_F \tag{8-25}$$

$$I_F = \frac{V_T}{R_F} \tag{8-26}$$

La fuerza magnetomotriz neta y la corriente de campo en derivación efectiva en el motor compuesto están dadas por

$$\mathscr{F}_{\text{net}} = \mathscr{F}_F \pm \mathscr{F}_{\text{SE}} - \mathscr{F}_{\text{RA}} \tag{8-27}$$

e

$$I_F^* = I_F \pm \frac{N_{SE}}{N_F} I_A - \frac{\mathscr{F}_{\text{RA}}}{N_F} \tag{8-28}$$

donde el signo positivo en la ecuación está asociado con un motor compuesto acumulativo, mientras que el signo negativo lo está con un motor compuesto diferencial.

Característica par-velocidad de un motor de cd compuesto acumulativo

En el motor de cd compuesto acumulativo hay un componente del flujo que es constante y otro que es proporcional a la corriente del inducido (y, por lo tanto, a su carga). Esto significa que el motor compuesto acumulativo tiene un par de arranque más alto que un motor en derivación (cuyo flujo es constante), pero un par de arranque menor que el de un motor en serie (cuyo flujo total es proporcional a la corriente del inducido).

En cierto sentido, el motor de cd compuesto acumulativo combina las mejores características tanto del motor en derivación como del motor en serie. Al igual que un motor en serie, tiene un par extra para el arranque; al igual que un motor en derivación, no se desboca en vacío.

Con cargas ligeras, el campo en serie tiene un efecto muy pequeño, por lo que el motor se comporta casi como un motor de cd en derivación. Conforme aumenta la carga, el flujo en serie es muy importante y la curva par-velocidad comienza a parecerse a la característica de un motor en serie. En la figura 8-25 se muestra la comparación de las características par-velocidad de cada uno de estos tipos de máquinas.

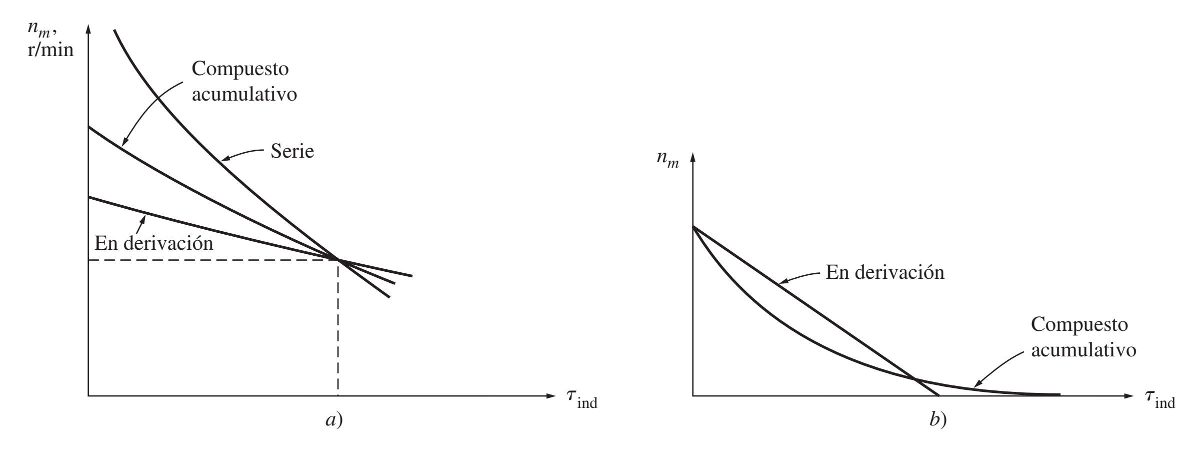


FIGURA 8-25 *a*) Característica par-velocidad de un motor de cd compuesto acumulativo en comparación con los motores en serie y en derivación con los mismos valores nominales a plena carga. *b*) Característica par-velocidad de un motor de cd compuesto acumulativo en comparación con un motor en derivación a la misma velocidad en vacío.

Para determinar la curva característica de un motor de cd compuesto acumulativo por medio del análisis no lineal, el método es similar al de los motores en serie y en derivación que se describieron antes. Este método se ilustrará en un ejemplo más adelante.

Característica par-velocidad de un motor de cd compuesto diferencial

En un motor de cd compuesto diferencial *la fuerza magnetomotriz en derivación y la fuerza magnetomotriz en serie se restan la una de la otra*. Esto significa que cuando la carga aumenta en el motor,

I_A se incrementa y el *flujo del motor disminuye*. Como el flujo disminuye, la velocidad del motor aumenta. Este aumento de velocidad provoca otro incremento en la carga el cual eleva más la I_A, disminuye más el flujo e incrementa de nuevo la velocidad. El resultado es que un motor compuesto diferencial no es estable y tiende a desbocarse. Esta inestabilidad es *mucho* peor que la de un motor en derivación con reacción del inducido. Es tan fuerte, que un motor compuesto diferencial es inadecuado para cualquier tipo de aplicación.

Para empeorar la situación, es imposible hacer arrancar un motor de este tipo. En condiciones de arranque, las corrientes del inducido y del campo en serie son muy altas. Puesto que el flujo en serie se resta del flujo en derivación, el campo en serie puede invertir la polaridad magnética de los polos de la máquina. Por lo regular, el motor permanece inmóvil o gira lentamente en la dirección contraria mientras se quema por la excesiva corriente del inducido. Para arrancar este tipo de motores el campo en serie debe estar en cortocircuito para que se comporte como un motor en derivación ordinario durante el periodo de arranque.

Debido a los problemas de inestabilidad de los motores de cd compuestos diferenciales casi nunca se utilizan de manera *intencional*. Sin embargo, se les puede utilizar con éxito si se invierte la dirección del flujo de potencia de un generador compuesto acumulativo. Por esta razón, si se utilizan generadores de cd compuestos acumulativos para suministrar potencia a un sistema, tendrán un circuito de disparo de potencia inversa para desconectarlos de la línea si se invierte el flujo de potencia. En ningún conjunto motor-generador en el que se espere que la potencia fluya en ambas direcciones se puede usar un motor compuesto diferencial y, por lo tanto, no puede utilizar un generador compuesto acumulativo.

En la figura 8-26 se muestra una típica característica de las terminales de un motor de cd compuesto diferencial.

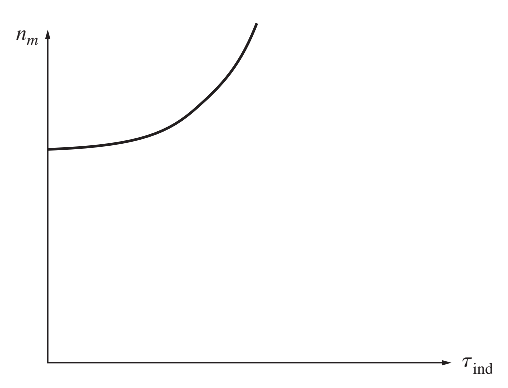


FIGURA 8-26 Característica par-velocidad de un motor de cd compuesto diferencial.

Análisis no lineal en motores de cd compuestos

En el ejemplo 8-6 se ilustra la determinación del par y la velocidad de un motor de cd compuesto.

EJEMPLO 8-6

Un motor de cd compuesto de 100 hp y 250 V con devanados de compensación cuenta con una resistencia interna, incluyendo el devanado en serie, de 0.04 Ω. Tiene 1 000 vueltas por polo en el devanado en derivación y tres vueltas por polo en el devanado en serie. Esta máquina se puede observar en la figura 8-27 y en la figura 8-9 se muestra su curva de magnetización. En vacío, el resistor de campo se ajusta para que el motor gire a 1 200 r/min. Se pueden despreciar las pérdidas en el núcleo, mecánicas y misceláneas.

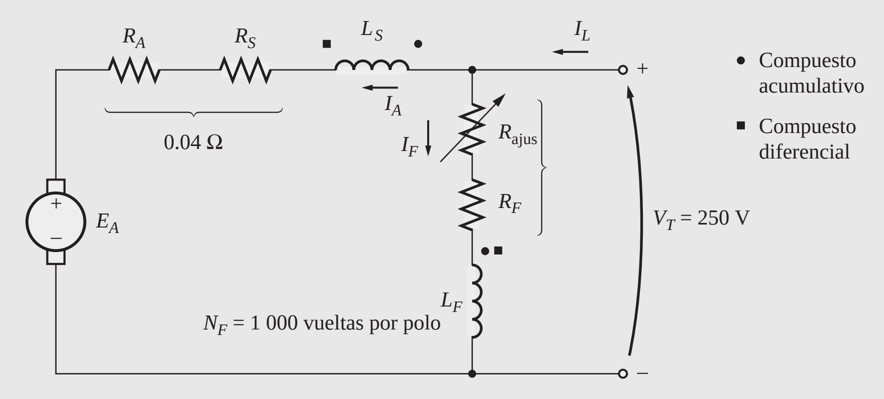


FIGURA 8-27 Motor de cd compuesto del ejemplo 8-6.

a) ¿Cuál es la corriente de campo en derivación de la máquina en vacío?
b) Si el motor está compuesto acumulativamente, encuentre su velocidad cuando $I_A = 200$ A.
c) Si el motor está compuesto diferencialmente, encuentre su velocidad cuando $I_A = 200$ A.

Solución

a) En vacío, la corriente del inducido es cero, por lo que el voltaje interno generado por el motor debe ser igual a V_T, lo que quiere decir que debe ser de 250 V. De la curva de magnetización se sabe que una corriente de campo de 5 A producirá un voltaje E_A de 250 V a 1 200 r/min. Por lo tanto, la corriente de campo en derivación debe ser 5 A.

b) Cuando fluye una corriente del inducido de 200 A en el motor, el voltaje interno generado por la máquina es

$$E_A = V_T - I_A(R_A + R_S)$$
$$= 250\text{ V} - (200\text{ A})(0.04\ \Omega) = 242\text{ V}$$

La corriente de campo efectiva de este motor compuesto acumulativo es

$$I_F^* = I_F + \frac{N_{SE}}{N_F} I_A - \frac{\mathscr{F}_{RA}}{N_F} \qquad \textbf{(8-28)}$$

$$= 5\text{ A} + \frac{3}{1\,000}200\text{ A} = 5.6\text{ A}$$

De la curva de magnetización se sabe que $E_{A0} = 262$ V a una velocidad $n_0 = 1\,200$ r/min. Por lo tanto, la velocidad del motor será

$$n_m = \frac{E_A}{E_{A0}} n_0$$
$$= \frac{242\text{ V}}{262\text{ V}} 1\,200\text{ r/min} = 1\,108\text{ r/min}$$

c) Si la máquina está compuesta diferencialmente, la corriente de campo efectiva es

$$I_F^* = I_F - \frac{N_{SE}}{N_F} I_A - \frac{\mathscr{F}_{RA}}{N_F} \qquad \textbf{(8-28)}$$

$$= 5\text{ A} - \frac{3}{1\,000}200\text{ A} = 4.4\text{ A}$$

De la curva de magnetización se sabe que $E_{A0} = 236$ V a una velocidad $n_0 = 1\,200$ r/min. Por lo tanto, la velocidad del motor será

$$n_m = \frac{E_A}{E_{A0}} n_0$$
$$= \frac{242\text{ V}}{236\text{ V}} 1\,200\text{ r/min} = 1\,230\text{ r/min}$$

Nótese que la velocidad del motor compuesto acumulativo disminuye con la carga, mientras que la velocidad del motor compuesto diferencialmente aumenta con la carga.

Control de velocidad en un motor de cd compuesto acumulativo

Las técnicas disponibles para controlar la velocidad de un motor de cd compuesto acumulativo son las mismas disponibles para un motor en derivación:

1. Cambio en la resistencia de campo R_F.
2. Cambio en el voltaje del inducido V_A.
3. Cambio en la resistencia del inducido R_A.

Los argumentos que describen los efectos de cambiar R_F o V_A son muy parecidos a los argumentos descritos con anterioridad para el caso del motor en derivación.

En teoría, se puede controlar al motor de cd compuesto diferencial de una forma similar. Puesto que casi nunca se utilizan los motores compuestos diferenciales, no tiene mucha importancia.

8.8 ARRANCADORES DE MOTORES DE CD

Para que un motor de cd funcione adecuadamente, debe tener incorporado algún equipo de control y protección especial. Los propósitos de este equipo son

1. Proteger al motor contra daños debidos a cortocircuitos en el equipo.
2. Proteger al motor contra daños por sobrecargas prolongadas.
3. Proteger al motor contra daños por corrientes de arranque excesivas.
4. Proporcionar una forma conveniente de controlar la velocidad de operación del motor (*pérdida de campo*).

Las primeras tres funciones se explicarán en esta sección y la cuarta en la sección 8.9.

Problemas en el arranque de motores de cd

Para que un motor de cd funcione adecuadamente, debe estar protegido contra daños físicos durante el periodo de arranque. En condiciones de arranque el motor no gira, de manera que $E_A = 0$ V. Puesto que la resistencia interna de un motor de cd normal es muy baja en comparación con su tamaño (3 a 6% en un motor mediano), fluye una corriente *muy* alta.

Considérese, por ejemplo, el motor de 50 hp y 250 V del ejemplo 8-1. Tiene una resistencia del inducido R_A de 0.06 Ω y una corriente a plena carga menor a 200 A, pero la corriente de arranque es

$$I_A = \frac{V_T - E_A}{R_A}$$

$$= \frac{250\text{ V} - 0\text{ V}}{0.06\ \Omega} = 4\,167\text{ A}$$

Esta corriente es 20 veces mayor a la corriente a plena carga nominal del motor. Es posible que un motor se dañe severamente por este exceso de corriente, incluso si sólo se presenta por un momento.

Una solución para el problema del exceso de corriente durante el arranque es la inserción de un *resistor de arranque* en serie con el inducido para limitar el flujo de corriente hasta que E_A se acumule y actúe como limitante. Este resistor no debe estar permanentemente en el circuito, puesto que provocaría pérdidas excesivas y que la característica par-velocidad del motor caería excesivamente con un aumento de la carga.

Por lo tanto, el resistor se debe insertar en el circuito del inducido para limitar el flujo de corriente en el arranque y luego se debe quitar conforme la velocidad del motor aumenta. En la práctica moderna los resistores de arranque están hechos de una serie de piezas, cada una de las cuales se quita sucesivamente del circuito del motor a medida que éste acelera para limitar la corriente en el motor a un valor seguro y a la vez no reducirla a un valor tan bajo que no se logre una rápida aceleración.

La figura 8-28 muestra un motor en derivación con un resistor de arranque extra que se puede eliminar del circuito por segmentos si se cierran los interruptores 1A, 2A y 3A. Se requiere realizar dos acciones para construir un arrancador de motor funcional. El primero es escoger el tamaño y número de segmentos del resistor necesarios para limitar la corriente de arranque a los valores deseados. El segundo es diseñar un circuito de control que cierre los interruptores de paso en el momento adecuado para eliminar del circuito ciertas partes del resistor.

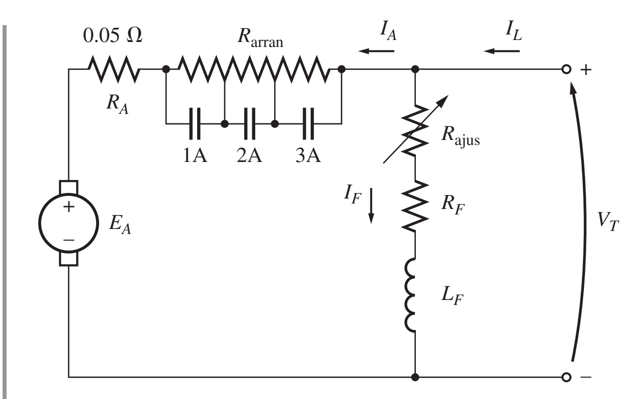


FIGURA 8-28 Motor en derivación con un resistor de arranque en serie con su inducido. Los contactos 1A, 2A, 3A producen cortocircuitos en secciones de la resistencia de arranque cuando se cierran.

Algunos de los antiguos arrancadores de motores de cd utilizaban un resistor de arranque continuo que una persona retiraba gradualmente del circuito mediante una palanca (figura 8-29). Este

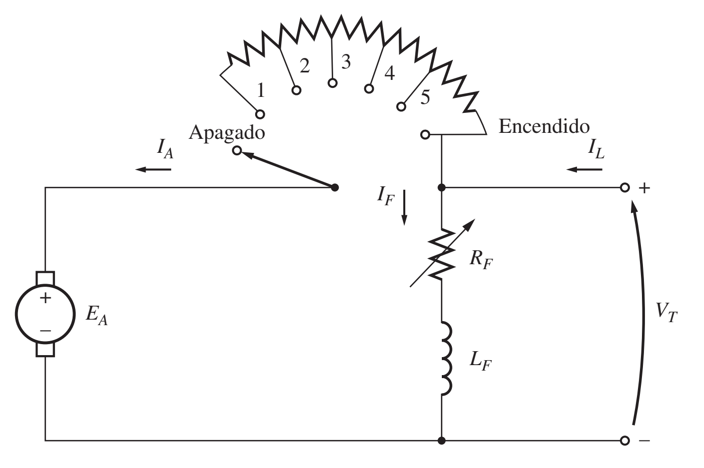


FIGURA 8-29 Arrancador manual de motor de cd.

tipo de arrancador presentaba varios problemas porque dependía en gran medida de que la persona que hacía arrancar el motor no moviera la palanca demasiado rápido o demasiado despacio. Si se retira la resistencia demasiado rápido (antes de que el motor acelere lo suficiente), el flujo de corriente resultante será demasiado grande. Por otro lado, si la resistencia se retira demasiado lento, se puede quemar el resistor de arranque. Puesto que dependían de una persona para su funcionamiento correcto, estos arrancadores estaban sujetos a sufrir problemas por errores humanos. Hoy han sido reemplazados casi por completo por circuitos de arranque automáticos.

El ejemplo 8-7 ilustra la selección del tamaño y número de segmentos del resistor que requiere un circuito de arranque automático. La pregunta del tiempo que se necesita para retirar los segmentos del resistor del circuito del inducido se examinará más adelante.

EJEMPLO 8-7

La figura 8-28 muestra un motor de cd en derivación con 100 hp, 250 V y 350 A con una resistencia del inducido de 0.05 Ω. Se desea diseñar un circuito de arranque para este motor que limite la corriente de arranque máxima al *doble* del valor nominal y que cierre secciones de la resistencia conforme la corriente del inducido llega a su valor nominal.

a) ¿Cuántos tramos de resistencia de arranque se requieren para limitar la corriente al intervalo especificado?

b) ¿Cuál debe ser el valor de cada segmento del resistor? ¿A qué voltaje se debe retirar cada tramo de la resistencia de arranque?

Solución

a) Se debe seleccionar al resistor de arranque de tal manera que el flujo de corriente sea el doble de la corriente nominal del motor cuando se conecta por primera vez a la línea. Conforme el motor acelere, se producirá un voltaje interno generado E_A en él. Puesto que el voltaje tiene dirección opuesta al voltaje en las terminales del motor, el incremento del voltaje interno generado disminuye el flujo de corriente del motor. Cuando la corriente que fluye del motor cae hasta su valor nominal, se debe retirar una sección del resistor de arranque para aumentar la corriente de arranque otra vez hasta 200% de la corriente nominal. Conforme aumenta la aceleración del motor, E_A sigue aumentando y la corriente en el inducido sigue en declive. Cuando la corriente que fluye en el motor baja una vez más a su valor nominal, se debe retirar otra sección del resistor de arranque. Este proceso se repite hasta que la resistencia de arranque por retirar sea menor que la resistencia del circuito del inducido del motor. En este punto, la resistencia del inducido del motor limitará por sí misma la corriente a un valor seguro.

¿Cuántos pasos se requieren para lograr la limitación de corriente? Para encontrar la respuesta a esta pregunta defínase R_{tot} como la resistencia original del circuito de arranque. Así que R_{tot} es la suma de la resistencia de cada tramo del resistor de arranque más la resistencia del circuito del inducido del motor.

$$R_{\text{tot}} = R_1 + R_2 + \cdots + R_A \tag{8-29}$$

Ahora defínase R_{tot} como la resistencia total que queda en el circuito de arranque una vez que se han retirado los tramos 1 a i. La resistencia que queda en el circuito una vez que se han retirado los tramos 1 a i es

$$R_{\text{tot},i} = R_{i+1} + \cdots + R_A \tag{8-30}$$

Nótese también que la resistencia de arranque inicial debe ser

$$R_{\text{tot}} = \frac{V_T}{I_{\text{máx}}}$$

En el primer tramo del circuito de arranque la resistencia R_1 se debe desconectar del circuito cuando la corriente I_A cae a

$$I_A = \frac{V_T - E_A}{R_{\text{tot}}} = I_{\text{mín}}$$

Una vez que se ha desconectado esa parte de la resistencia, la corriente en el inducido debe saltar a

$$I_A = \frac{V_T - E_A}{R_{\text{tot},1}} = I_{\text{máx}}$$

Puesto que E_A $(= K\phi\omega_m)$ es directamente proporcional a la velocidad del motor, la cual no puede cambiar instantáneamente, la cantidad $V_T - E_A$ debe ser constante en el momento en que se desconecta la resistencia. Por lo tanto,

$$I_{\text{mín}}R_{\text{tot}} = V_T - E_A = I_{\text{máx}}R_{\text{tot},1}$$

o la resistencia que queda en el circuito una vez que se desconecta el primer tramo es

$$R_{\text{tot},1} = \frac{I_{\text{mín}}}{I_{\text{máx}}} R_{\text{tot}} \tag{8-31}$$

Por extensión directa, la resistencia que queda en el circuito una vez que se ha desconectado el tramo n es

$$R_{\text{tot},n} = \left(\frac{I_{\text{mín}}}{I_{\text{máx}}}\right)^n R_{\text{tot}} \tag{8-32}$$

El proceso de arranque concluye cuando $R_{\text{tot},n}$ para la etapa n es menor o igual a la resistencia interna del inducido R_A del motor. En este punto, R_A puede limitar por sí misma la corriente al valor deseado. En el límite donde $R_A = R_{\text{tot},n}$

$$R_A = R_{\text{tot},n} = \left(\frac{I_{\text{mín}}}{I_{\text{máx}}}\right)^n R_{\text{tot}} \tag{8-33}$$

$$\frac{R_A}{R_{\text{tot}}} = \left(\frac{I_{\text{mín}}}{I_{\text{máx}}}\right)^n \tag{8-34}$$

Si se despeja n se tiene

$$n = \frac{\log (R_A/R_{\text{tot}})}{\log (I_{\text{mín}}/I_{\text{máx}})} \tag{8-35}$$

donde se debe redondear n al siguiente valor entero, puesto que no es posible tener un número fraccional de tramos de arranque. Si n tiene una parte fraccional, cuando se retire el tramo final de la resistencia de arranque, la corriente del inducido del motor saltará a un valor menor a $I_{\text{máx}}$.

En este problema en particular, la relación $I_{\text{mín}}/I_{\text{máx}} = 0.5$ y R_{tot} es

$$R_{\text{tot}} - \frac{V_T}{I_{\text{máx}}} = \frac{250\text{ V}}{700\text{ A}} = 0.357\ \Omega$$

por lo que

$$n = \frac{\log (R_A/R_{\text{tot}})}{\log (I_{\text{mín}}/I_{\text{máx}})} = \frac{\log (0.05\ \Omega/0.357\ \Omega)}{\log (350\text{ A}/700\text{ A})} = 2.84$$

El número de tramos requeridos será tres.

b) El circuito del inducido contiene el resistor del inducido R_A y tres resistores de arranque R_1, R_2 y R_3. En la figura 8-28 se muestra esta disposición.

En un principio, $E_A = 0$ V e $I_A = 700$ A por lo que

$$I_A = \frac{V_T}{R_A + R_1 + R_2 + R_3} = 700\text{ A}$$

Por lo tanto, la resistencia total debe ser

$$R_A + R_1 + R_2 + R_3 = \frac{250\text{ V}}{700\text{ A}} = 0.357\ \Omega \qquad \textbf{(8-36)}$$

Esta resistencia total se debe colocar en el circuito hasta que la corriente llegue a 350 A. Esto sucede cuando

$$E_A = V_T - I_A R_{\text{tot}} = 250\text{ V} - (350\text{ A})(0.357\ \Omega) = 125\text{ V}$$

Cuando $E_A = 125$ V, I_A llega a 350 A y es tiempo de retirar el primer resistor de arranque R_1. Cuando éste se retira, la corriente debe regresar a 700 A. Por lo tanto,

$$R_A + R_2 + R_3 = \frac{V_T - E_A}{I_{\text{máx}}} = \frac{250\text{ V} - 125\text{ V}}{700\text{ A}} = 0.1786\ \Omega \qquad \textbf{(8-37)}$$

Esta resistencia total estará en el circuito hasta que I_A llegue de nuevo a 350 A. Esto sucede cuando E_A llega a

$$E_A = V_T - I_A R_{\text{tot}} = 250\text{ V} - (350\text{ A})(0.1786\ \Omega) = 187.5\text{ V}$$

Cuando $E_A = 187.5$ V, I_A llega a 350 A y es tiempo de retirar el segundo resistor de arranque R_2. Cuando éste se retira, la corriente debe regresar a 700 A. Por lo tanto,

$$R_A + R_3 = \frac{V_T - E_A}{I_{\text{máx}}} = \frac{250\text{ V} - 187.5\text{ V}}{700\text{ A}} = 0.0893\ \Omega \qquad \textbf{(8-38)}$$

Esta resistencia total estará en el circuito hasta que I_A llegue una vez más a 350 A. Esto sucede cuando E_A llega a

$$E_A = V_T - I_A R_{\text{tot}} = 250\text{ V} - (350\text{ A})(0.0893\ \Omega) = 218.75\text{ V}$$

Cuando $E_A = 218.75$ V, I_A llega a 350 A y es tiempo de retirar el tercer resistor de arranque R_3. Cuando éste se retira, sólo queda la resistencia interna del motor. A partir de este momento, R_A sola debe limitar la corriente del motor a

$$I_A = \frac{V_T - E_A}{R_A} = \frac{250\text{ V} - 218.75\text{ V}}{0.05\ \Omega}$$
$$= 625\text{ A} \qquad \text{(menor que el máximo permitido)}$$

De ahora en adelante el motor puede acelerar por sí solo.

Con las ecuaciones (8-34) a (8-36) se pueden calcular los valores requeridos del resistor

$$R_3 = R_{\text{tot},3} - R_A = 0.0893\ \Omega - 0.05\ \Omega = 0.0393\ \Omega$$
$$R_2 = R_{\text{tot},2} - R_3 - R_A = 0.1786\ \Omega - 0.0393\ \Omega - 0.05\ \Omega = 0.0893\ \Omega$$
$$R_1 = R_{\text{tot},1} - R_2 - R_3 - R_A = 0.357\ \Omega - 0.1786\ \Omega - 0.0393\ \Omega - 0.05\ \Omega = 0.1786\ \Omega$$

Y se retiran R_1, R_2 y R_3 cuando E_A llega a 125, 187.5 y 218.75 V, respectivamente.

Circuitos de arranque de los motores de cd

Una vez que se han seleccionado las resistencias de arranque, ¿cómo se pueden controlar los interruptores de cortocircuito para asegurarse de que se cierren exactamente en el momento correcto? Se pueden usar varios esquemas diferentes para lograr esta conmutación y en esta sección se examinarán dos de los más comunes. Antes de analizar los esquemas es necesario presentar algunos de los componentes que se utilizan en los circuitos de arranque del motor.

La figura 8-30 ilustra algunos de los dispositivos que se emplean comúnmente en los circuitos de arranque de motores. Los dispositivos que se ven en la figura son fusibles, interruptores pulsadores, relés, relés de temporización y sobrecargas.

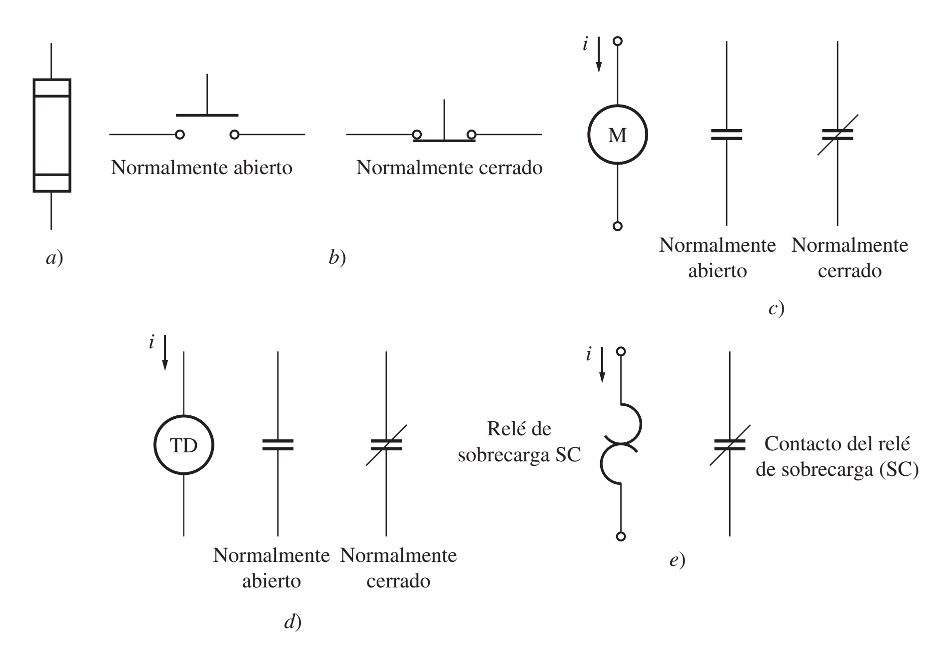


FIGURA 8-30 *a*) Fusible. *b*) Interruptores pulsadores normalmente cerrado y normalmente abierto. *c*) Bobina de relé y sus contactos. *d*) Relé de temporización y sus contactos. *e*) Relé de sobrecarga y sus contactos normalmente cerrados.

La figura 8-30*a*) muestra el símbolo del fusible. En un circuito de control de motor los fusibles sirven para proteger a éste contra el peligro de cortocircuitos. Éstos se ubican en las líneas de suministro de potencia que llegan al motor. Si un motor desarrolla un cortocircuito, los fusibles en la línea de suministro se quemarán y abrirán el circuito antes de que se pueda dañar el motor.

En la figura 8-30*b*) se pueden observar los interruptores de botón con resorte o pulsadores. Hay dos tipos básicos de ellos: normalmente abiertos y normalmente cerrados. Los interruptores *normalmente abiertos* están abiertos cuando el botón está en reposo y cerrados cuando se presiona el botón, mientras que los interruptores *normalmente cerrados* están cerrados cuando el botón está en reposo y abiertos cuando se presiona el botón.

En la figura 8-30*c*) se ilustra un relé. Consta de una bobina principal y un cierto número de interruptores. El símbolo de la bobina principal es un círculo y los interruptores se representan como líneas paralelas. Hay dos tipos de interruptores: normalmente abiertos y normalmente cerrados. Un interruptor *normalmente abierto* está abierto cuando el relé está desenergizado y un interruptor *normalmente cerrado* está cerrado cuando el relé está desenergizado. Cuando se aplica potencia eléctrica al relé (el relé está energizado), sus interruptores cambian de estado: los normalmente abiertos se cierran y los normalmente cerrados se abren.

En la figura 8-30*d*) se muestra un relé de temporización. Se comporta exactamente de la misma manera que un relé ordinario, excepto en que cuando se energiza pasa un periodo ajustable antes de que sus interruptores cambien de estado.

En la figura 8-30*e*) se ilustra un relé de sobrecarga. Consta de una bobina de calentamiento y cierto número de interruptores normalmente cerrados. La corriente que fluye en un motor pasa a través de las bobinas de calentamiento. Si la carga de un motor es demasiado alta, la corriente que fluye en el motor calentará las bobinas de calentamiento, que provocarán que los interruptores normalmente cerrados de la sobrecarga se abran. Estos interruptores pueden a su vez activar ciertos tipos de protección de circuitos del motor.

En la figura 8-31 se puede ver un circuito de arranque de motor común que utiliza los componentes descritos. En este circuito, una serie de relés de temporización cierran interruptores que retiran cada sección del resistor de arranque aproximadamente en el momento correcto una vez que se ha aplicado potencia al motor. Cuando se presiona el botón de arranque en este circuito, el circuito del inducido del motor se conecta a la fuente de potencia y la máquina arranca con todas las resistencias en el circuito. Sin embargo, el relé 1RT se energiza al mismo tiempo que el motor arranca, por

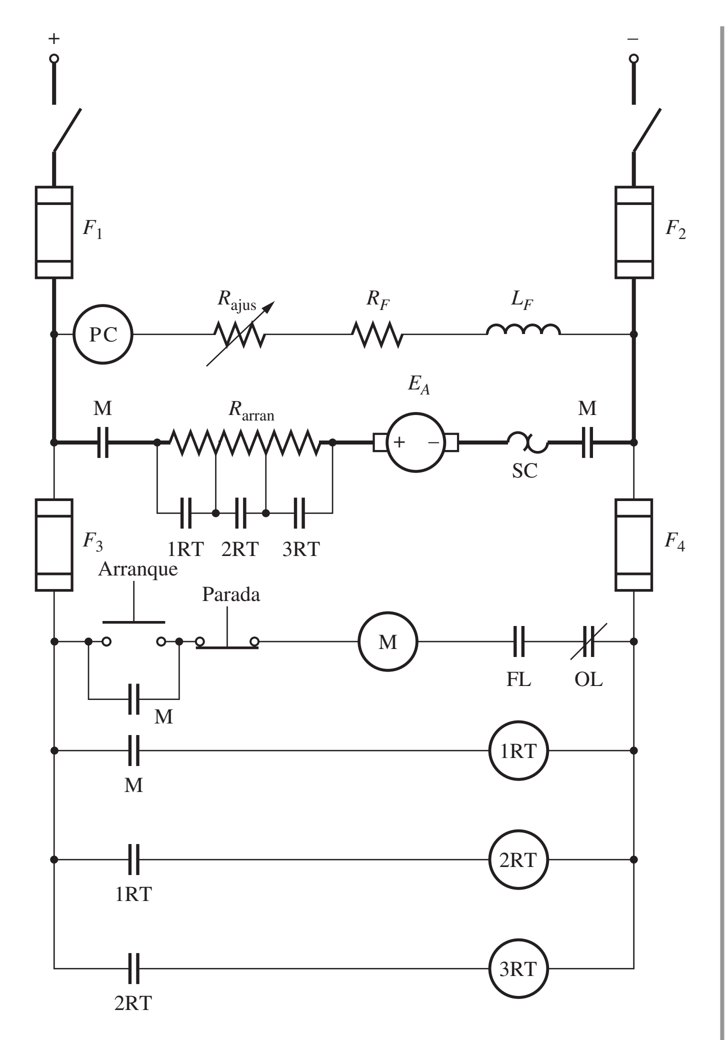


FIGURA 8-31 Circuito de arranque de un motor de cd que utiliza relés de temporización en atraso para eliminar el resistor de arranque.

lo que después de cierto tiempo se cerrarán los interruptores 1RT y se retirará parte de la resistencia de arranque del circuito. Simultáneamente se energiza el relé 2RT, por lo que después de otro periodo se cerrarán los interruptores 2RT y se retirará la segunda parte del resistor de tiempo. Cuando se cierran los interruptores 2RT, se energiza el relé 3RT, por lo que se repite el proceso y finalmente el motor opera a plena velocidad sin resistencia de arranque en el circuito. Si los periodos de espera se eligen en forma correcta, los resistores de arranque pueden retirarse en el momento adecuado para limitar la corriente del motor a su valor designado.

En la figura 8-32 se muestra otro tipo de arrancador de motor. En esta figura, una serie de relés miden el valor de E_A del motor y retiran la resistencia de arranque conforme E_A alcanza ciertos valores predeterminados. Este tipo de arrancador es mejor que el anterior puesto que si el motor tiene una carga muy grande y arranca más lento que lo normal, aun así se retira su resistencia del inducido cuando la corriente alcanza el valor apropiado.

Nótese que ambos circuitos de arranque tienen un relé en el circuito de campo llamado PC. Éste es un *relé de pérdida de campo*. Si se pierde la corriente de campo por cualquier razón, se desenergiza el relé de pérdida de campo, que a su vez desconecta la potencia del relé M. Cuando se desenergiza el relé M, sus contactos normalmente abiertos se abren y desconectan el motor de la fuente de potencia. Este relé evita que el motor se embale si se pierde la corriente de campo.

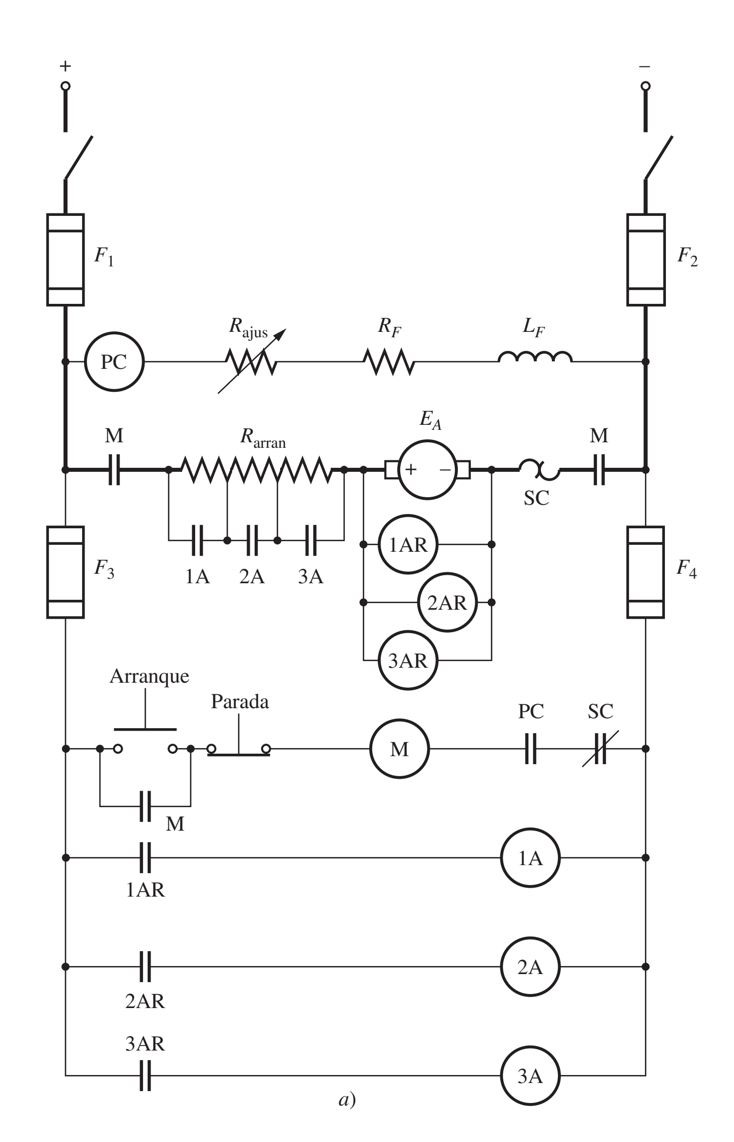
Nótese también que hay un relé de sobrecarga en cada circuito de arranque de motor. Si la potencia que se obtiene del motor es excesiva, estos relés se calentarán y abrirán los interruptores SC normalmente cerrados, y se apagará el relé M. Cuando se desenergiza el relé M, sus contactos normalmente abiertos se abren y desconectan el motor de la fuente de potencia, por lo que el motor está protegido contra algún daño provocado por cargas excesivas prolongadas.

8.9 EL SISTEMA WARD-LEONARD Y LOS CONTROLADORES DE VELOCIDAD EN ESTADO SÓLIDO

Se puede variar la velocidad de un motor de cd de excitación separada, en derivación o compuesto de tres maneras diferentes: cambiando la resistencia de campo, variando el voltaje del inducido o modificando la resistencia del inducido. De estos métodos, probablemente el más útil es el de control por voltaje del inducido, puesto que permite amplias variaciones de velocidad sin afectar el par máximo del motor.

Se ha desarrollado un cierto número de sistemas de control de motor a través de los años para sacar ventaja de los altos pares y de la velocidad variable disponibles con el control por voltaje del inducido de los motores de cd. Antes de que hubiera componentes electrónicos en estado sólido, era muy difícil producir un voltaje de cd variable. De hecho, la manera normal de variar el voltaje del inducido de un motor de cd era alimentado con su propio generador de cd independiente.

En la figura 8-33 se puede ver un sistema de control por voltaje del inducido de este tipo. Esta figura muestra un motor de ca que sirve como motor primario de un generador de cd, que a su vez se utiliza para alimentar un voltaje de cd a un motor de cd. Este tipo de máquina se llama *sistema Ward-Leonard* y es extremadamente versátil.



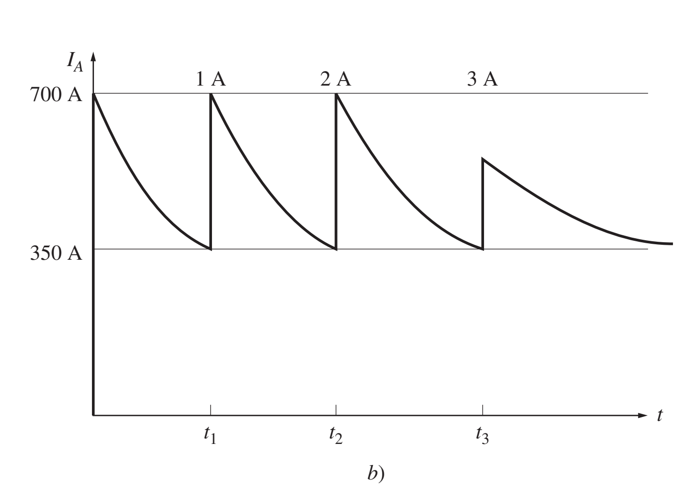


FIGURA 8-32 *a*) Circuito de arranque de un motor de cd que utiliza relés sensores de contratensión para eliminar el resistor de arranque. *b*) Corriente del inducido en un motor de cd durante el arranque.

En un sistema de control de motor de este tipo, el voltaje en el inducido del motor se puede controlar por medio de la variación de la corriente de campo del generador de cd. El voltaje del inducido permite que la velocidad del motor varíe suavemente entre un valor muy pequeño y la velocidad base. La velocidad del motor se puede ajustar a un valor por arriba de la velocidad base al reducir la corriente de campo del motor. Con un arreglo tan flexible se puede lograr el control de velocidad total de un motor.

Además, si se invierte la corriente de campo, también se invertirá la polaridad del voltaje del inducido del generador. Esto invertirá la dirección de rotación del motor. Por lo tanto, es posible obtener un amplio intervalo de variación de la velocidad *en cualquier dirección de rotación* con un sistema de control de motor de cd Ward-Leonard.

Otra ventaja del sistema Ward-Leonard es que puede "regenerar" o regresar la energía de movimiento de la máquina a las líneas de suministro. Si se utiliza el motor de cd de un sistema Ward-Leonard para subir una carga pesada y luego bajarla, cuando la carga desciende el motor de cd actúa como generador y suministra potencia de regreso al sistema de potencia. De esta manera se puede recuperar mucha de la energía que se requiere para levantar la carga en primera instancia, lo cual reduce los costos de operación generales de la máquina.

En la figura 8-34 se muestran los posibles métodos de operación de la máquina de cd en el diagrama par-velocidad. Cuando el motor gira en su dirección normal y suministra un par en la dirección de rotación, opera en el primer cuadrante de la figura. Si se invierte la corriente de campo del generador, se invertirá el voltaje de las terminales del generador que a su vez invertirá el vol-

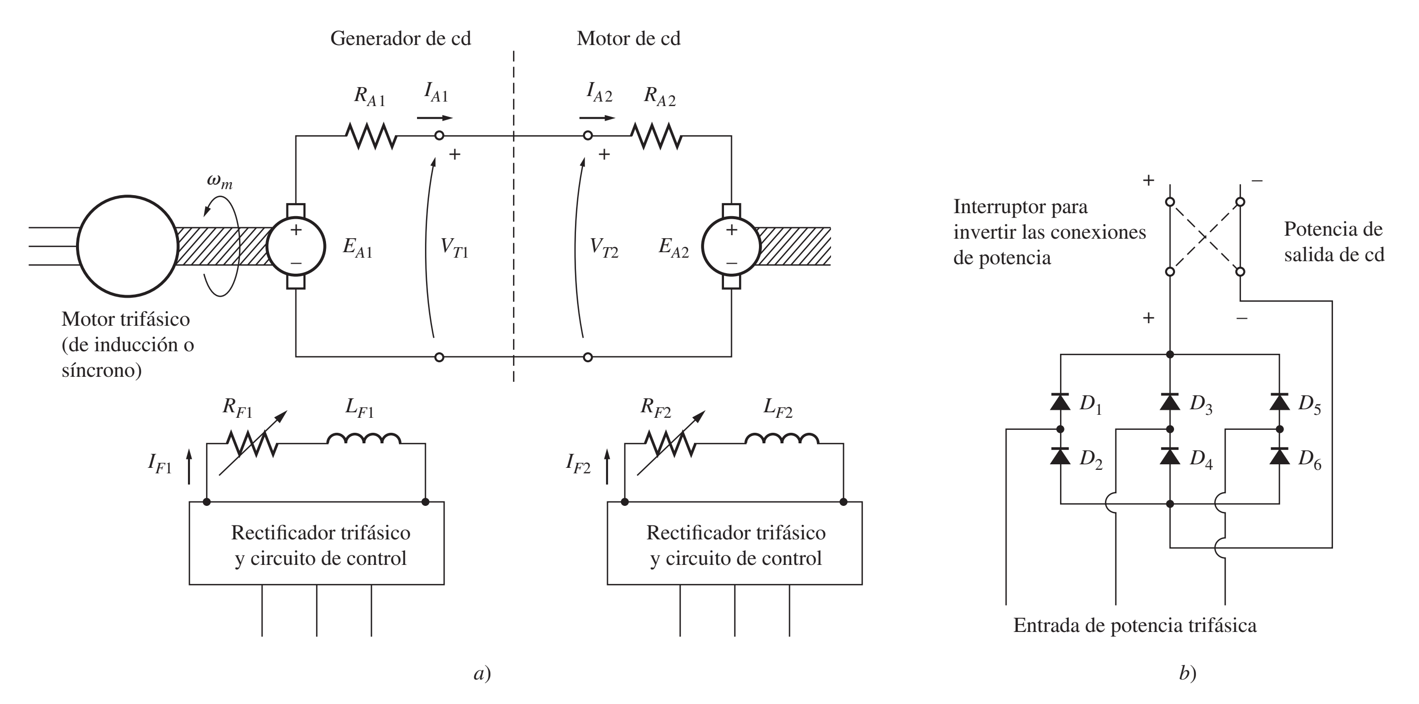


FIGURA 8-33 *a*) Sistema Ward-Leonard para controlar la velocidad de un motor de cd. *b*) Circuito para producir corriente de campo en un generador de cd y un motor de cd.

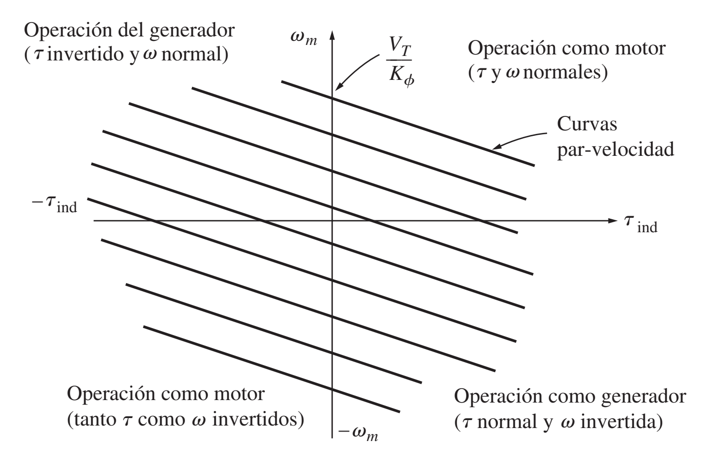


FIGURA 8-34 Intervalo de operación de un sistema de control de motor Ward-Leonard. El motor puede operar como motor en dirección hacia adelante (cuadrante 1) o hacia atrás (cuadrante 3) y también puede regenerar en los cuadrantes 2 y 4.

taje del inducido del motor. Cuando se invierte el voltaje del inducido y no se cambia la corriente de campo del motor, se invierten tanto el par como la velocidad del motor y la máquina opera como motor en el tercer cuadrante del diagrama. Si sólo se invierte el par o la velocidad del motor y la otra cantidad no se altera, la máquina funciona como generador y regresa potencia al sistema de potencia de cd. Puesto que el sistema Ward-Leonard permite la rotación y regeneración en cualquier sentido, se llama *sistema de control de cuatro cuadrantes*.

Las desventajas de un sistema Ward-Leonard son obvias. Una es que el usuario se ve forzado a comprar *tres* máquinas completas con los mismos valores nominales, lo que es bastante caro. Otra es que las tres máquinas serán mucho menos eficientes que una. Debido a su precio y a su eficiencia relativamente baja, el sistema Ward-Leonard ha sido reemplazado en las aplicaciones nuevas por circuitos controladores basados en SCR.

En la figura 8-35 se muestra un circuito controlador de voltaje del inducido de cd sencillo. El voltaje promedio que se aplica al inducido del motor, y por lo tanto la velocidad promedio del motor, dependen de la fracción de tiempo en que se aplica el voltaje que se proporciona al inducido. A su vez, esto depende de la fase relativa en la que se encienden los SCR en el circuito rectificador. Este circuito en particular sólo es capaz de suministrar voltaje al inducido con una sola polaridad, por lo que sólo se puede invertir la dirección del motor por medio de la conmutación de polaridad de su conexión de campo. Nótese que no es posible que la corriente del inducido fluya hacia afuera del terminal positivo del motor, puesto que la corriente no puede fluir de regreso a través de un SCR. Por lo tanto, este motor *no puede* regenerar y cualquier energía que se le suministre no se puede recuperar. Este tipo de circuito de control es un controlador de dos cuadrantes, como el que se muestra en la figura 8-35*b*).

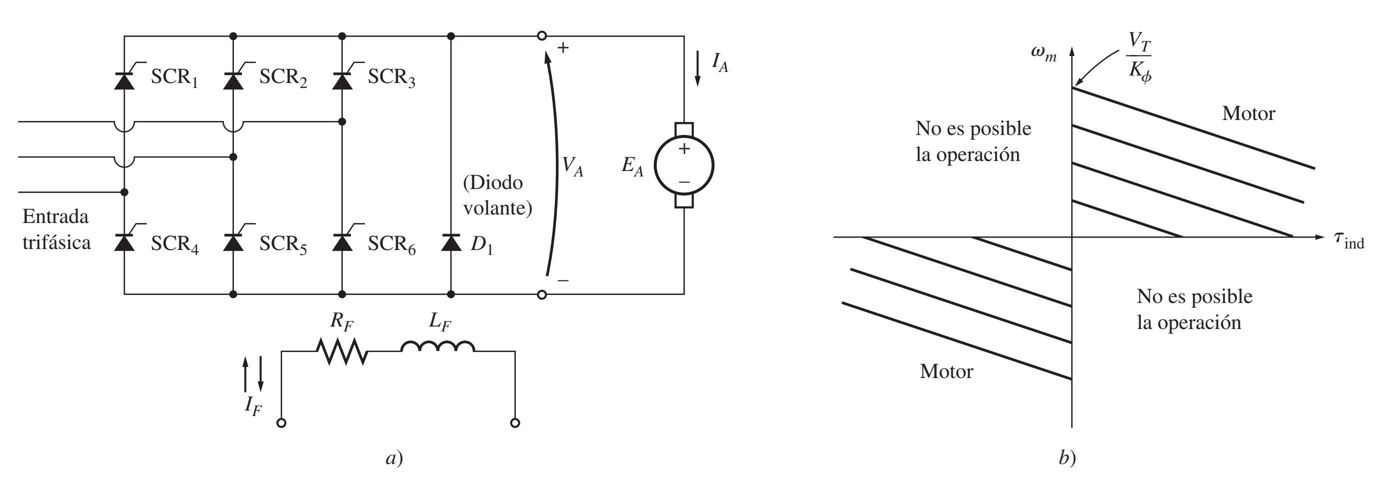


FIGURA 8-35 *a*) Controlador de motor de cd en estado sólido de dos cuadrantes. Puesto que la corriente no puede fluir hacia afuera de las terminales positivos del inducido, este motor no puede funcionar como generador, es decir, no regresa potencia al sistema. *b*) Posibles cuadrantes de operación de este controlador de motor.

En la figura 8-36 se puede observar un circuito más avanzado capaz de suministrar voltaje al inducido con cualquier polaridad. Este circuito de control de voltaje del inducido permite un flujo de corriente hacia afuera de las terminales positivos del generador, por lo que un motor con este tipo de controlador sí puede regenerar. Si también es posible cambiar la polaridad del circuito de campo del motor, entonces el circuito en estado sólido es un controlador completo de cuatro cuadrantes como el sistema Ward-Leonard.

Un controlador de dos cuadrantes o completo de cuatro cuadrantes con SCR es más barato que las dos máquinas completas que requiere el sistema Ward-Leonard, por lo que los sistemas de control de velocidad en estado sólido lo han desplazado casi por entero en las aplicaciones nuevas.

En la figura 8-37 se muestra el típico accionador de motor de cd en derivación de dos cuadrantes con control de velocidad de voltaje del inducido, mientras que en la figura 8-38 se ilustra un diagrama de bloque simplificado del accionador. Éste tiene un voltaje de campo constante suministrado por un rectificador trifásico de onda completa y un voltaje en las terminales del inducido variable proporcionado por seis SCR distribuidos como si fuera un rectificador trifásico de onda completa. El voltaje que se suministra al inducido del motor se controla por medio del ajuste del ángulo de disparo de los SCR en el puente. Debido a que este controlador de motor tiene un voltaje de campo fijo y un voltaje del inducido variable, sólo puede controlar la velocidad del motor a niveles por debajo o iguales a la velocidad base (véase "Cambio del voltaje en el inducido" en la sección 8.4).

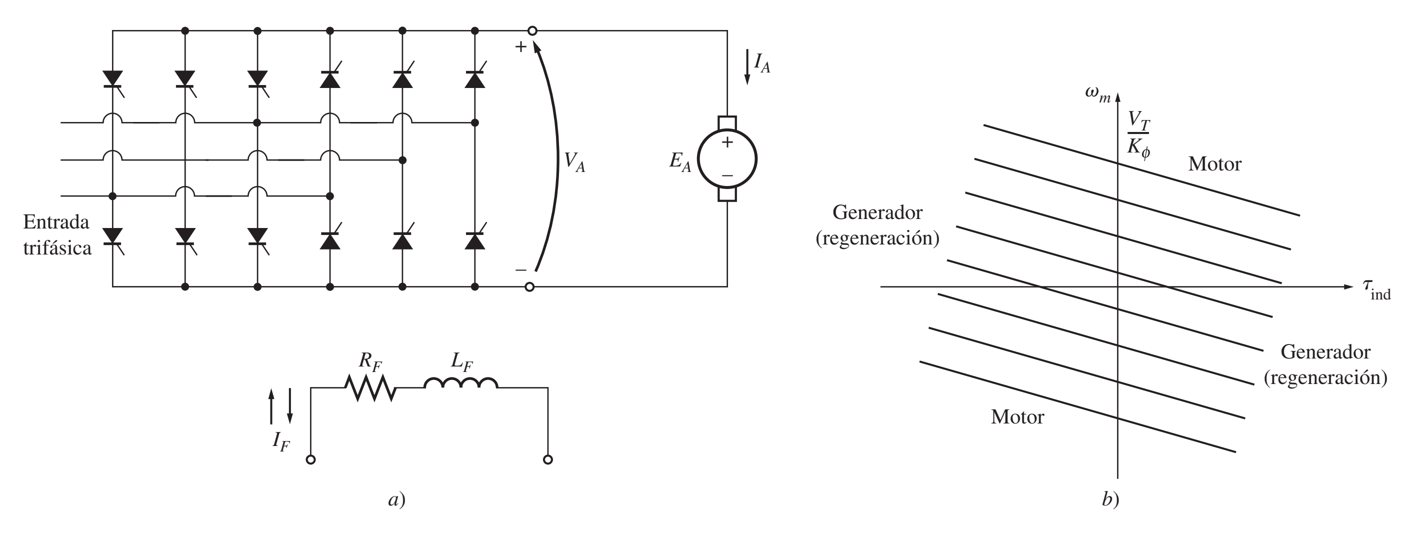
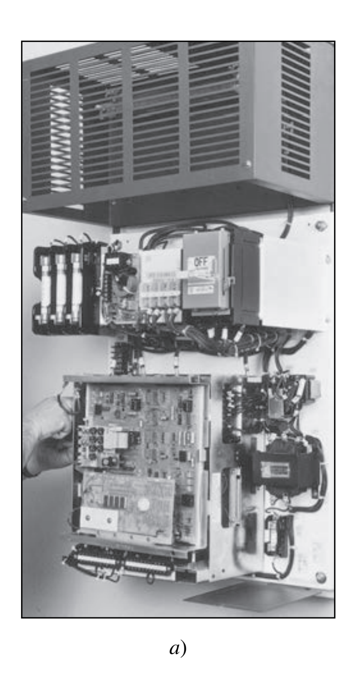
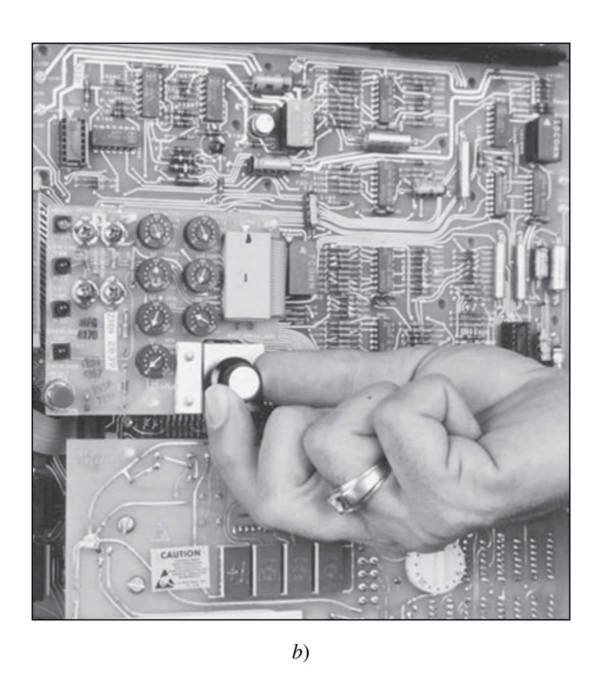


FIGURA 8-36 *a*) Controlador de motor de cd en estado sólido de cuatro cuadrantes. *b*) Posibles cuadrantes de operación de este controlador de motor.



a)



b)

FIGURA 8-37 *a*) Típico controlador de motor de cd en derivación en estado sólido. *b*) Vista en detalle del tablero del circuito de la electrónica de baja potencia que muestra los ajustes de los límites de corriente, tasa de aceleración, tasa de desaceleración, velocidad mínima y velocidad máxima. (*Cortesía de MagneTek, Inc.*)

El circuito controlador es igual al que se ilustra en la figura 8-35, excepto en que se puede observar tanto la electrónica de control como los circuitos de retroalimentación.

Las secciones principales de este controlador de motor de cd incluyen:

1. Una sección del circuito de protección para resguardar al motor de corrientes excesivas del inducido, bajo voltaje en el terminal y pérdida de corriente de campo.
2. Circuito de arranque y parada para conectar y desconectar el motor de la línea.
3. Una sección de electrónica de alta potencia para convertir la potencia de ca trifásica en potencia de cd para los circuitos de campo y del inducido del motor.
4. Una sección de electrónica de baja potencia para generar pulsos de disparo de los SCR que suministran el voltaje del inducido al motor. Esta sección contiene varias subsecciones importantes que se describirán a continuación.

Sección del circuito de protección

La sección del circuito de protección combina varios dispositivos diferentes que en su conjunto garantizan la seguridad de operación del motor. Algunos de los dispositivos típicos que se incluyen en este tipo de accionador son:

1. *Fusibles de limitación de corriente* para desconectar el motor de la línea de potencia de manera rápida y segura si se presenta un cortocircuito dentro del motor. Los fusibles de limitación de corriente pueden interrumpir corrientes de hasta varios cientos de miles de amperes.
2. *Disparador estático instantáneo* para apagar el motor si la corriente del inducido excede 300% de su valor nominal. Si la corriente del inducido excede el valor máximo permitido, el circuito disparador activa el relé de falla, que desenergiza el relé de operación y abre los contactores principales y desconecta el motor de la línea.
3. *Disparador de tiempo inverso por sobrecarga* que brinda protección contra condiciones de sobrecorriente sostenida que no es lo suficientemente alta como para encender el disparador estático instantáneo, pero sí para dañar el motor si se le permite continuar en forma indefinida. El

FIGURA 8-38 Diagrama de bloques simplificado del controlador típico de motor de cd en derivación en estado sólido que se muestra en la figura 8-37. (*Simplificación de un diagrama en bloque suministrado por MagneTek, Inc.*)

término *tiempo inverso* quiere decir que mientras más alta sea la sobrecorriente que fluye en el motor, más rápido actuará la sobrecarga (figura 8-39). Por ejemplo, un disparador de tiempo inverso puede emplear un minuto en dispararse si el flujo de corriente es de 150% de la corriente nominal, pero disparará en 10 segundos si el flujo de corriente es de 200%.

4. *Disparador de bajo voltaje* para apagar el motor si el voltaje de línea que alimenta el motor disminuye más de 20%.
5. *Disparador de pérdida de campo* para apagar el motor si se pierde el circuito de campo.
6. *Disparador de sobretemperatura* para apagar el motor si está en peligro de sobrecalentarse.

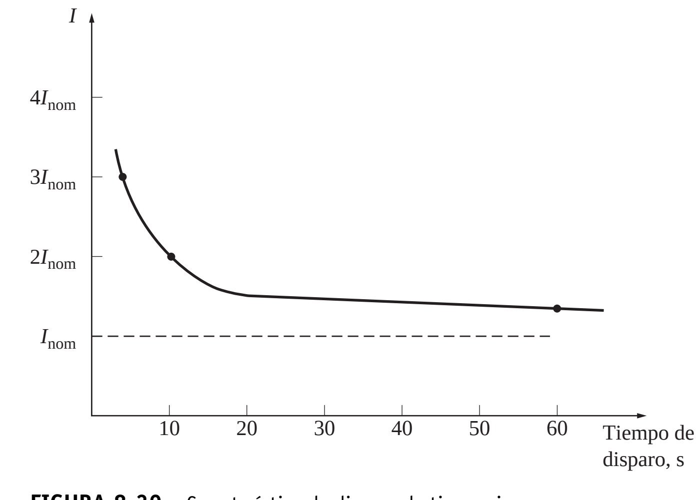


FIGURA 8-39 Característica de disparo de tiempo inverso.

Sección del circuito de arranque y paro

La sección del circuito de arranque y paro consta de los controles necesarios para hacer arrancar y parar el motor por medio de la apertura o cierre de los contactos principales que conectan al motor con la línea. El motor se enciende cuando se presiona el botón de arranque y se apaga ya sea cuando se presiona el botón de paro o si se energiza el relé de falla. En cualquiera de los casos, se desenergiza el relé de operación y se abren los contactos principales que conectan el motor a la línea.

Sección de electrónica de alta potencia

La sección de electrónica de alta potencia consta de un rectificador de diodo trifásico de onda completa que suministra un voltaje constante al circuito de campo del motor y un rectificador SCR trifásico de onda completa que proporciona un voltaje variable al circuito del inducido del motor.

Sección de electrónica de baja potencia

La sección de electrónica de baja potencia genera pulsos de disparo de los SCR que suministran el voltaje del inducido al motor. Por medio del ajuste del tiempo de disparo de los SCR, la sección de electrónica de baja potencia ajusta el voltaje del inducido promedio del motor. Esta sección consta de los siguientes subsistemas:

1. *Circuito de regulación de velocidad*. Este circuito mide la velocidad del motor con un tacómetro, la compara con la velocidad que se desea (un nivel de voltaje de referencia) y aumenta o disminuye el voltaje del inducido para mantener la velocidad constante del valor que se requiere. Por ejemplo, supóngase que se incrementa la carga en el eje del motor. En tal caso, el motor disminuirá la velocidad. La disminución de velocidad reduce el voltaje que genera el tacómetro, que alimenta al circuito de regulación de velocidad. Puesto que el nivel de voltaje que corresponde a la velocidad del motor disminuyó más allá del voltaje de referencia, el circuito regulador de voltaje adelantará el tiempo de disparo de los SCR y producirá un voltaje del inducido más alto. Este nuevo valor de voltaje del inducido tenderá a aumentar la velocidad del motor para llegar de nuevo al nivel deseado (véase la figura 8-40). Con el diseño adecuado, un circuito de este tipo puede proporcionar regulaciones de velocidad de 0.1% entre condiciones en vacío y a plena carga.

   La velocidad de operación deseada del motor se controla por medio del cambio del nivel de voltaje de referencia. El nivel de voltaje de referencia se puede ajustar con un pequeño potenciómetro, tal como se muestra en la figura 8-40.

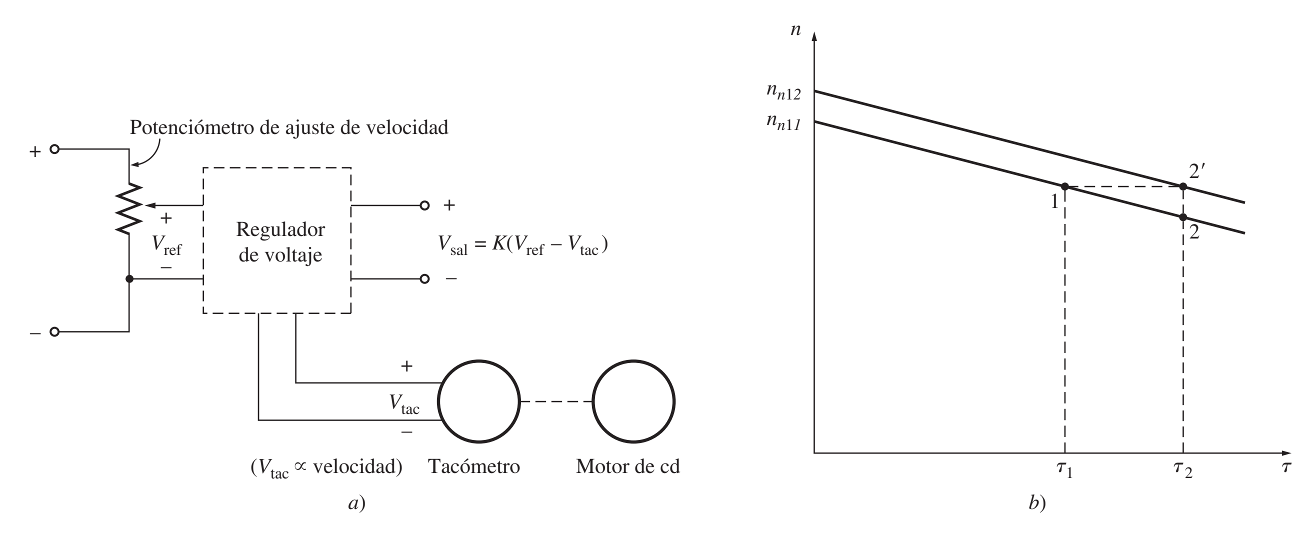


FIGURA 8-40 *a*) El circuito de regulador de velocidad produce un voltaje de salida que es proporcional a la diferencia entre la velocidad deseada del motor (establecida por V_{ref}) y la velocidad real del motor (medida por V_{tac}). Este voltaje de salida se aplica al circuito de disparo de manera que mientras más alto es, más temprano se prenderán los SCR en el controlador y más alto será el voltaje promedio en las terminales. *b*) Efecto de incrementar la carga en un motor de cd en derivación con regulador de velocidad. Se incrementa la carga en el motor. Si no hubiera regulador, el motor disminuiría su velocidad y operaría en el punto 2. Cuando hay un regulador de velocidad, éste detecta el incremento de velocidad y aumenta el voltaje del inducido del motor para compensar. Esto aumenta toda la curva característica par-velocidad del motor, lo que resulta en su operación en el punto 2′.

2. *Circuito limitador de corriente*. Este circuito mide la corriente en estado estacionario que fluye hacia el motor, la compara con la corriente máxima deseada (establecida por un nivel de voltaje de referencia) y disminuye el voltaje del inducido para evitar que la corriente exceda el valor

máximo deseado. La corriente máxima deseada se puede ajustar dentro de un amplio intervalo, por decir de 0 a 200% o más de la corriente nominal del motor. Por lo general, este límite de corriente se debe establecer en un valor mayor al de la corriente nominal para que el motor pueda acelerar en condiciones de plena carga.

3. *Circuito de aceleración y desaceleración*. Este circuito limita la aceleración y desaceleración del motor a un valor seguro. Cuando se ordena un cambio drástico de velocidad, este circuito interviene para asegurar que la transición entre la velocidad original y la nueva sea moderada y no ocasione una excesiva corriente del inducido transitiva en el motor.

El circuito de aceleración y desaceleración elimina por completo la necesidad de un resistor de arranque, puesto que encender el motor es sólo otro tipo de cambio de velocidad y el circuito de aceleración y desaceleración opera para que el incremento de velocidad sea moderado a través del tiempo. Este incremento moderado gradual de velocidad limita la corriente que fluye en el inducido de la máquina a un nivel seguro.

8.10 CÁLCULO DE LA EFICIENCIA DE UN MOTOR DE CD

Para calcular la eficiencia de un motor de cd se deben determinar las siguientes pérdidas:

1. Pérdidas en el cobre.
2. Pérdidas por caída en las escobillas.
3. Pérdidas mecánicas.
4. Pérdidas en el núcleo.
5. Pérdidas misceláneas.

Las pérdidas en el cobre en el motor son las pérdidas I^2R en los circuitos de campo y del inducido del motor. Estas pérdidas se pueden calcular si se conocen las corrientes de la máquina y dos resistencias. Para determinar la resistencia del circuito del inducido en una máquina, se bloquea el rotor de tal manera que no pueda girar y se aplica un *pequeño* voltaje de cd a las terminales del inducido. Se ajusta el voltaje hasta que la corriente que fluye en el inducido es igual a la corriente del inducido nominal de la máquina. La relación entre voltaje aplicado y el flujo de corriente del inducido resultante es R_A. La razón de que la corriente sea casi igual a su valor a plena carga cuando se lleva a cabo esta prueba es que R_A varía con la temperatura, y con el valor a plena carga de la corriente, los devanados del inducido están cerca de la temperatura normal de operación.

La resistencia resultante no será exacta debido a que

1. No se producirá el enfriamiento que normalmente se presenta cuando el motor gira.
2. Hay un voltaje de ca en los conductores del rotor en la operación normal, por lo cual sufren cierta cantidad de efecto pelicular, lo que a su vez aumenta la resistencia del inducido.

La Norma IEEE 113 (véase al final del capítulo la fuente registrada con el número 5) se trata del procedimiento de las pruebas en las máquinas de cd. Establece un procedimiento más exacto para determinar R_A, que se puede utilizar si es necesario.

La resistencia de campo se determina por medio del suministro de voltaje de campo a plena carga al circuito de campo y de la medición de la corriente de campo resultante. La resistencia de campo R_F es la relación del voltaje de campo y la corriente de campo.

Con frecuencia, las pérdidas por caída en las escobillas se agrupan con las pérdidas en el cobre. Si se tratan por separado, se pueden determinar con una gráfica del potencial de contacto y la corriente del tipo particular de escobilla en uso. Las pérdidas por caída en las escobillas son el producto de la caída de voltaje en las escobillas V_{CE} y la corriente en el inducido I_A.

Por lo regular, las pérdidas mecánicas y en el núcleo se determinan juntas. Si se permite que un motor gire libremente en vacío a velocidad nominal, entonces no hay potencia de salida de la máquina. Puesto que el motor está en vacío, I_A es muy pequeña y las pérdidas en el cobre del indu-

cido son despreciables. Por lo tanto, si se restan las pérdidas en el cobre de campo de la potencia de entrada del motor, la potencia de entrada restante debe consistir en las pérdidas mecánicas y en el núcleo de la máquina a esa velocidad. Estas pérdidas se llaman *pérdidas rotacionales en vacío* del motor. Siempre y cuando la velocidad del motor permanezca casi igual que en el momento en que se midieron las pérdidas, las pérdidas rotacionales en vacío son una buena estimación de las pérdidas mecánicas y en el núcleo con carga en la máquina.

A continuación se da un ejemplo sobre la determinación de la eficiencia de un motor.

EJEMPLO 8-8

Un motor de cd en derivación de 50 hp, 250 V y 1 200 r/min, tiene una corriente del inducido nominal de 170 A y una corriente de campo nominal de 5 A. Cuando se bloquea el rotor, un voltaje del inducido de 10.2 V (sólo de las escobillas) produce un flujo de corriente de 170 A y un voltaje de campo de 250 V genera un flujo de corriente de campo de 5 A. Se supone que la caída de voltaje en las escobillas es de 2 V. En vacío y con un voltaje en las terminales igual a 240 V, la corriente del inducido es igual a 13.2 A, la corriente de campo es de 4.8 A y la velocidad del motor es de 1 150 r/min.

a) ¿Cuánta potencia sale del motor en condiciones nominales?
b) ¿Cuál es la eficiencia del motor?

Solución

La resistencia del inducido de esta máquina es aproximadamente de

$$R_A = \frac{10.2\text{ V}}{170\text{ A}} = 0.06\ \Omega$$

y la resistencia de campo es de

$$R_F = \frac{250\text{ V}}{5\text{ A}} = 50\ \Omega$$

Por lo tanto, a plena carga las pérdidas I^2R en el inducido son

$$P_A = (170\text{ A})^2(0.06\ \Omega) = 1\,734\text{ W}$$

y las pérdidas I^2R en el circuito de campo son

$$P_F = (5\text{ A})^2(50\ \Omega) = 1\,250\text{ W}$$

Las pérdidas en las escobillas a plena carga están dadas por

$$P_{\text{escob}} = V_{\text{CE}}I_A = (2\text{ V})(170\text{ A}) = 340\text{ W}$$

Las pérdidas rotacionales a plena carga son esencialmente equivalentes a las pérdidas rotacionales en vacío, puesto que las velocidades en vacío y a plena carga del motor no son muy diferentes y se pueden hallar determinando la potencia de entrada al circuito del inducido en vacío y suponiendo que las pérdidas por caída en las escobillas y en el cobre del inducido son despreciables, lo que quiere decir que la potencia de entrada al inducido en vacío es igual a las pérdidas rotacionales:

$$P_{\text{tot}} = P_{\text{núcl}} + P_{\text{mec}} = (240\text{ V})(13.2\text{ A}) = 3\,168\text{ W}$$

a) La potencia de entrada de este motor con carga nominal está dada por

$$P_{\text{entr}} = V_T I_L = (250\text{ V})(175\text{ A}) = 43\,750\text{ W}$$

La potencia de salida está dada por

$$\begin{aligned} P_{\text{sal}} &= P_{\text{entr}} - P_{\text{escob}} - P_{\text{cu}} - P_{\text{núcl}} - P_{\text{mec}} - P_{\text{misc}} \\ &= 43\,750\text{ W} - 340\text{ W} - 1\,734\text{ W} - 1\,250\text{ W} - 3\,168\text{ W} - (0.01)(43\,750\text{ W}) \\ &= 36\,820\text{ W} \end{aligned}$$

donde las pérdidas misceláneas se toman como 1% de la potencia de entrada.

b) La eficiencia de este motor a plena carga es de

$$\eta = \frac{P_{\text{sal}}}{P_{\text{sal}}} \times 100\%$$

$$= \frac{36\,820 \text{ W}}{43\,750 \text{ W}} \times 100\% = 84.2\%$$

8.11 INTRODUCCIÓN A LOS GENERADORES DE CD

Los generadores de cd son máquinas de cd que se utilizan como generador. Como se puntualizó con anterioridad, no hay diferencias reales entre un generador y un motor excepto en la dirección del flujo de potencia. Hay cinco tipos principales de generadores de cd, que se clasifican de acuerdo con la forma en que se produce su flujo de campo:

1. *Generador de excitación separada*. El flujo de campo se deriva de una fuente de potencia separada independiente del generador en sí mismo.
2. *Generador en derivación*. El flujo de campo se deriva de la conexión del circuito de campo directamente a través de las terminales del generador.
3. *Generador en serie*. El flujo de campo se produce por la conexión del circuito de campo en serie con el inducido del generador.
4. *Generador compuesto acumulativo*. En él están presentes tanto el campo en derivación como el campo en serie y sus efectos son aditivos.
5. *Generador compuesto diferencial*. En él se encuentran tanto el campo en derivación como el campo en serie, pero sus efectos se restan.

Estos tipos de generadores de cd difieren en sus características en las terminales (voltaje-corriente), y por lo tanto en las aplicaciones para las cuales son adecuados.

Los generadores de cd se comparan entre sí por su voltaje, potencia nominal, eficiencia y regulación de voltaje. La *regulación de voltaje* (VR, por sus siglas en inglés) se define por medio de la ecuación

$$\text{VR} = \frac{V_{\text{sc}} - V_{\text{pc}}}{V_{\text{pc}}} \times 100\% \qquad \textbf{(8-39)}$$

donde V_{sc} es el voltaje en las terminales del generador en vacío y V_{pc} es el voltaje en las terminales del generador a plena carga. Es una medida aproximada de la forma de la característica voltaje-corriente del generador: una regulación de voltaje positiva significa una característica descendente y una regulación de voltaje negativa, una característica ascendente.

Todos los generadores son accionados por una fuente de potencia mecánica, que normalmente se llama *motor primario* del generador. El motor primario de un generador de cd puede ser una turbina de vapor, un motor diesel o incluso un motor eléctrico. En razón de que la velocidad del motor principal afecta el voltaje de salida de un generador y de que los motores principales pueden variar dentro de un amplio intervalo dentro de su característica de velocidad, se acostumbra comparar la regulación de voltaje y característica de salida de diferentes generadores *suponiendo que los motores primarios tienen una velocidad constante*. A lo largo de este capítulo se dará por sentado que la velocidad de un generador es constante, a menos que se especifique lo contrario.

Los generadores de cd son bastante raros en los sistemas de potencia modernos. Incluso en los sistemas de potencia de cd de los auto-

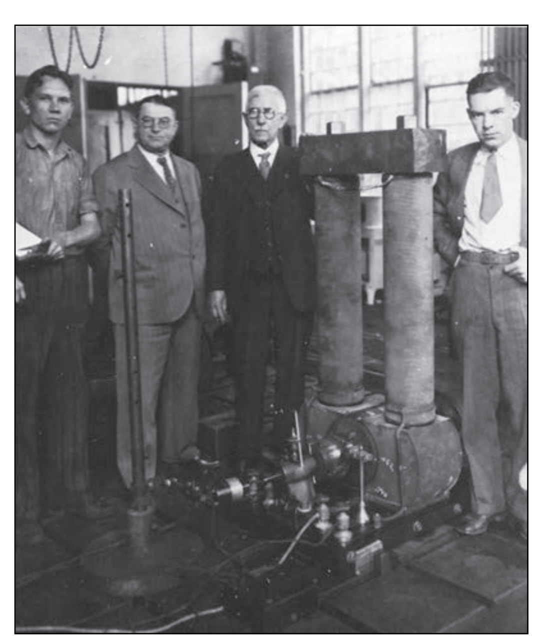


FIGURA 8-41 El primer generador de cd práctico. Ésta es una copia exacta del "Mary Ann de pata larga" que fue el primer generador de cd comercial de Thomas Edison que se construyó en 1879. Sus valores nominales son: 5 kW, 100 V y 1 200 r/min. (*Cortesía de General Electric Company*.)

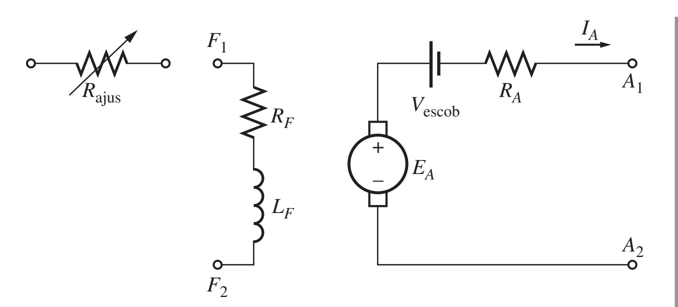


FIGURA 8-42 Circuito equivalente del generador de cd.

móviles se utilizan generadores de ca con rectificadores para producir una potencia de cd. No obstante, han mostrado un renacimiento limitado en los últimos años como fuentes de potencia en las torres independientes para teléfonos celulares.

En la figura 8-42 se puede ver el circuito equivalente de un generador de cd y en la figura 8-43 se muestra la versión simplificada del circuito equivalente. Son parecidos a los circuitos equivalentes de los motores de cd, excepto en que la dirección del flujo de corriente y las pérdidas en las escobillas son contrarias.

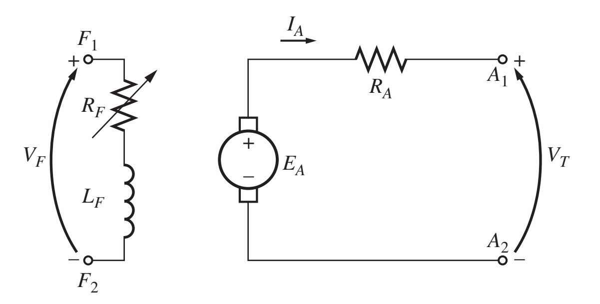


FIGURA 8-43 Circuito equivalente simplificado de un generador de cd, cuando R_F combina las resistencias de las bobinas de campo y el resistor de control variable.

8.12 GENERADOR DE EXCITACIÓN SEPARADA

Un generador de cd de excitación separada es aquel cuya corriente de campo la suministra una fuente de voltaje de cd externa separada. En la figura 8-44 se muestra el circuito equivalente de una máquina como ésta. En este circuito, el voltaje V_T representa el voltaje real medido en las terminales del generador y la corriente I_L representa la corriente que fluye en las líneas conectadas a las terminales. El voltaje interno generado es E_A y la corriente del inducido es I_A. Es claro que en un generador de excitación separada la corriente del inducido es igual a la corriente de línea:

$$I_A = I_L \tag{8-40}$$

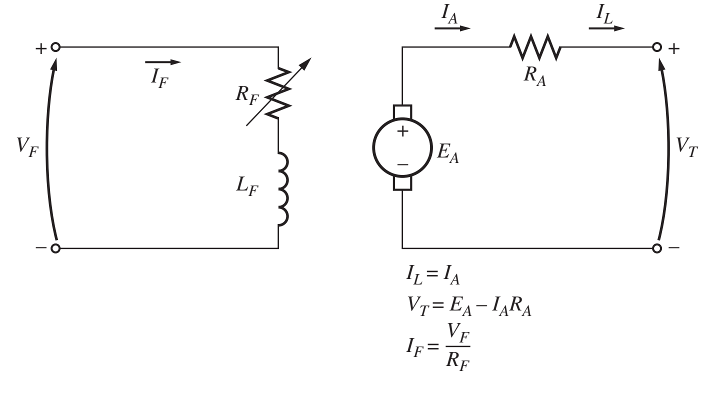


FIGURA 8-44 Generador de cd de excitación separada.

Característica de las terminales de un generador de cd de excitación separada

La *característica de las terminales* de un dispositivo es la gráfica de las cantidades de salida del dispositivo una respecto a la otra. Para un generador de cd, las cantidades de salida son el voltaje en las terminales y la corriente de línea. La característica de las terminales de un generador de excitación separada es entonces una gráfica de V_T con respecto a I_L a una velocidad constante ω. Por la ley de voltaje de Kirchhoff, el voltaje en las terminales es

$$V_T = E_A - I_A R_A \tag{8-41}$$

Puesto que el voltaje interno generado es independiente de I_A, la característica en las terminales de un generador de excitación separada es una línea recta, tal como se aprecia en la figura 8-45*a*).

¿Qué sucede en un generador de este tipo cuando se incrementa la carga? Cuando se incrementa la carga suministrada al generador, I_L (y por lo tanto I_A) aumenta. Conforme se eleva la corriente del inducido, se incrementa la caída $I_A R_A$, por lo que cae el voltaje en las terminales del generador.

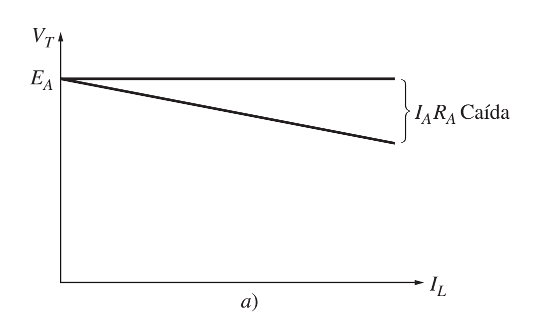
Esta característica en las terminales no siempre es completamente exacta. En los generadores sin devanados de compensación, un incremento de I_A provoca un incremento de la reacción del inducido y una reacción del inducido provoca un debilitamiento del flujo. Este debilitamiento del flujo provoca una disminución de $E_A = K\phi\downarrow\omega_m$ que origina una mayor disminución del voltaje en las terminales del generador. En la figura 8-45*b*) se muestra la característica resultante de las terminales. En todas las gráficas siguientes se supondrá que los generadores tienen devanados de compensación, a menos que se diga lo contrario. Sin embargo, es importante hacer notar que la reacción del inducido puede modificar las características si no se tienen devanados de compensación.

Control del voltaje en las terminales

Se puede controlar el voltaje en las terminales de un generador de cd de excitación separada por medio del cambio del voltaje interno generado E_A por la máquina. Por la ley de voltaje de Kirchhoff $V_T = E_A - I_A R_A$, por lo que si aumenta E_A, aumentará V_T y si disminuye E_A, disminuirá V_T. Puesto que el voltaje interno generado está dado por la ecuación $E_A = K\phi\omega_m$, hay dos formas posibles de controlar el voltaje de un generador de este tipo:

1. *Cambio de la velocidad de rotación*. Si aumenta ω_m, entonces aumenta $E_A = K\phi\omega_m\uparrow$, por lo que también aumenta $V_T = E_A\uparrow - I_A R_A$.
2. *Cambio de la corriente de campo*. Si disminuye R_F, aumenta la corriente de campo ($I_F = V_F/R_F\downarrow$). Por lo tanto, aumenta el flujo ϕ en la máquina. Conforme aumenta el flujo, también debe aumentar $E_A = K\phi\omega_m$, por lo que aumenta $V_T = E_A\uparrow - I_A R_A$.

En muchas aplicaciones, el intervalo de velocidad del motor primario es muy limitado, por lo que el voltaje en las terminales se controla más a menudo por medio del cambio en la corriente de campo. En la figura 8-46*a*) se ilustra un generador de excitación separada accionando una carga resistiva. En la figura 8-46*b*) se muestra el efecto de la disminución de la resistencia de campo en el voltaje en las terminales del generador cuando opera con carga.



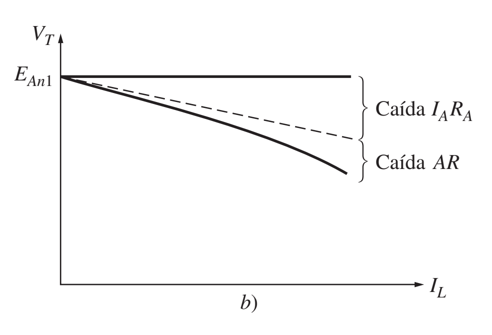


FIGURA 8-45 Característica de las terminales de un generador de cd de excitación separada: *a*) con devanados de compensación; *b*) sin devanados de compensación.

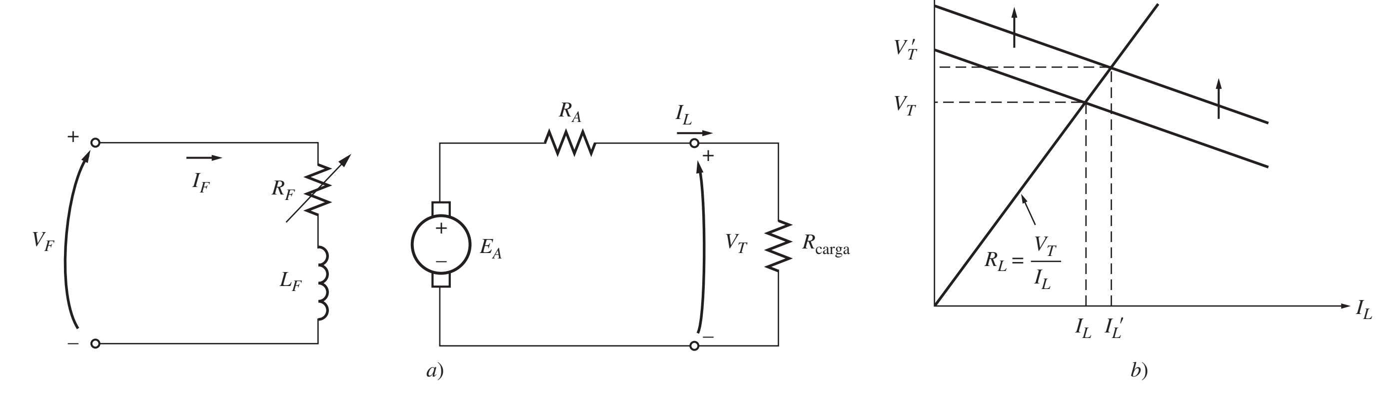


FIGURA 8-46 *a*) Generador de cd de excitación separada con una carga resistiva. *b*) Efecto de una disminución de la resistencia de campo en el voltaje de salida del generador.

Análisis no lineal de un generador de cd de excitación separada

Puesto que el voltaje interno que produce un generador no es una función lineal de su fuerza magnetomotriz, no es posible simplemente calcular el valor de E_A que se esperaría dada cierta corriente de campo. Se debe utilizar la curva de magnetización del generador para calcular con exactitud su voltaje de salida dado cierto voltaje de entrada.

Además, si una máquina tiene reacción del inducido, se debilitará su flujo con cada incremento de la carga, provocando que disminuya E_A. La única manera de determinar exactamente el voltaje de salida en una máquina con reacción del inducido es mediante la utilización del análisis gráfico.

La fuerza magnetomotriz total de un generador de excitación separada es la fuerza magnetomotriz del circuito de campo menos la fuerza magnetomotriz debida a la reacción del inducido (RA):

$$\mathscr{F}_{net} = N_F I_F - \mathscr{F}_{RA} \quad \textbf{(8-42)}$$

Al igual que en los motores de cd, se acostumbra definir una *corriente de campo equivalente* que produciría el mismo voltaje de salida que la combinación de todas las fuerzas magnetomotrices de la máquina. En consecuencia, se puede determinar el voltaje resultante E_{A0} por medio de la localización de la corriente de campo equivalente en la curva de magnetización. La corriente de campo equivalente de un generador de cd de excitación separada está dada por

$$I_F^* = I_F - \frac{\mathscr{F}_{RA}}{N_F} \tag{8-43}$$

Además, se debe tomar en cuenta la diferencia entre la velocidad de la curva de magnetización y la velocidad real del generador por medio de la utilización de la ecuación (8-13):

$$\frac{E_A}{E_{A0}} = \frac{n_m}{n_0} \tag{8-13}$$

El siguiente ejemplo ilustra el análisis de un generador de cd de excitación separada.

EJEMPLO 8-9

Un generador de cd de excitación separada tiene los siguientes valores nominales: 172 kW, 430 V, 400 A y 1 800 r/min. El aparato se muestra en la figura y su curva de magnetización aparece en la figura 8-48. Esta máquina tiene las siguientes características:

$$R_A = 0.05\ \Omega \qquad V_F = 430 \text{ V}$$
$$R_F = 20\ \Omega \qquad N_F = 1\,000 \text{ vueltas por polo}$$
$$R_{\text{ajus}} = 0 \text{ hasta } 300\ \Omega$$

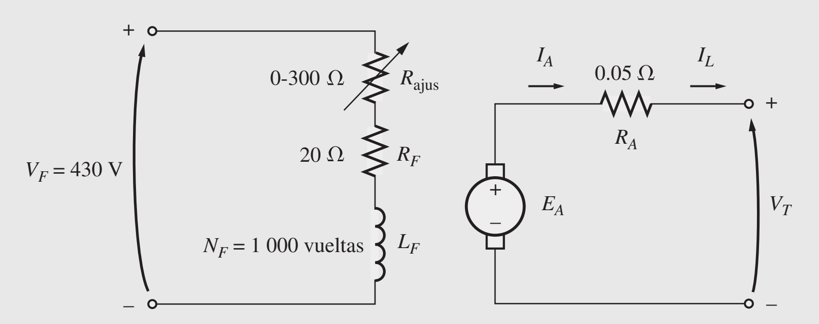


FIGURA 8-47 Generador de cd de excitación separada del ejemplo 8-9.

a) Si el resistor variable R_{ajus} en este circuito de campo del generador se ajusta a 63 Ω y el motor primario del generador opera a 1 600 r/min, ¿cuál es el voltaje en las terminales vacíos del generador?

b) ¿Cuál será su voltaje si se conecta una carga de 360 A a sus terminales? Suponga que el generador tiene devanados de compensación.

c) ¿Cuál será su voltaje si se conecta una carga de 360 A a sus terminales, y el generador no tiene devanados de compensación? Suponga que la reacción del inducido con esta carga es de 450 A • vueltas.

d) ¿Qué ajuste se puede hacer al generador para regresar el voltaje en las terminales al valor que tenía en el inciso *a*)?

e) ¿Cuánta corriente de campo se requiere para regresar el voltaje en las terminales a su valor en vacío? (Suponga que la máquina tiene devanados de compensación.) ¿Cuál es el valor que se requiere del resistor R_{ajus} para lograrlo?

Solución

a) Si la resistencia del circuito de campo total del generador es

$$R_F + R_{\text{ajus}} = 83\ \Omega$$

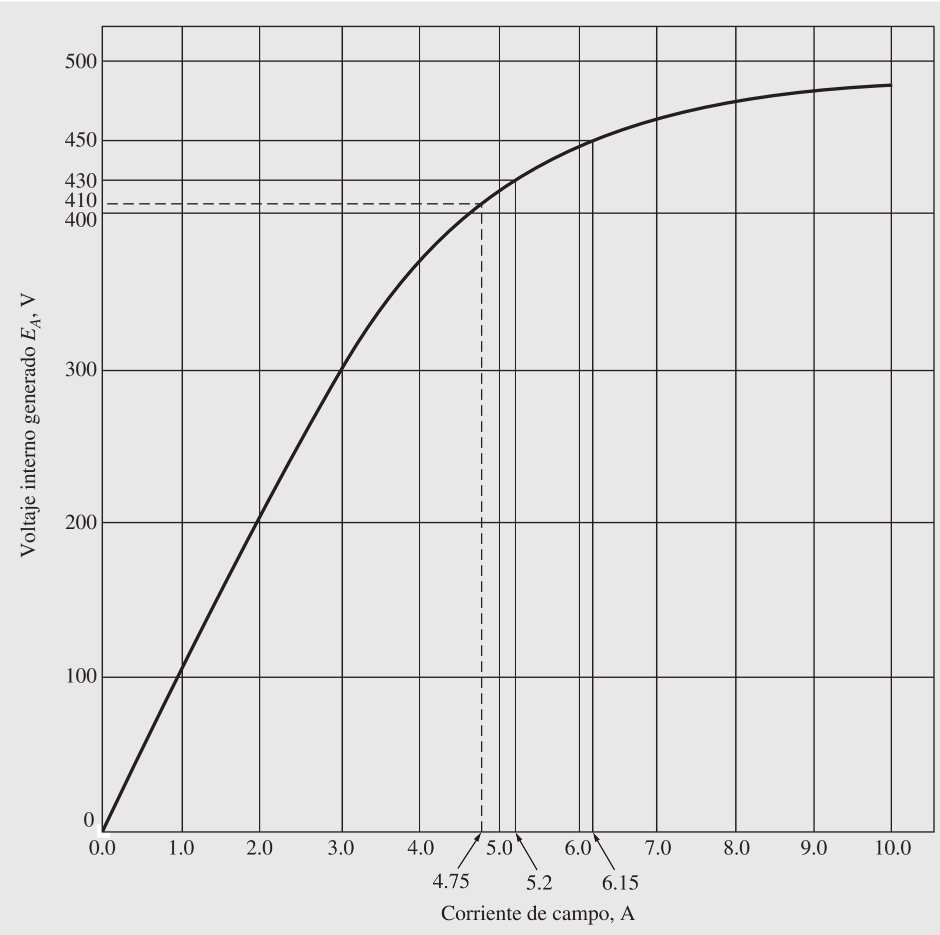


FIGURA 8-48 La curva de magnetización del generador del ejemplo 8-9.

entonces la corriente de campo en la máquina es de

$$I_F = \frac{V_F}{R_F} = \frac{430 \text{ V}}{83\ \Omega} = 5.2 \text{ A}$$

Con base en la curva de magnetización de la máquina se sabe que esta cantidad de corriente produciría un voltaje $E_{A0} = 430$ V a una velocidad de 1 800 r/min. Puesto que este generador en realidad gira a $n_m = 1\,600$ r/min, su voltaje interno generado E_A será de

$$\frac{E_A}{E_{A0}} = \frac{n_m}{n_0} \tag{8-13}$$

$$E_A = \frac{1\,600 \text{ r/min}}{1\,800 \text{ r/min}} 430 \text{ V} = 382 \text{ V}$$

Puesto que $V_T = E_A$ en condiciones de vacío, el voltaje de salida del generador es $V_T = 382$ V.

b) Si se conecta una carga de 360 A a las terminales del generador, el voltaje en éstos será

$$V_T = E_A - I_A R_A = 382 \text{ V} - (360 \text{ A})(0.05\ \Omega) = 364 \text{ V}$$

c) Si se conecta una carga de 360 A a las terminales del generador y el generador tiene 450 A • vueltas de reacción del inducido, la corriente de campo efectiva será

$$I_F^* = I_F - \frac{\mathscr{F}_{\text{AR}}}{N_F} = 5.2 \text{ A} - \frac{450 \text{ A} \bullet \text{vueltas}}{1\,000 \text{ vueltas}} = 4.75 \text{ A}$$

Con base en la curva de magnetización se sabe que $E_{A0} = 410$ V, por lo que el voltaje interno generado a 1 600 r/min sería de

$$\frac{E_A}{E_{A0}} = \frac{n_m}{n_0} \qquad \textbf{(8-13)}$$

$$E_A = \frac{1\,600 \text{ r/min}}{1\,800 \text{ r/min}} 410 \text{ V} = 364 \text{ V}$$

Por lo tanto, el voltaje en las terminales del generador sería de

$$V_T = E_A - I_A R_A = 364 \text{ V} - (360 \text{ A})(0.05\ \Omega) = 346 \text{ V}$$

Es menor al valor que tenía antes debido a la reacción del inducido.

d) Cayó el voltaje en las terminales del generador, por lo que para regresarlo a su valor original se debe incrementar el voltaje del generador. Esto requiere un incremento de E_A, lo que implica que se debe disminuir R_{ajus} para incrementar la corriente de campo del generador.

e) Para que el voltaje en las terminales regrese a 382 V, el valor requerido de E_A es de

$$E_A = V_T + I_A R_A = 382 \text{ V} + (360 \text{ A})(0.05\ \Omega) = 400 \text{ V}$$

Para obtener un voltaje E_A de 400 V a $n_m = 1\,600$ r/min, el voltaje equivalente a 1 800 r/min sería de

$$\frac{E_A}{E_{A0}} = \frac{n_m}{n_0} \qquad \textbf{(8-13)}$$

$$E_{A0} = \frac{1\,800 \text{ r/min}}{1\,600 \text{ r/min}} 400 \text{ V} = 450 \text{ V}$$

Con base en la curva de magnetización se sabe que este voltaje requeriría una corriente de campo de $I_F = 6.15$ A. La resistencia del circuito de campo tendría que ser

$$R_F + R_{ajus} = \frac{V_F}{I_F}$$

$$20\ \Omega + R_{ajus} = \frac{430 \text{ V}}{6.15 \text{ A}} = 69.9\ \Omega$$

$$R_{ajus} = 49.9\ \Omega \approx 50\ \Omega$$

Nótese que para las mismas corrientes de campo y de carga, el generador con reacción del inducido presenta un voltaje de salida menor que el que no tiene reacción. En este generador se exagera la reacción del inducido para ilustrar sus efectos: es bastante más pequeño en las máquinas modernas bien diseñadas.

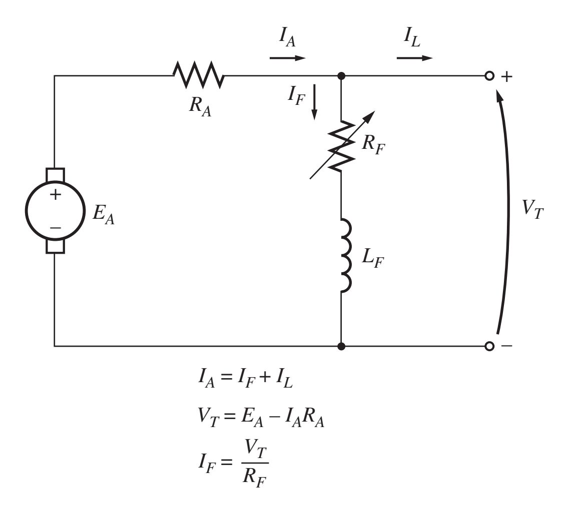


FIGURA 8-49 Circuito equivalente de un generador de cd en derivación.

8.13 GENERADOR DE CD EN DERIVACIÓN

Un generador de cd en derivación suministra su propia corriente de campo conectando éste directamente a través de las terminales de la máquina. En la figura 8-49 se muestra el circuito equivalente de un generador de cd en derivación. En este circuito la corriente del inducido de la máquina alimenta tanto al circuito de campo como a la carga conectada a la máquina:

$$I_A = I_F + I_L \qquad \textbf{(8-44)}$$

La ecuación de la ley de voltaje de Kirchhoff (LVK) del circuito del inducido de esta máquina es

$$V_T = E_A - I_A R_A \qquad \textbf{(8-45)}$$

Este tipo de generador tiene una clara ventaja sobre el generador de cd de excitación separada: no se requiere una fuente de potencia externa para el circuito de campo. Pero aún no se ha contestado una pregunta importante: si el generador suministra su propia corriente de campo, ¿cómo obtiene el flujo de campo inicial para el arranque cuando se enciende en primera instancia?

Incremento de voltaje en un generador en derivación

Suponga que el generador de la figura 8-49 no tiene ninguna carga conectada y que el motor primario comienza a hacer girar el eje del generador. ¿Cómo aparece un voltaje inicial en las terminales de la máquina?

El incremento de voltaje de un generador de cd depende de la presencia de *flujo residual* en los polos del generador. Cuando un generador comienza a girar, se generará un voltaje interno que está dado por

$$E_A = K\phi_{\text{res}}\omega_m$$

Este voltaje aparece en las terminales del generador (puede ser de sólo uno o dos volts). Pero cuando el voltaje aparece en las terminales, provoca el flujo de corriente en la bobina de campo del generador ($I_F = V_T\uparrow/R_F$). Esta corriente de campo produce una fuerza magnetomotriz en los polos, que a su vez incrementa el flujo en ellos. El incremento del flujo provoca un incremento de $E_A = K\,\phi\uparrow\omega_m$, que sube el voltaje en las terminales V_T. Cuando V_T aumenta, I_F lo hace aún más, incrementando más el flujo ϕ, que incrementa E_A, etcétera.

En la figura 8-50 se muestra este comportamiento de incremento de voltaje. Nótese que el efecto de saturación magnética en las caras polares es lo que a la larga limita el voltaje en las terminales del generador.

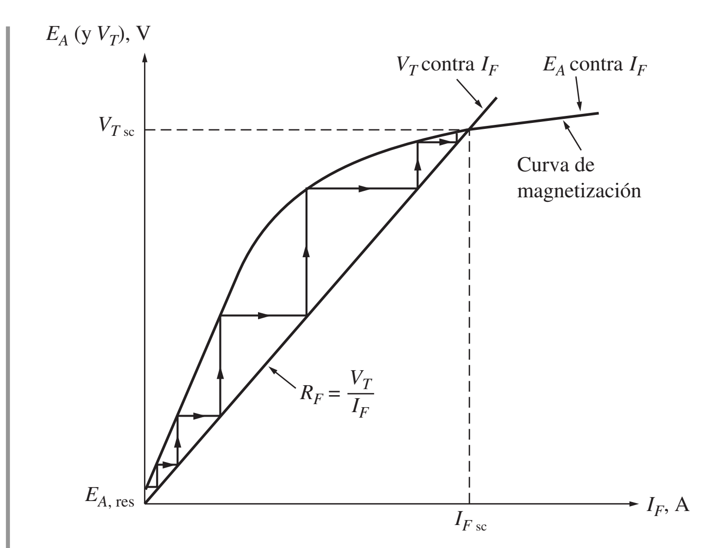


FIGURA 8-50 Incremento de voltaje en el arranque de un generador de cd en derivación.

La figura 8-50 ilustra el incremento de voltaje como si ocurriera en escalones discretos. Estos escalones se dibujan de esta manera para evidenciar la retroalimentación positiva entre el voltaje interno del generador y su corriente de campo. En un generador real el voltaje no se acumula en escalones discretos: en cambio, tanto E_A como I_F aumentan simultáneamente hasta que se llega al estado estacionario.

¿Qué pasa si se hace arrancar un generador de cd y no se incrementa voltaje? ¿Qué podría estar mal? Hay muchas causas posibles para que esta falla ocurra durante el arranque. Entre éstas se encuentran:

1. *Tal vez no hay flujo magnético residual* en el generador para comenzar el proceso. Si el flujo residual $\phi_{\text{res}} = 0$, entonces $E_A = 0$ y el voltaje no se incrementará. Si se presenta este problema, se debe desconectar el campo del circuito del inducido y conectarlo directamente a una fuente de cd externa, tal como una batería. El flujo de corriente de esta fuente de cd externa dejará un flujo residual en los polos, que entonces permitirá tener un arranque normal. Este procedimiento se conoce como “centelleo del campo”.
2. *Se puede haber invertido la dirección de rotación del generador*, o se pueden haber invertido las conexiones del campo. En cualquier caso, el flujo residual produce un voltaje interno generado E_A. El voltaje E_A produce una corriente de campo que provoca un flujo *opuesto* al residual, en lugar de sumarse a él. En estas circunstancias, el flujo en realidad *disminuye* por debajo de ϕ_{res} y no se puede incrementar el voltaje.

   Si se presenta este problema, se puede arreglar invirtiendo la dirección de rotación mediante la inversión de las conexiones de campo o por medio del centelleo del campo con la polaridad magnética opuesta.

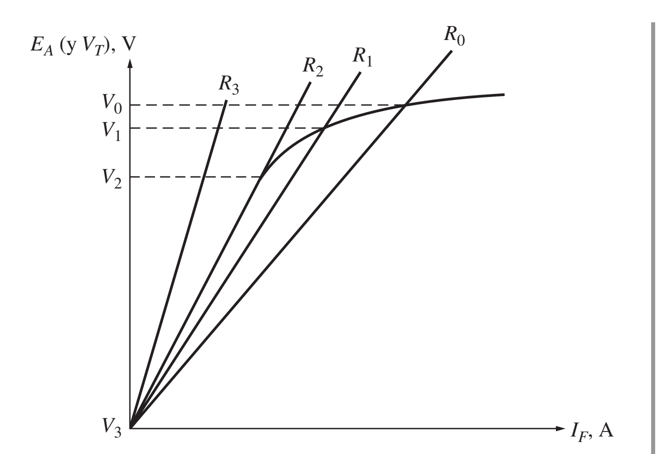


FIGURA 8-51 Efecto de una resistencia de campo en derivación en el voltaje de las terminales en vacío de un generador de cd. Si $R_F > R_2$ (resistencia crítica), que impide que se incremente el voltaje del generador.

3. *La resistencia de campo puede estar ajustada a un valor mayor que la resistencia crítica*. Para entender este problema, véase la figura 8-51. Normalmente, el generador en derivación incrementará el voltaje hasta el punto en que la curva de magnetización se interseca con la línea de la resistencia de campo. Si ésta tiene el valor que muestra R_2 en la figura, su línea es casi paralela a la curva de magnetización. En ese punto, el voltaje del generador puede fluctuar ampliamente ante pequeños cambios en R_F o I_A. Este valor de la resistencia se llama *resistencia crítica*. Si R_F excede la resistencia crítica (como R_3 en la figura), el voltaje de operación en estado estacionario está esencialmente en el nivel residual y nunca se incrementará. La solución para este problema es reducir R_F.

Puesto que el voltaje de la curva de magnetización varía en función de la velocidad del eje, la resistencia crítica también varía con la velocidad. En general, mientras menor sea la velocidad del eje, menor será la resistencia crítica.

Característica de las terminales de un generador de cd en derivación

La característica de las terminales de un generador de cd en derivación difiere de la de un generador de cd de excitación separada en el que la cantidad de corriente de campo de la máquina depende de su voltaje en las terminales. Para entender la característica de las terminales de un generador en derivación, se debe comenzar con la máquina descargada, luego añadir cargas y observar lo que sucede.

Conforme se incrementa la carga en el generador, se incrementa I_L y por lo tanto también aumenta $I_A = I_F + I_L \uparrow$. Un incremento de I_A aumenta la caída de voltaje de la resistencia del inducido $I_A R_A$ y provoca que disminuya $V_T = E_A - I_A \uparrow R_A$. Éste es precisamente el mismo comportamiento observado en un generador de excitación separada. Sin embargo, cuando disminuye V_T, la corriente de campo en la máquina disminuye con él. Esto provoca que disminuya el flujo en la máquina, disminuyendo E_A. La disminución de E_A provoca otra disminución del voltaje en las terminales $V_T = E_A\downarrow - I_A R_A$. En la figura 8-52 se muestra la característica resultante en las terminales. Nótese que la caída de voltaje es más pronunciada que la caída $I_A R_A$ en un generador de excitación separada. En otras palabras, la regulación de voltaje de este generador es peor que la regulación de voltaje del mismo equipo conectado en excitación separada.

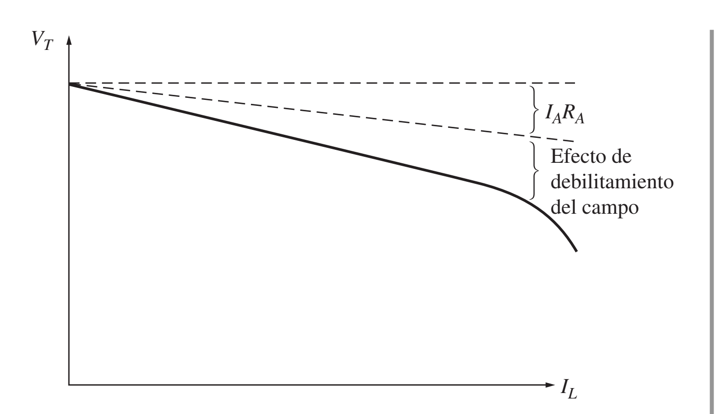


FIGURA 8-52 Característica en las terminales de un generador de cd en derivación.

Control de voltaje en un generador de cd en derivación

Como con el generador de excitación separada, hay dos maneras de controlar el voltaje en un generador en derivación:

1. Cambiar la velocidad del eje ω_m del generador.
2. Cambiar el resistor de campo del generador, lo cual modifica la corriente de campo.

Cambiar la resistencia de campo es el principal método que se utiliza para controlar el voltaje en las terminales en los generadores en derivación reales. Si disminuye el resistor de campo R_F, entonces se eleva la corriente de campo $I_F = V_T/R_F\downarrow$. Cuando se incrementa I_F, aumenta el flujo ϕ de

la máquina, lo que provoca el aumento del voltaje interno generado E_A. El incremento en E_A provoca que también aumente el voltaje en las terminales del generador.

Análisis de los generadores de cd en derivación

El análisis de un generador de cd en derivación es un tanto más complicado que el análisis de un generador de excitación separada, puesto que la corriente de campo en la máquina depende directamente del propio voltaje de salida de la máquina. Primero se estudiará el análisis de los generadores en derivación de máquinas sin reacción del inducido y luego se incluirán los efectos de la reacción del inducido.

En la figura 8-53 se muestra la curva de magnetización de un generador de cd en derivación dibujada con la velocidad de operación real de la máquina. La resistencia de campo R_F, que es igual a V_T/I_F, está representada con una línea recta tendida sobre la curva de magnetización. *En vacío*, $V_T = E_A$ y el generador opera al voltaje donde la curva de magnetización se interseca con la línea de la resistencia de campo.

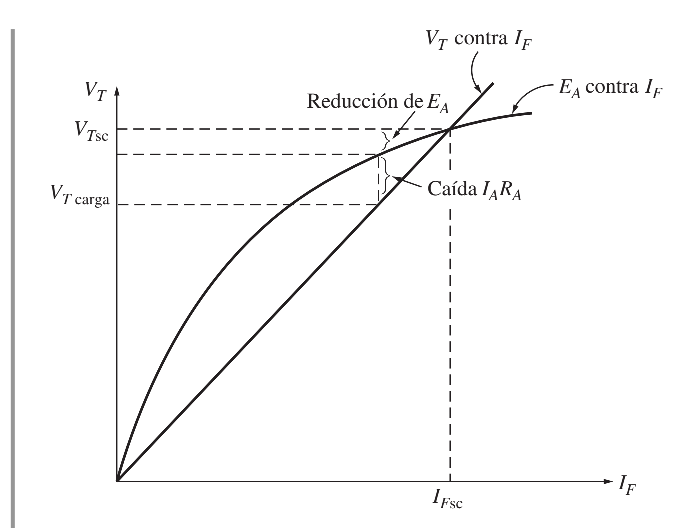


FIGURA 8-53 Análisis gráfico de un generador de cd en derivación con devanados de compensación.

La clave para entender el análisis gráfico de los generadores en derivación es recordar la ley de voltaje de Kirchhoff (LVK):

$$V_T = E_A - I_AR_A \tag{8-45}$$

o

$$E_A - V_T = I_AR_A \tag{8-46}$$

La diferencia entre el voltaje interno generado y el voltaje en las terminales es igual a la caída I_AR_A en la máquina. La línea de todos los valores posibles de E_A es la curva de magnetización y la línea de todos los voltajes terminales posibles es la línea del resistor ($I_F = V_T/R_F$). Por lo tanto, para encontrar el voltaje en las terminales para cierta carga, sólo se debe determinar la caída I_AR_A y localizar el lugar en la gráfica en que esa caída es *exactamente* igual al espacio entre la línea de E_A y la línea de V_T. Hay más de dos lugares en la curva donde la caída I_AR_A será exactamente igual al espacio entre las líneas. Si hay dos posiciones posibles, la que está más cerca del voltaje en vacío representará el punto de operación normal.

En la figura 8-54 se muestra una gráfica detallada donde se pueden observar varios puntos diferentes de la característica de un generador en derivación. Nótese la línea punteada en la figura 8-54*b*). Esta línea es la característica en las terminales cuando se reduce la carga. La razón de que no coincida con la línea de incremento de carga es la histéresis en los polos del estator del generador.

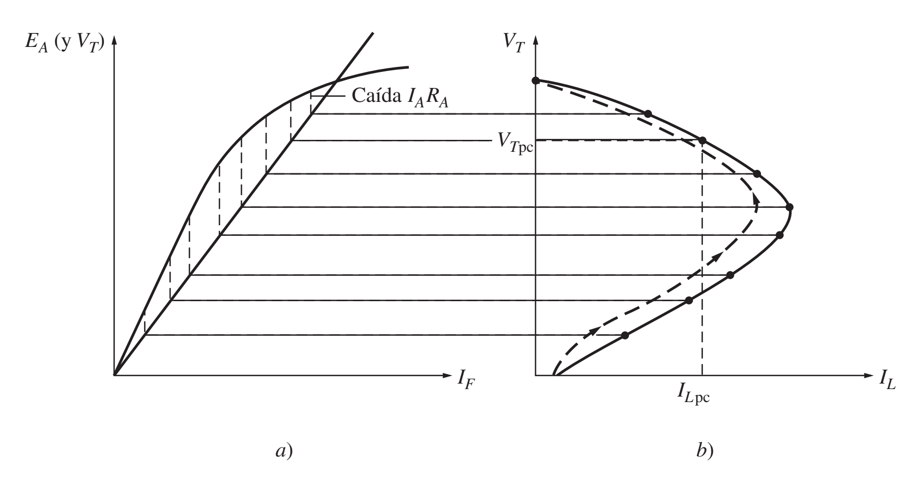


FIGURA 8-54 Deducción gráfica de la característica en las terminales de un generador de cd en derivación.

Debido a la reacción del inducido en un generador en derivación, este proceso se complica un poco más. La reacción del inducido produce una fuerza magnetomotriz desmagnetizadora en el generador al mismo tiempo que provoca una caída de $I_A R_A$ en la máquina.

Para analizar un generador con reacción del inducido, suponga que se conoce la corriente del inducido. Entonces se conoce la caída de voltaje resistiva $I_A R_A$ y se sabe la fuerza magnetomotriz desmagnetizadora de la corriente del inducido. El voltaje en las terminales del generador debe ser lo suficientemente grande como para alimentar el flujo del generador *después de restar los efectos de desmagnetización de la reacción del inducido*. Para cumplir con este requerimiento, tanto la fuerza magnetomotriz de la reacción del inducido como la caída $I_A R_A$ deben caber exactamente entre la línea de E_A y la línea de V_T. Para determinar el voltaje de salida de una cierta fuerza magnetomotriz, simplemente se debe localizar el lugar bajo la curva de magnetización donde el triángulo formado por la reacción del inducido y los efectos de $I_A R_A$ *caben exactamente* entre la línea de los posibles valores de V_T y la línea de los posibles valores de E_A (véase la figura 8-55).

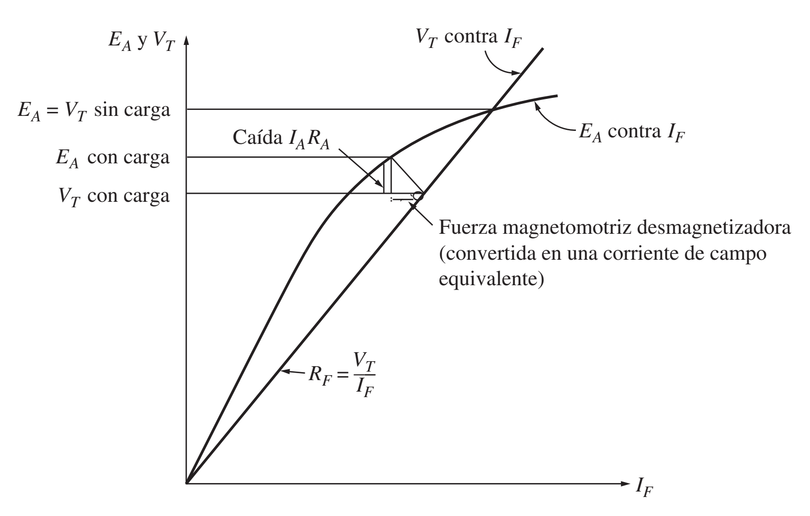


FIGURA 8-55 Análisis gráfico de un generador de cd en derivación con reacción del inducido.

8.14 GENERADOR DE CD EN SERIE

Un generador de cd en serie es aquel cuyo campo está conectado en serie con su inducido. Puesto que el inducido tiene una corriente *mucho* mayor que el campo en derivación, el campo en serie de un generador de este tipo tendrá muy pocas vueltas de alambre y el alambre utilizado será mucho más grueso que el alambre del campo en derivación. Debido a que la fuerza magnetomotriz está dada por la ecuación $\mathcal{F} = NI$, se puede producir exactamente la misma fuerza magnetomotriz con unas cuantas vueltas y una corriente alta que con muchas vueltas y una corriente baja. Puesto que la corriente a plena carga fluye a través de él, el campo está diseñado para tener la resistencia más baja posible. En la figura 8-56 se muestra el circuito equivalente de un generador de cd en serie. En éste, las corrientes del inducido, del campo y de línea tienen todas el mismo valor. La ecuación de la ley de voltaje de Kirchhoff de esta máquina es

$$V_T = E_A - I_A(R_A + R_S) \tag{8-47}$$

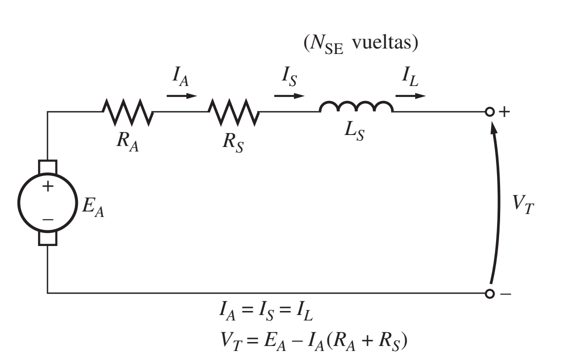


FIGURA 8-56 Circuito equivalente de un generador de cd en serie.

Característica de las terminales de un generador en serie

La curva de magnetización de un generador de cd en serie es muy parecida a la curva de magnetización de cualquier otro generador. Sin embargo,

en vacío no hay corriente de campo, por lo que se reduce V_T a un pequeño nivel dado por el flujo residual en la máquina. Conforme se incrementa la carga, aumenta la corriente de campo, por lo que E_A también lo hace con rapidez. La caída $I_A(R_A + R_S)$ también aumenta, pero al principio el incremento de E_A es mucho más rápido que el aumento de la caída $I_A(R_A + R_S)$, por lo que se incrementa V_T. Después de cierto tiempo la máquina se acerca al punto de saturación y E_A se vuelve casi constante. En este punto, la caída resistiva es el efecto predominante y V_T comienza a disminuir.

En la figura 8-57 se muestra este tipo de característica. Es obvio que esta máquina es una mala fuente de voltaje constante. De hecho, su regulación de voltaje es un número negativo grande.

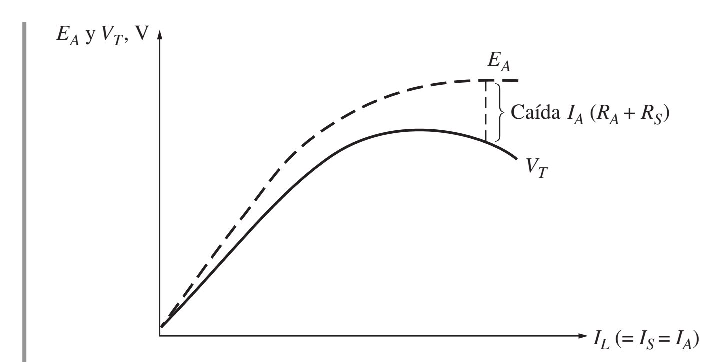


FIGURA 8-57 Deducción de la característica en las terminales de un generador de cd en serie.

Los generadores en serie sólo se utilizan en ciertas aplicaciones especializadas, donde se pueda sacar provecho de la empinada característica de voltaje del dispositivo. Un ejemplo de este tipo de operaciones es la soldadura en arco. Los generadores en serie que se utilizan en la soldadura en arco están diseñados deliberadamente para lograr una gran reacción del inducido, que les da una característica en las terminales como la que se observa en la figura 8-58. Nótese que cuando los electrodos de soldadura hacen contacto con ellos, antes de comenzar a soldar, fluye una corriente muy grande. Conforme el operador separa los electrodos de soldadura, hay un aumento muy pronunciado del voltaje del generador, mientras que la corriente permanece alta. Este voltaje asegura que a través del aire se mantenga la corriente entre los electrodos durante la soldadura en arco.

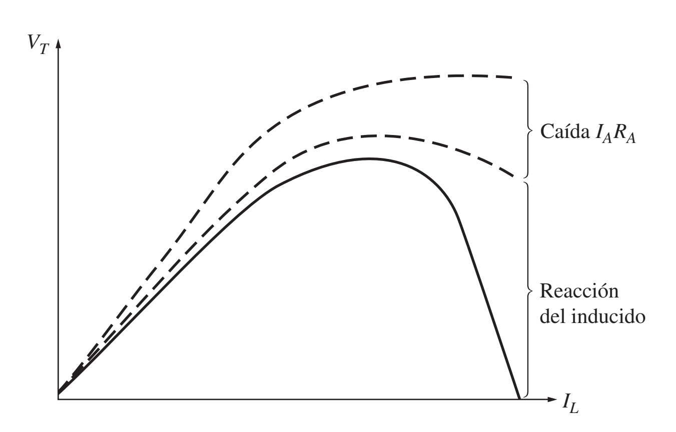


FIGURA 8-58 Característica en las terminales de un generador en serie con un gran efecto de reacción del inducido, adecuado para soldadura eléctrica.

8.15 GENERADOR DE CD COMPUESTO ACUMULATIVO

Un generador de cd compuesto acumulativo es un generador de cd *tanto con un campo en serie como con un campo en derivación*, conectados de tal manera que las fuerzas electromotrices de los dos se suman. La figura 8-59 muestra el circuito equivalente de un generador de cd compuesto acumulativo en la conexión de "derivación larga". Los puntos que aparecen en las dos bobinas de campo tienen el mismo significado que los puntos en un transformador: *la corriente que fluye hacia un punto produce una fuerza magnetomotriz positiva*. Nótese que la corriente del inducido fluye hacia el extremo marcado con un punto de la bobina de campo en serie y que la corriente en derivación I_F fluye hacia el extremo marcado con un punto de la bobina de campo en derivación. Por lo tanto, la fuerza magnetomotriz total de esta máquina está dada por

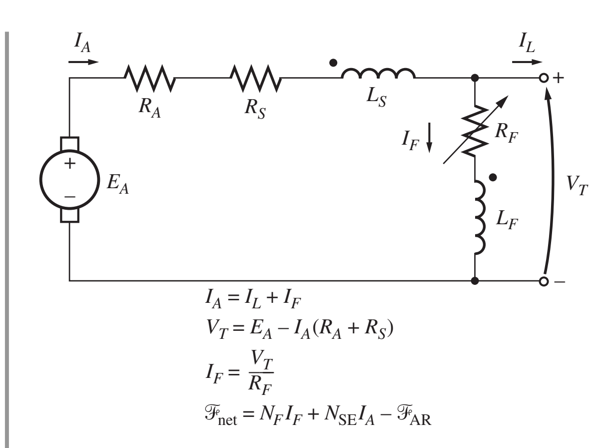


FIGURA 8-59 Circuito equivalente de un generador de cd compuesto acumulativo con una conexión en derivación larga.

$$\mathcal{F}_{net} = \mathcal{F}_F + \mathcal{F}_{SE} - \mathcal{F}_R \tag{8-48}$$

donde $\mathcal{F}_F$ es la fuerza magnetomotriz de campo en derivación, $\mathcal{F}_{SE}$ es la fuerza magnetomotriz de campo en serie y $\mathcal{F}_{RA}$ es la fuerza magnetomotriz de reacción del inducido. La corriente de campo en derivación efectiva equivalente de esta máquina está dada por

$$N_F I_F^* = N_F I_F + N_{SE} I_A - \mathcal{F}_{RA}$$

$$I_F^* = I_F + \frac{N_{SE}}{N_F} I_A - \frac{\mathscr{F}_{RA}}{N_F} \quad \textbf{(8-49)}$$

Las otras relaciones de corriente y voltaje de este generador son

$$I_A = I_F + I_L \quad \textbf{(8-50)}$$

$$V_T = E_A - I_A(R_A + R_S) \quad \textbf{(8-51)}$$

$$I_F = \frac{V_T}{R_F} \quad \textbf{(8-52)}$$

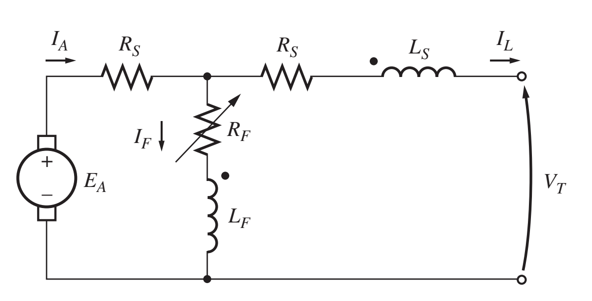


FIGURA 8-60 Circuito equivalente de un generador de cd compuesto acumulativo con una conexión en derivación corta.

Hay otra manera de conectar un generador compuesto acumulativo. Es la conexión de "derivación corta", donde el circuito de campo en derivación tiene una corriente I_L que fluye a través de él en lugar de I_A. En la figura 8-60 se muestra un generador de cd compuesto acumulativo con derivación corta.

Característica de las terminales de un generador de cd compuesto acumulativo

Para entender la característica de las terminales de un generador de cd compuesto acumulativo se requiere entender los efectos que se presentan dentro de la máquina.

Suponga que se incrementa la carga del generador. Entonces, conforme se incrementa la carga, se eleva la corriente de carga I_L. Puesto que $I_A = I_F + I_L\uparrow$, también aumenta la corriente del inducido I_A. En este momento se presentan dos efectos en el generador:

1. Conforme se eleva I_A, aumenta también la caída de voltaje $I_A(R_A + R_S)$. Esto tiende a causar un incremento del voltaje en las terminales $V_T = E_A - I_A\uparrow (R_A + R_S)$.
2. A medida que se eleva I_A, aumenta también la fuerza magnetomotriz de campo en serie $\mathscr{F}_{SE} = N_{SE} I_A$. Esto incrementa la fuerza magnetomotriz total $\mathscr{F}_{tot} = N_F I_F + N_{SE} I_A\uparrow$ que a su vez aumenta el flujo del generador. El aumento del flujo del generador incrementa E_A, que a su vez tiende a hacer que $V_T = E_A\uparrow - I_A(R_A + R_S)$ se eleve.

Estos dos efectos se oponen el uno al otro, uno tiende a *incrementar* V_T y el otro a *disminuir* V_T. ¿Qué efecto predomina en una máquina dada? Todo depende de cuántas vueltas en serie hay en los polos de la máquina. La pregunta se puede responder tomando varios casos individuales:

1. *Pocas vueltas en serie* (N_{SE} *pequeño*). Si sólo se tienen unas cuantas vueltas en serie, el efecto de la caída de voltaje resistiva prevalece sobre el otro. El voltaje cae igual que en un generador en derivación, pero no tan pronunciadamente (figura 8-61). Este tipo de construcción, donde el voltaje en las terminales a plena carga es menor que el voltaje en las terminales en vacío, se llama *hipocompuesto* o compuesto parcial.
2. *Más vueltas en serie* (N_{SE} *más grande*). Si hay unas cuantas vueltas de alambre más en serie en los polos, entonces en un principio gana el efecto fortalecedor del flujo y el voltaje en las terminales se incrementa con la carga. Sin embargo, conforme se sigue incrementando la carga, se llega a la saturación magnética y el efecto de la caída resistiva se vuelve más fuerte que el efecto de incremento de flujo. En una máquina de este

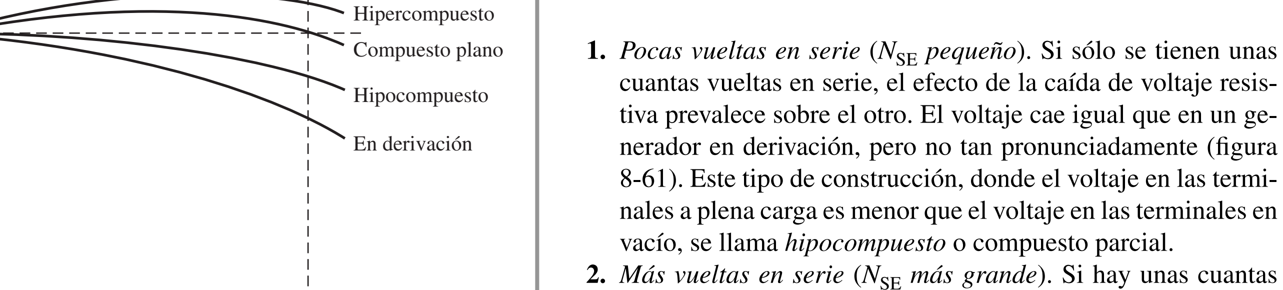


FIGURA 8-61 Características en las terminales de los generadores de cd compuestos acumulativos.

tipo *primero se eleva el voltaje en las terminales y luego cae conforme se incrementa la carga*. Si V_T en vacío es igual a V_T a plena carga, el generador se llama de *compuesto plano*.

3. *Se añaden aún más vueltas en serie* (N_{SE} *grande*). Si se añaden aún más vueltas en serie al generador, el efecto de fortalecimiento de flujo predomina por un periodo mayor antes de ceder el paso a la caída resistiva. El resultado es una característica con un voltaje en las terminales a plena carga mayor que el voltaje en las terminales en vacío. Si V_T a plena carga es mayor que V_T en vacío, el generador se llama *hipercompuesto*.

En la figura 8-61 se ilustran todas estas posibilidades.

También se pueden tener todas estas características de voltaje *en un solo generador* si se utiliza un resistor de desviación. La figura 8-62 muestra un generador de cd compuesto acumulativo con un número más o menos alto de vueltas en serie N_{SE}. Se conecta un resistor de desviación alrededor del campo en serie. Si se ajusta el resistor R_{desv} a un valor grande, la mayor parte de la corriente del inducido fluye a través de la bobina de campo en serie y el generador es hipercompuesto. Por otro lado, si se ajusta el resistor R_{desv} a un valor pequeño, la mayor parte de la corriente fluye alrededor del campo en serie a través de R_{desv} y el generador es hipocompuesto. Se puede ajustar suavemente el resistor para tener cualquier cantidad deseada de compuesto.

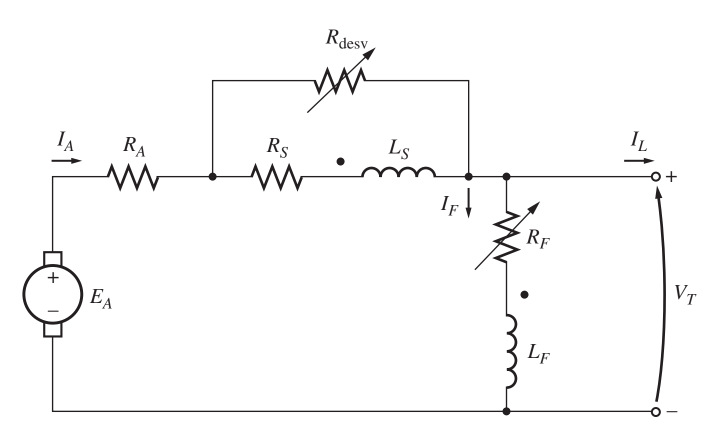


FIGURA 8-62 Generador de cd compuesto acumulativo con un resistor de desviación en serie.

Control de voltaje en los generadores de cd compuestos acumulativos

Las técnicas disponibles para controlar el voltaje en las terminales de un generador de cd compuesto acumulativo son exactamente las mismas que se emplean para controlar el voltaje de un generador de cd en derivación:

1. Cambio de la velocidad de rotación. Si aumenta ω_m, entonces aumenta $E_A = K\phi\omega_m\uparrow$, por lo que también aumenta el voltaje en las terminales $V_T = E_A\uparrow - I_A\,(R_A + R_S)$.
2. Cambio de la corriente de campo. Si disminuye R_F, entonces aumenta $I_F = V_T/R_F\downarrow$, que a su vez aumenta la fuerza magnetomotriz total del generador. Conforme aumenta $\mathscr{F}_{tot}$ se eleva el flujo ϕ en la máquina y aumenta $E_A = K\phi\uparrow\omega_m$. Por último, un incremento en E_A eleva V_T.

Análisis de generadores de cd compuestos acumulativos

Las ecuaciones (8-53) y (8-54) son la clave para describir las características en las terminales de un generador de cd compuesto acumulativo. La corriente de campo en derivación equivalente I_{eq} debida a los efectos del campo en serie y de la reacción del inducido está dada por

$$I_{eq} = \frac{N_{SE}}{N_F} I_A - \frac{\mathscr{F}_R}{N_F} \tag{8-53}$$

Por lo tanto, la corriente de campo en derivación efectiva total en la máquina es de

$$I_F^* = I_F + I_{eq} \tag{8-54}$$

Esta corriente equivalente I_{eq} representa la distancia horizontal hacia la derecha o hacia la izquierda de la línea de resistencia de campo ($R_F = V_T/R_F$) sobre los ejes de la curva de magnetización.

La caída resistiva del generador está dada por $I_A(R_A + R_S)$, que es la longitud sobre el eje vertical de la curva de magnetización. Tanto la corriente equivalente I_{eq} como la caída de voltaje resistiva $I_A(R_A + R_S)$ dependen de la fuerza de la corriente del inducido I_A. Por lo tanto, forman los dos lados de un triángulo cuya magnitud está en función de I_A. Para encontrar el voltaje de salida con cierta carga se debe determinar el tamaño del triángulo y encontrar el punto donde cabe *exactamente* entre la línea de la corriente de campo y la curva de magnetización.

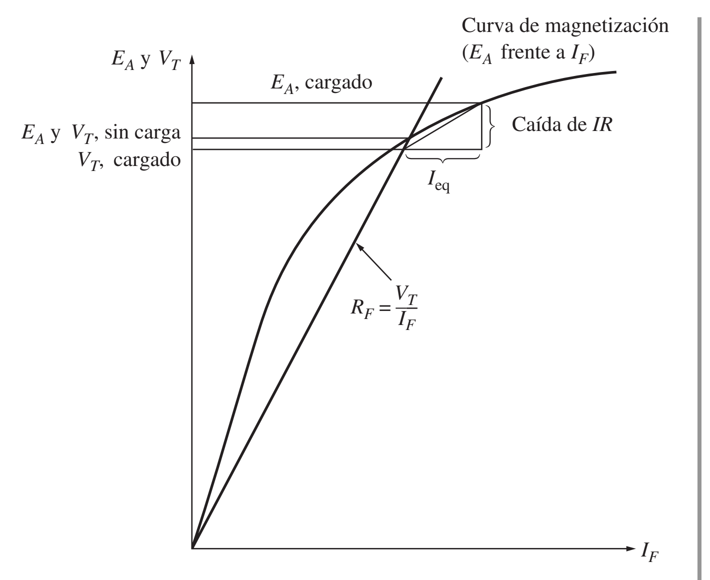


FIGURA 8-63 Análisis gráfico de un generador de cd compuesto acumulativo.

En la figura 8-63 se ilustra esta idea. El voltaje en las terminales en condiciones de vacío será el punto en el que se intersecan la línea del resistor y la curva de magnetización, igual que antes. Conforme se añade carga al generador, aumenta la fuerza magnetomotriz de campo en serie, lo cual incrementa la corriente de campo en derivación equivalente I_{eq} y la caída de voltaje resistiva $I_A(R_A + R_S)$ en la máquina. Para encontrar el nuevo voltaje de salida del generador, deslice la orilla del triángulo resultante que se encuentra más a la izquierda sobre la línea de corriente de campo en derivación hasta que la punta superior del triángulo toque la curva de magnetización. La punta superior del triángulo representa el voltaje interno generado por la máquina, mientras que la línea inferior representa el voltaje en las terminales.

La figura 8-64 muestra este proceso repetido varias veces para construir la característica completa de las terminales del generador.

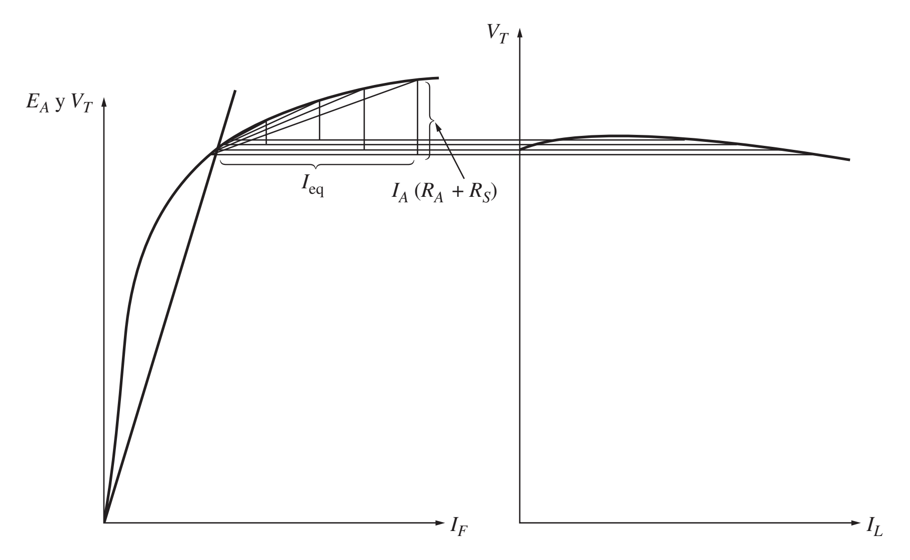


FIGURA 8-64 Deducción gráfica de la característica terminal de un generador de cd compuesto acumulativo.

8.16 GENERADOR DE CD COMPUESTO DIFERENCIAL

Un generador de cd compuesto diferencial es un generador tanto con un campo en derivación como con un campo en serie, pero ahora *sus fuerzas magnetomotrices se restan la una de la otra*. En la figura 8-65 se muestra el circuito equivalente de un generador de cd compuesto diferencial. Nótese que la corriente del inducido ahora fluye hacia *afuera* del extremo de una bobina marcado con punto, mientras que la corriente de campo en derivación fluye *hacia* el extremo de una bobina marcado con punto. En esta máquina, la fuerza magnetomotriz neta es

$$\mathscr{F}_{\text{net}} = \mathscr{F}_F - \mathscr{F}_{\text{SE}} - \mathscr{F}_{\text{R}} \tag{8-55}$$

$$\mathscr{F}_{\text{net}} = N_F I_F - N_{\text{SE}} I_A - \mathscr{F}_{\text{R}} \tag{8-56}$$

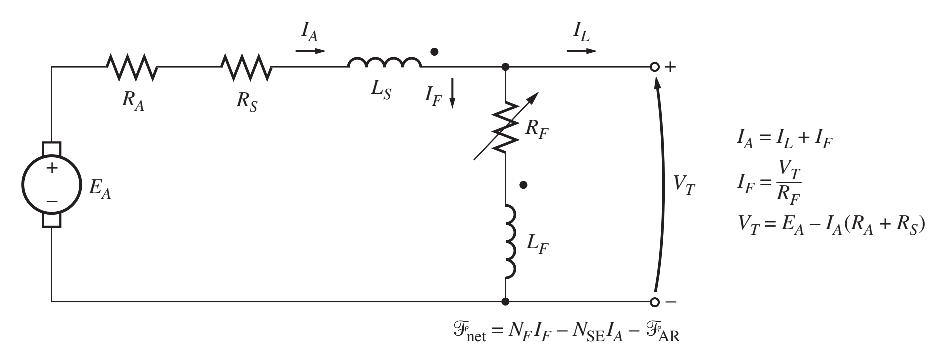


FIGURA 8-65 Circuito equivalente de un generador de cd compuesto diferencial con una conexión en derivación larga.

y la corriente de campo en derivación equivalente debida al campo en serie y a la reacción del inducido está dada por

$$I_{\text{eq}} = -\frac{N_{\text{SE}}}{N_F} I_A - \frac{\mathscr{F}_{\text{R}}}{N_F} \tag{8-57}$$

La corriente de campo en derivación efectiva total en la máquina es

$$I_F^* = I_F + I_{\text{eq}} \tag{8-58a}$$

o

$$I_F^* = I_F - \frac{N_{\text{SE}}}{N_F} I_A - \frac{\mathscr{F}_{\text{R}}}{N_F} \tag{8-58b}$$

Al igual que un generador compuesto acumulativo, el generador compuesto diferencial se puede conectar en derivación corta o en derivación larga.

Característica de las terminales de un generador de cd compuesto diferencial

En un generador de cd compuesto diferencial se generan los mismos dos efectos que están presentes en un generador de cd compuesto acumulativo. Sin embargo, en este caso ambos efectos actúan en la misma dirección. Éstos son:

1. Conforme se eleva I_A, también aumenta la caída de voltaje $I_A(R_A + R_S)$. Este incremento tiende a provocar que disminuya el voltaje en las terminales $V_T = E_A - I_A \uparrow (R_A + R_S)$.

2. Conforme se eleva I_A, también aumenta la fuerza magnetomotriz de campo en serie $\mathscr{F}_{SE} = N_{SE} I_A$. Este incremento de la fuerza magnetomotriz de campo en serie *reduce* la fuerza magnetomotriz neta del generador ($\mathscr{F}_{tot} = N_F I_F - N_{SE} I_A \uparrow$), que a su vez reduce el flujo neto del generador. Un decremento del flujo disminuye E_A, que a su vez reduce V_T.

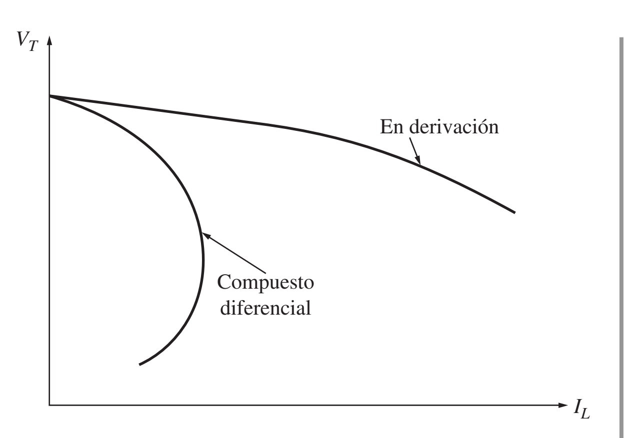


FIGURA 8-66 Característica en las terminales de un generador de cd compuesto diferencial.

Puesto que ambos efectos tienden a *disminuir* V_T, el voltaje cae drásticamente conforme se incrementa la carga en el generador. En la figura 8-66 se muestra la típica característica de las terminales de un generador de cd compuesto diferencial.

Control de voltaje en los generadores de cd compuestos diferenciales

Aun cuando las características de caída de voltaje de un generador de cd compuesto diferencial son bastante malas, se puede ajustar el voltaje en las terminales para cualquier carga. Las técnicas disponibles para ajustar el voltaje en las terminales son exactamente las mismas que en los casos de los generadores de cd en derivación y compuestos acumulativos:

1. Cambio de la velocidad de rotación ω_m.
2. Cambio de la corriente de campo I_F.

Análisis gráfico de un generador de cd compuesto diferencial

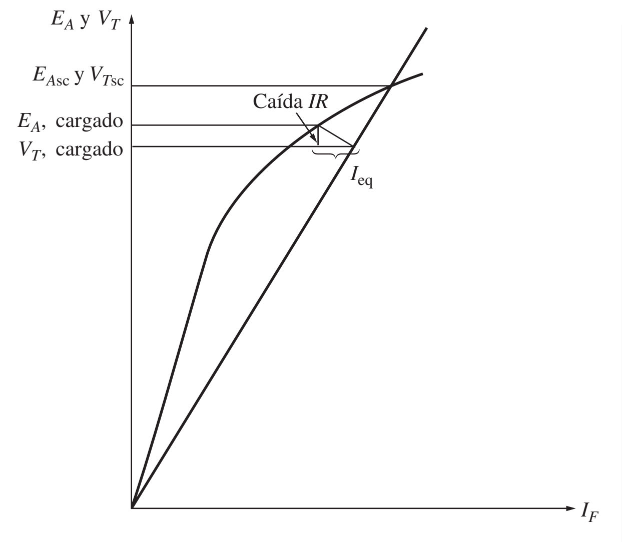


FIGURA 8-67 Análisis gráfico de un generador de cd compuesto diferencial.

La característica de voltaje de un generador de cd compuesto diferencial se determina en forma gráfica de la misma manera que como se determinó la de un generador de cd compuesto acumulativo. Véase la figura 8-67 para encontrar la característica en las terminales de la máquina.

La porción de la corriente de campo en derivación efectiva debida al campo en derivación real siempre es igual a V_T/R_F, puesto que esta cantidad de corriente está presente en el campo en derivación. El resto de la corriente de campo efectiva está dada por I_{eq} y es igual a la suma de los efectos del campo en serie y de la reacción del inducido. La corriente equivalente I_{eq} representa la distancia horizontal *negativa* sobre los ejes de la curva de magnetización, puesto que tanto el campo en serie como la reacción del inducido se restan.

La caída resistiva en un generador está dada por $I_A(R_A + R_S)$, que es la longitud a lo largo del eje vertical de la curva de magnetización. Para encontrar el voltaje de salida de una carga dada, se debe determinar el tamaño del triángulo formado por la caída de voltaje resistiva e I_{eq} y encontrar el punto en el que cabe *exactamente* entre la línea de corriente de campo y la curva de magnetización.

La figura 8-68 muestra este proceso repetido varias veces para construir la característica completa de las terminales del generador.

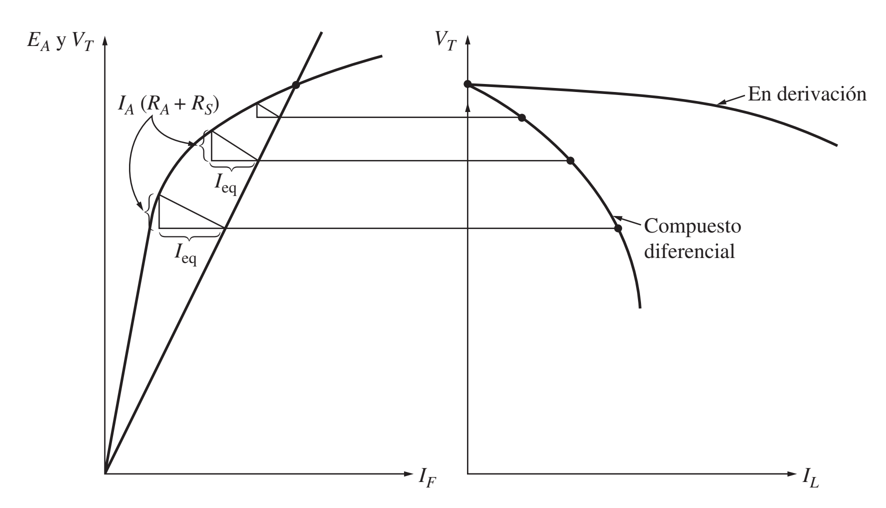


FIGURA 8-68 Deducción gráfica de la característica en las terminales de un generador de cd compuesto diferencial.

8.17 RESUMEN

Hay varios tipos de motores de cd que difieren en la forma en que se derivan sus flujos de campo. Estos tipos de motor son: de excitación separada, en derivación, de imán permanente, en serie y compuesto. La forma de obtener el flujo afecta la manera como éste varía debido a la carga que a su vez afecta la característica par-velocidad general del motor.

Un motor de cd en derivación y de excitación separada tiene una característica par-velocidad cuya velocidad cae linealmente conforme se incrementa el par. Su velocidad se puede controlar por medio del cambio de la corriente de campo, del voltaje del inducido o de la resistencia del inducido.

Un motor de cd de imán permanente es la misma máquina básica excepto en que el flujo se deriva de imanes permanentes. Su velocidad se puede controlar con cualquiera de los métodos mencionados en el párrafo anterior, excepto el cambio en la corriente de campo.

El motor en serie tiene el par de arranque más alto de todos los motores de cd, pero tiende a embalarse en vacío. Se utiliza para aplicaciones que requieren de un par muy alto donde no es importante la regulación de velocidad, como en el arranque de un coche.

Un motor de cd compuesto acumulativo es un punto medio entre el motor en serie y el motor en derivación y tiene algunas de las mejores características de cada uno. Por otro lado, un motor de cd compuesto diferencial es un completo desastre. Es inestable y tiende a acelerarse demás conforme se le añade carga.

Los generadores de cd son máquinas de cd que se utilizan como generadores. Hay varios tipos diferentes de generadores de cd que difieren entre sí en la forma en que se derivan sus flujos de campo. Estos métodos afectan las características de salida de los diferentes tipos de generadores. Los tipos comunes de generadores de cd son: de excitación separada, en derivación, en serie, compuesto acumulativo y compuesto diferencial.

Los generadores de cd en derivación y compuestos dependen de la no linealidad de sus curvas de magnetización para tener voltajes de salida estables. Si la curva de magnetización de una máquina de cd fuera una línea recta, entonces la curva de magnetización y la línea de voltaje en las terminales del generador nunca se intersecarían. Entonces, no habría voltaje en vacío estable en el generador. Puesto que los efectos no lineales son el núcleo de la operación del generador, los voltajes de salida de los generadores de cd sólo se pueden determinar gráficamente o en forma numérica por medio de una computadora.

Hoy en día, los generadores de cd han sido reemplazados en muchas aplicaciones por fuentes de potencia de ca y componentes electrónicos en estado sólido. Han sido reemplazados incluso en los coches, que es uno de los usos más comunes de potencia de cd.

PREGUNTAS

8-1. ¿Qué es la regulación de velocidad de un motor de cd?

8-2. ¿Cómo se puede controlar la velocidad de un motor de cd en derivación? Explique detalladamente.

8-3. ¿Cuál es la diferencia práctica entre un motor de cd de excitación separada y uno en derivación?

8-4. ¿Qué efecto tiene la reacción del inducido en la característica par-velocidad de un motor de cd en derivación? ¿Pueden ser graves los efectos de la reacción del inducido? ¿Qué se puede hacer para remediar este problema?

8-5. ¿Cuáles son las características deseables de los imanes permanentes en las máquinas MCDIP?

8-6. ¿Cuáles son las características principales de un motor de cd en serie? ¿Cuáles son sus usos?

8-7. ¿Cuáles son las características de un motor de cd compuesto acumulativo?

8-8. ¿Cuáles son los problemas asociados con un motor de cd compuesto diferencial?

8-9. ¿Qué sucede en un motor de cd en derivación si se abre el circuito de campo cuando está en operación?

8-10. ¿Por qué se utiliza un resistor de arranque en los circuitos de los motores de cd?

8-11. ¿Cómo se puede retirar un resistor de arranque de cd del circuito del inducido de un motor en el momento del arranque?

8-12. ¿Qué es el sistema de control de motor Ward-Leonard? ¿Cuáles son sus ventajas y sus desventajas?

8-13. ¿Qué es la regeneración?

8-14. ¿Cuáles son las ventajas y desventajas de los accionadores de motor en estado sólido en comparación con el sistema Ward-Leonard?

8-15. ¿Cuál es el propósito del relé de pérdida de campo?

8-16. ¿Qué tipos de características de protección se incluyen en un accionador de motor de cd en estado sólido típico? ¿Cómo funcionan?

8-17. ¿Cómo se puede invertir la dirección de rotación de un motor de cd de excitación separada?

8-18. ¿Cómo se puede invertir la dirección de rotación de un motor de cd en derivación?

8-19. ¿Cómo se puede invertir la dirección de rotación de un motor de cd en serie?

8-20. Nombre y describa las características de los cinco tipos de generadores que se estudiaron en este capítulo.

8-21. ¿Cómo se desarrolla el incremento de voltaje en un generador de cd en derivación durante el arranque?

8-22. ¿Qué puede provocar que falle el incremento de voltaje durante el arranque? ¿Cómo se puede remediar este problema?

8-23. ¿Cómo afecta la reacción del inducido el voltaje de salida en un generador de cd de excitación separada?

8-24. ¿Qué provoca la rápida caída de voltaje con el incremento en la carga en un generador de cd compuesto diferencial?

PROBLEMAS

Los problemas 8-1 a 8-12 se refieren al motor de cd siguiente:

$P_{\text{nom}} = 30$ hp	$I_{L,\text{nom}} = 110$ A
$V_T = 240$ V	$N_F = 2\,700$ vueltas por polo
$n_{\text{nom}} = 1\,800$ r/min	$N_{SE} = 14$ vueltas por polo
$R_A = 0.19\ \Omega$	$R_F = 75\ \Omega$
$R_S = 0.02\ \Omega$	$R_{\text{ajus}} = 100$ a $400\ \Omega$

Las pérdidas giratorias son de 3 550 W a plena carga.

En la figura P8-1 se puede observar la curva de magnetización del motor.

En los problemas 8-1 al 8-7 suponga que el motor descrito se puede conectar en derivación. En la figura P8-2 se muestra el circuito equivalente del motor en derivación.

8-1. Si se ajusta el resistor R_{ajus} a 175 Ω, ¿cuál es la velocidad de rotación del motor en condiciones de vacío?

8-2. Suponiendo que no hay reacción del inducido, ¿cuál es la velocidad de rotación del motor a plena carga? ¿Cuál es la regulación de velocidad del motor?

8-3. Si el motor opera a plena carga y se incrementa su resistencia variable R_{ajus} a 250 Ω, ¿cuál es su nueva velocidad? Compare la velocidad a plena carga del motor con $R_{\text{ajus}} = 175\ \Omega$ con la velocidad a plena carga con $R_{\text{ajus}} = 250\ \Omega$. (Haga caso omiso de la reacción del inducido, al igual que en el problema anterior.)

8-4. Suponga que el motor opera a plena carga y que el resistor variable R_{ajus} es una vez más de 175 Ω. Si la reacción del inducido es de 2 000 A • vueltas a plena carga, ¿cuál es la velocidad del motor? ¿Cómo es en comparación con el resultado del problema 8-2?

8-5. Si se puede ajustar R_{ajus} entre 100 y 400 Ω, ¿cuáles son las velocidades máxima y mínima posibles de la carga con este motor?

8-6. ¿Cuál es la corriente de arranque de la máquina si se pone en marcha conectándola directamente a la fuente de potencia V_T? ¿Cómo es la corriente de arranque en comparación con la corriente a plena carga del motor?

8-7. Haga una gráfica de la característica par-velocidad del motor suponiendo que no hay reacción del inducido y una reacción del inducido a plena carga de 1 200 A • vueltas. (Suponga que la reacción del inducido se incrementa linealmente con un incremento en la corriente del inducido.)

Para los problemas 8-8 y 8-9, el motor de cd en derivación se conecta en excitación separada, como se muestra en la figura P8-3. Tiene un voltaje de campo fijo V_F de 240 V y un voltaje del inducido V_A que puede variar de 120 a 240 V.

8-8. ¿Cuál es la velocidad en vacío de este motor de excitación separada cuando $R_{\text{ajus}} = 175\ \Omega$ y *a*) $V_A = 120$, *b*) $V_A = 180$ V y *c*) $V_A = 240$ V?

8-9. En el caso del motor de excitación separada del problema 8-8:

a) ¿Cuál es la velocidad máxima posible en vacío si varía tanto V_A como R_{ajus}?

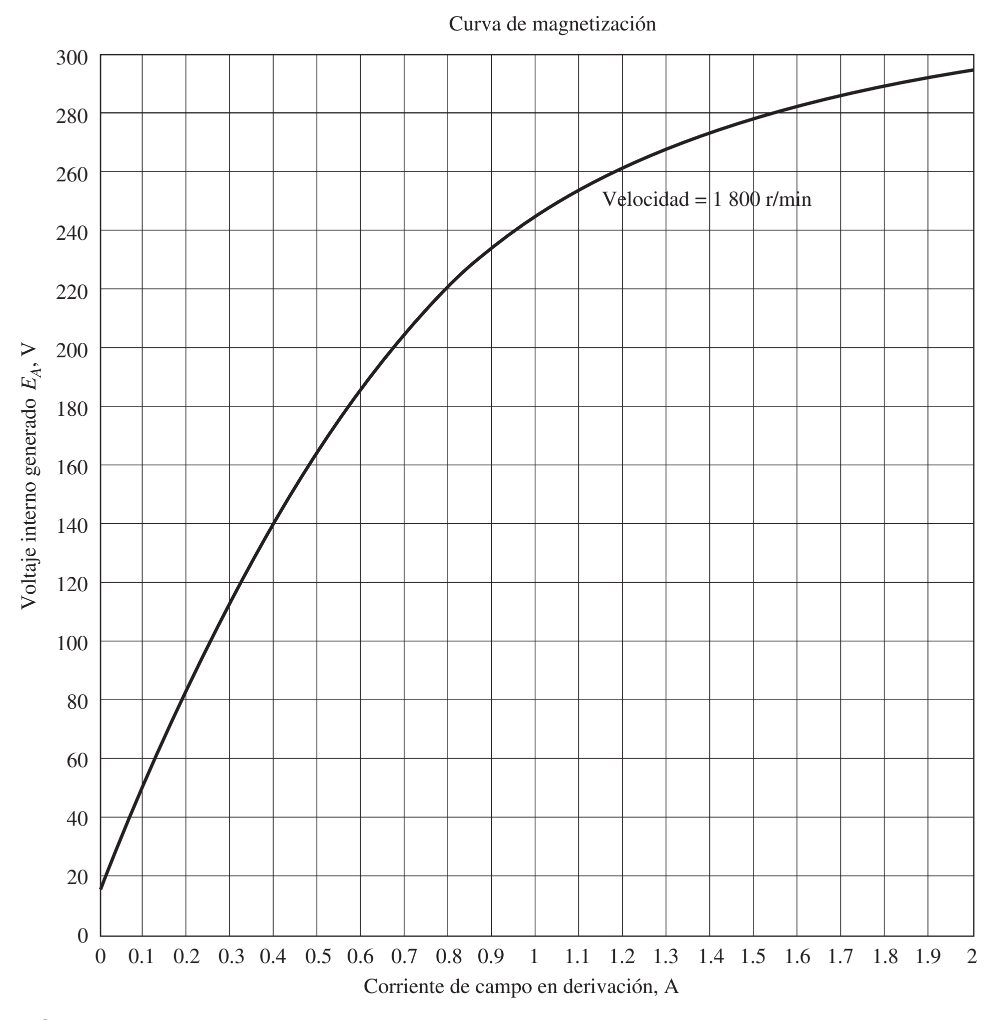


FIGURA P8-1 Curva de magnetización del motor de cd de los problemas 8-1 a 8-12. Esta curva se hizo a una velocidad constante de 1 800 r/min.

b) ¿Cuál es la velocidad mínima posible en vacío si se modifica tanto V_A como R_{ajus}?

c) ¿Cuál es la eficiencia del motor en condiciones nominales? [*Nota:* Suponga que 1) la caída de voltaje en escobilla es de 2 V; 2) la pérdida de núcleo se debe determinar con un voltaje de inducido igual al voltaje de inducido bajo plena carga, y 3) las pérdidas por carga dispersa son de 1% a plena carga.]

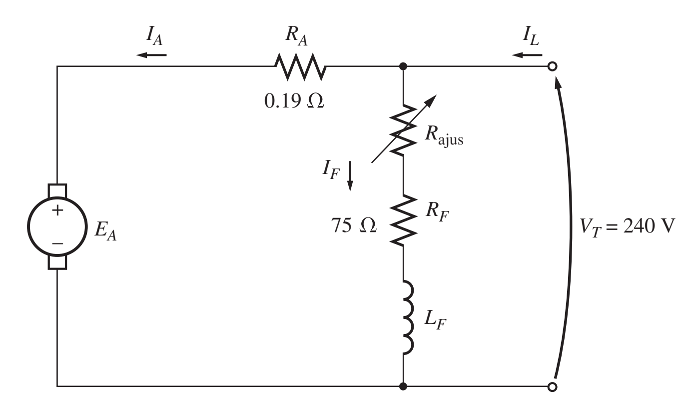


FIGURA P8-2 Circuito equivalente del motor en derivación de los problemas 8-1 a 8-7.

En los problemas 8-10 a 8-11, la conexión del motor es acumulativamente compuesta, como se muestra en la figura P8-4.

8-10. Si el motor se conecta en compuesto acumulativo con R_{ajus} = 175 Ω,

a) ¿cuál es la velocidad en vacío?

b) ¿Cuál es la velocidad a plena carga?

c) ¿Cuál es la regulación de velocidad?

d) Calcule y haga la gráfica de la característica par-velocidad de este motor. (Desprecie los efectos de reacción del inducido en este problema.)

8-11. El motor se conecta en compuesto acumulativo y opera a plena carga. ¿Cuál será la nueva velocidad del motor si se incrementa R_{ajus} a 250 Ω? ¿Cómo es la nueva velocidad en comparación con la velocidad a plena carga que se calculó en el problema 8-10?

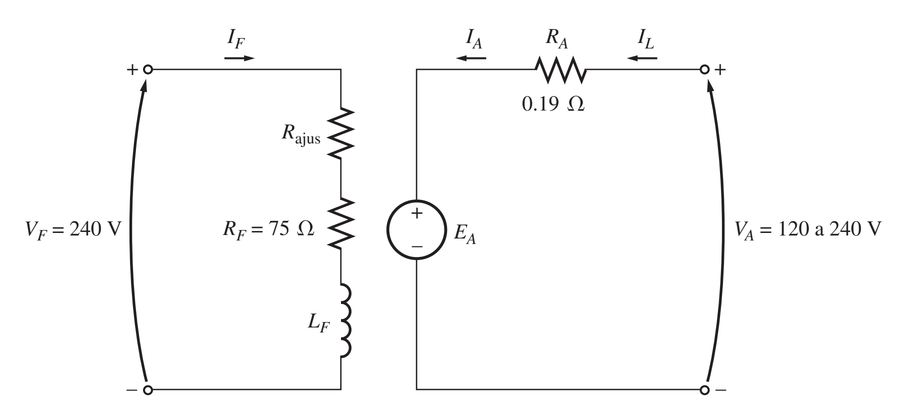


FIGURA P8-3 Circuito equivalente del motor de excitación separada de los problemas 8-8 y 8-9.

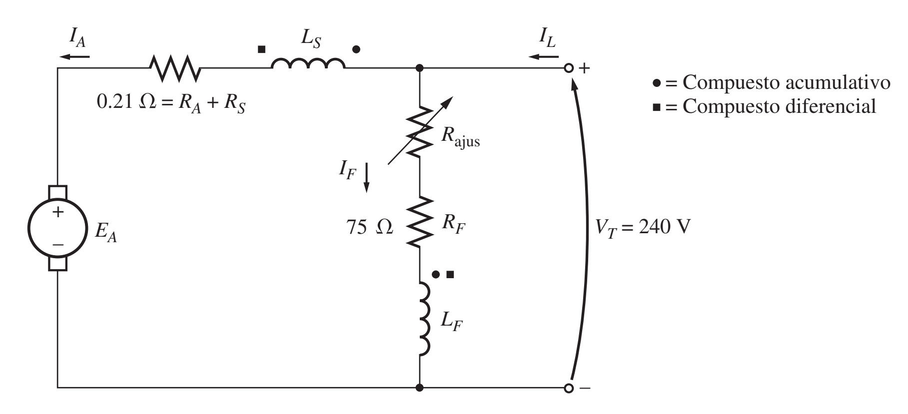


FIGURA P8-4 Circuito equivalente del motor compuesto de los problemas 8-10 a 8-12.

En los problemas 8-12, el motor está conectado en compuesto diferencial como se muestra en la figura P8-4.

8-12. Ahora el motor se conecta en compuesto diferencial.

a) Si $R_{ajus} = 175$ Ω, ¿cuál es la velocidad en vacío del motor?
b) ¿Cuáles son las velocidades del motor cuando la corriente del inducido llega a 20 A, a 40 A y a 60 A?
c) Calcule y haga la gráfica de la curva característica par-velocidad del motor.

8-13. Un motor de cd en serie de 15 hp y 120 V tiene una resistencia del inducido de 0.1 Ω y una resistencia de campo en serie de 0.08 Ω. A plena carga, la corriente de entrada es de 115 A y la velocidad nominal es de 1 050 r/min. En la figura P8-5 se muestra su curva de magnetización. Las pérdidas en el núcleo son de 420 W y las pérdidas mecánicas de 460 W a plena carga. Suponga que las pérdidas mecánicas varían con el cubo de la velocidad del motor y que las pérdidas en el núcleo son constantes.

a) ¿Cuál es la eficiencia del motor a plena carga?
b) ¿Cuál es su velocidad y eficiencia si opera con una corriente del inducido de 70 A?
c) Haga la gráfica característica par-velocidad del motor.

8-14. Un motor en serie de 20 hp, 240 V, 76 A y 900 r/min, tiene un devanado de campo de 33 vueltas por polo. La resistencia del inducido es de 0.09 Ω y su resistencia de campo es de 0.06 Ω. La curva de magnetización expresada en términos de fuerza magnetomotriz y E_A a 900 r/min está dada por la tabla siguiente:

E_A, V	95	150	188	212	229	243
$\mathscr{F}$, A • vueltas	500	1 000	1 500	2 000	2 500	3 000

La reacción del inducido es despreciable en esta máquina.

a) Calcule el par, la velocidad y la potencia de salida del motor a 33, 67, 100 y 133% de la corriente de inducido a plena carga. (Desprecie las pérdidas rotatorias.)
b) Haga una gráfica de la característica par-velocidad de la máquina.

8-15. Se probó un motor de cd en derivación de 300 hp, 440 V, 560 A y 863 r/min y se obtuvieron los siguientes resultados:

Prueba de rotor bloqueado:

$V_A = 14.9$ V excluyendo escobillas $\quad V_F = 440$ V
$I_A = 500$ A $\quad I_F = 7.52$ A

Operación en vacío:

$V_A = 440$ V incluyendo escobillas $\quad I_F = 7.50$ A
$I_A = 23.1$ A $\quad n = 863$ r/min

¿Cuál es la eficiencia del motor en condiciones nominales? [*Nota:* Suponga que 1) la caída de voltaje en las escobillas es

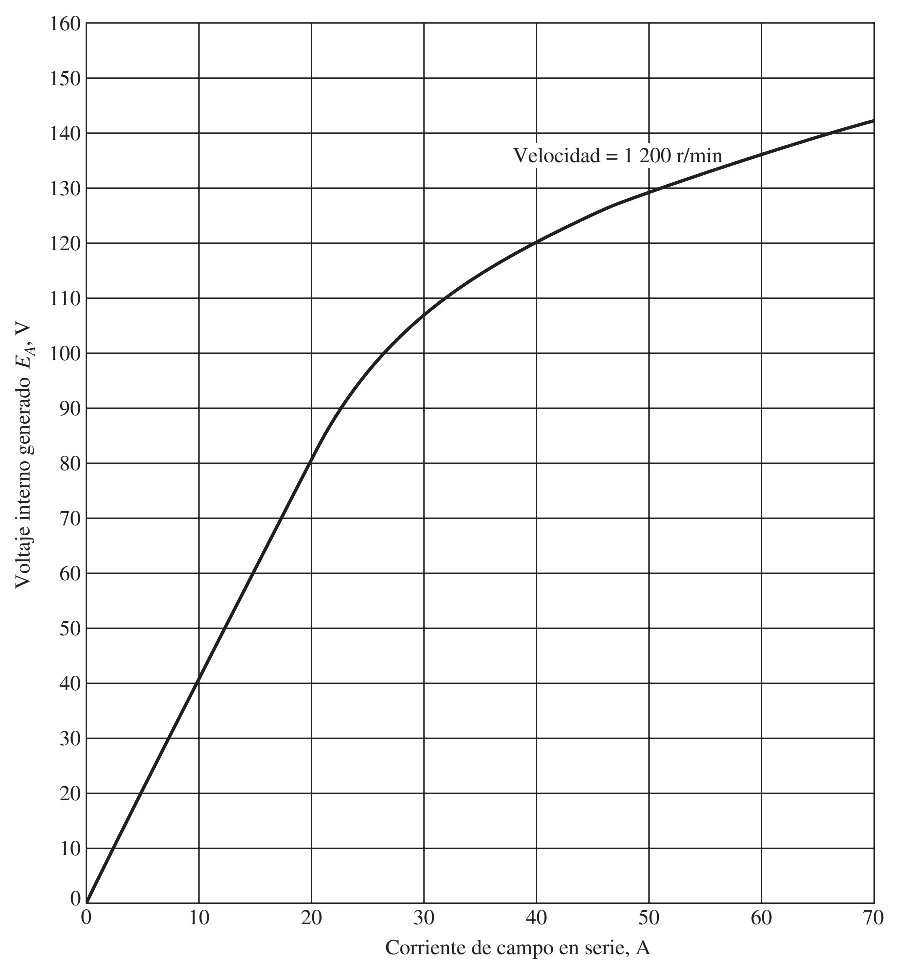


FIGURA P8-5 Curva de magnetización del motor en serie del problema 8-13. Esta curva se tomó a una velocidad constante de 1 200 r/min.

de 2 V, 2) las pérdidas en el núcleo se determinarán con un voltaje del inducido igual al voltaje del inducido a plena carga y 3) las pérdidas misceláneas son de 1% a plena carga.]

Los problemas 8-16 a 8-19 se refieren a un motor de cd de 240 V y 100 A que tiene tanto devanados en serie como en derivación. Sus características son:

$R_A = 0.14\ \Omega$	$N_F = 1\ 500$ vueltas
$R_S = 0.05\ \Omega$	$N_{SE} = 12$ vueltas
$R_F = 200\ \Omega$	$n_m = 3\ 000$ r/min

$R_{ajus} = 0$ a $300\ \Omega$, actualmente a $120\ \Omega$

Este motor tiene devanados de compensación e interpolos. En la figura P8-6 se muestra la curva de magnetización del motor a 3 000 r/min.

8-16. El motor descrito está conectado *en derivación*.

a) ¿Cuál es la velocidad en vacío del motor cuando $R_{ajus} = 120\ \Omega$?
b) ¿Cuál es su velocidad a plena carga?
c) ¿Cuál es su regulación de voltaje?
d) Dibuje la característica par-velocidad de este motor.
e) En condiciones de vacío, ¿qué gama de velocidades se puede lograr ajustando R_{ajus}?

8-17. Ahora esta máquina se conecta como un motor de cd compuesto acumulativo con una $R_{ajus} = 120\ \Omega$.

a) ¿Cuál es la velocidad en vacío de este motor?
b) ¿Cuál es la velocidad a plena carga del motor?
c) ¿Cuál es su regulación de voltaje?
d) Haga la gráfica de la característica par-velocidad del motor.

8-18. El motor ahora se conecta en compuesto diferencial con una $R_{ajus} = 120\ \Omega$. Deduzca la forma de su característica par-velocidad.

8-19. Ahora se construye un motor en serie con esta máquina por medio de la total eliminación del campo en derivación. Deduzca la característica par-velocidad del motor resultante.

8-20. Se diseña un circuito de arranque automático para un motor en derivación de 20 hp, 240 V y 75 A. La resistencia del inducido del motor es de 0.12 Ω y la resistencia del campo en derivación es de 40 Ω. El motor debe arrancar con no más de 250% de la corriente del inducido nominal y en cuanto la corriente baje a su valor nominal se debe retirar un tramo del

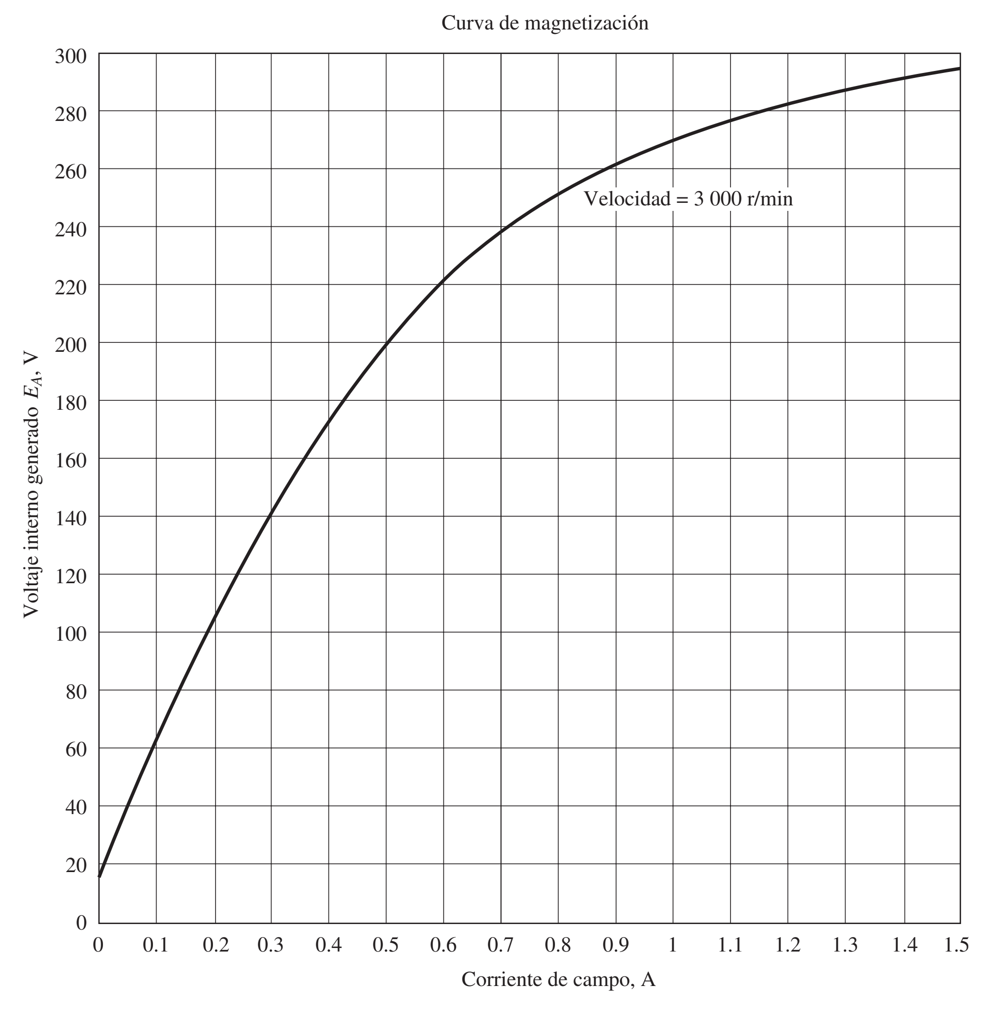


FIGURA P8-6 Curva de magnetización del motor de cd de los problemas 8-16 a 8-19. Esta curva se hizo a velocidad constante de 3 000 r/min.

resistor de arranque. ¿Cuántos tramos del resistor de arranque se requieren y qué tan grande debe ser cada uno?

8-21. Un motor de cd en derivación de 10 hp, 120 V y 1 000 r/min tiene una corriente del inducido a plena carga de 70 A cuando opera en condiciones nominales. La resistencia del inducido del motor es $R_A = 0.12\ \Omega$ y la resistencia de campo R_F es de 40 Ω. Se puede modificar la resistencia ajustable en el circuito de campo R_{ajus} dentro del intervalo de 0 a 200 Ω y actualmente es de 100 Ω. Se puede despreciar la reacción del inducido en esta máquina. La curva de magnetización de este motor, tomada a una velocidad de 1 000 r/min, se da en forma tabular a continuación:

E_A, V	5	78	95	112	118	126
I_F, A	0.00	0.80	1.00	1.28	1.44	2.88

a) ¿Cuál es la velocidad del motor cuando opera en las condiciones nominales especificadas arriba?

b) La potencia de salida del motor es de 10 hp en condiciones nominales. ¿Cuál es su par de salida?

c) ¿Cuáles son las pérdidas en el cobre y las pérdidas giratorias en el motor a plena carga (pase por alto las pérdidas misceláneas)?

d) ¿Cuál es la eficiencia del motor a plena carga?

e) Si se descarga el motor sin cambiar el voltaje en las terminales ni R_{ajus}, ¿cuál es su velocidad en vacío?

f) Suponga que el motor opera en las condiciones de vacío descritas en el inciso *e*). ¿Qué le sucedería al motor si se abre su circuito de campo? Si se ignora la reacción del inducido, ¿cuál sería la velocidad final en estado estacionario del motor en estas condiciones?

g) ¿Qué gama de velocidades en vacío tiene este motor dado el intervalo de ajustes disponible de la resistencia de campo con R_{ajus}?

8-22. En la figura P8-7 se ilustra la curva de magnetización de un generador de cd de excitación separada. El generador tiene los siguientes valores nominales: 6 kW, 120 V, 50 A y 1 800 r/min. En la figura P8-8 se muestra el generador. Su circuito de campo tiene un valor nominal de 5 A. Se conoce la siguiente información sobre la máquina:

$R_A = 0.18\ \Omega$ $\qquad V_F = 120$ V

$R_{\text{ajus}} = 0$ a $40\ \Omega$ $\qquad R_F = 20\ \Omega$

$N_F = 1\ 000$ vueltas por polo

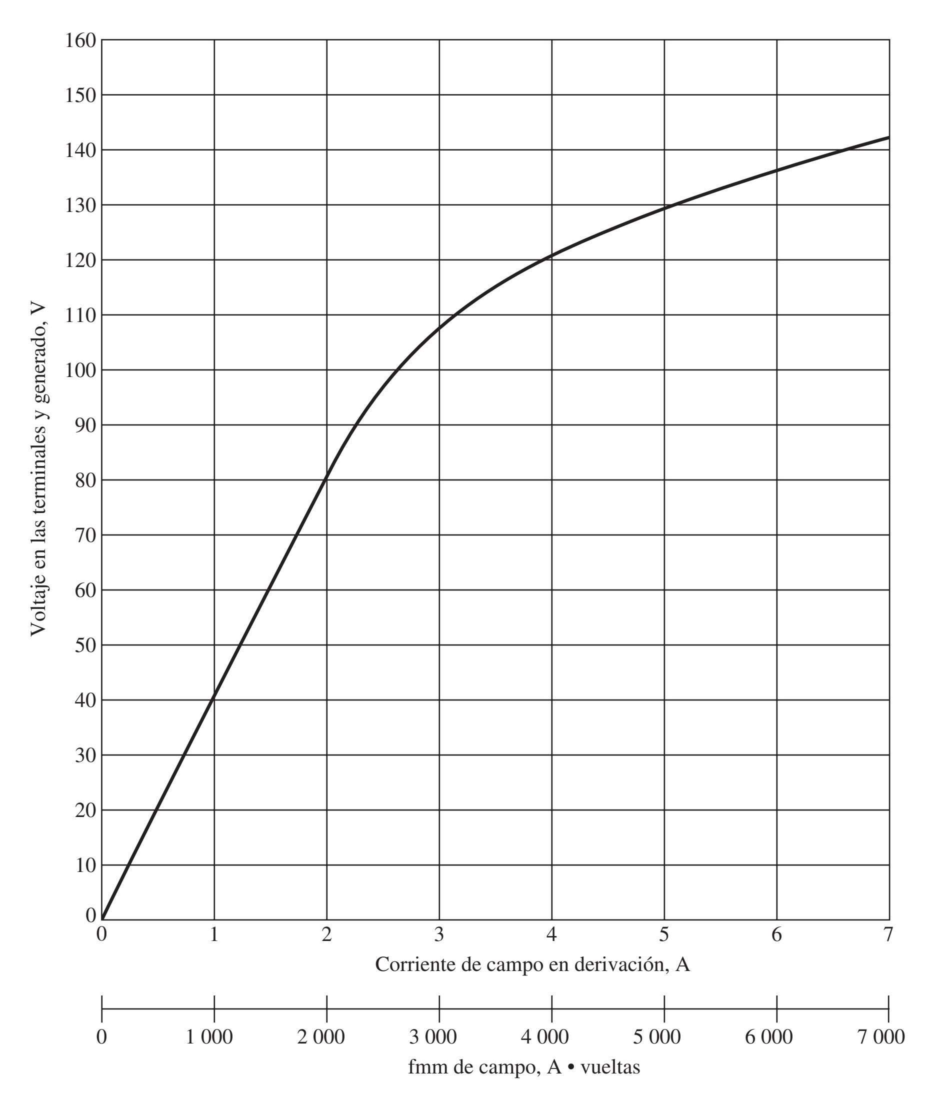


FIGURA P8-7 Curva de magnetización de los problemas 8-22 a 8-28. Esta curva se tomó a una velocidad de 1 800 r/min.

Responda las siguientes preguntas sobre el generador bajo el supuesto de que no hay reacción del inducido.

a) Si este generador opera en vacío, ¿cuál es el rango de ajustes de voltaje que se puede lograr si se modifica R_{ajus}?

b) Si se permite que el reóstato de campo varíe de 0 a 30 Ω y que la velocidad del generador varíe de 1 500 a 2 000 r/min, ¿cuál es el voltaje mínimo y máximo en vacío del generador?

8-23. Si la corriente del inducido del generador del problema 8-22 es de 50 A, la velocidad del generador es de 1 700 r/min y el voltaje en las terminales es de 106 V, ¿cuánta corriente de campo debe fluir en el generador?

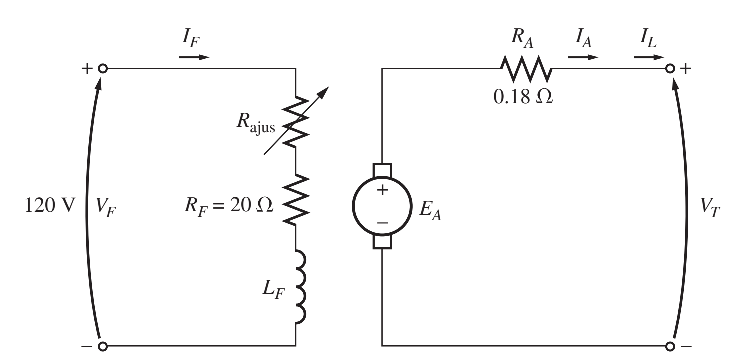


FIGURA P8-8 Generador de cd de excitación separada de los problemas 8-22 a 8-24.

8-24. Si supone que el generador del problema 8-22 tiene una reacción del inducido a plena carga equivalente a 400 A • vueltas de fuerza magnetomotriz, ¿cuál será el voltaje en las terminales del generador cuando $I_F = 5$ A, $n_m = 1\,700$ r/min e $I_A = 50$ A?

8-25. La máquina del problema 8-22 se reconecta como un generador en derivación y se muestra en la figura P8-9. Se ajusta el resistor de campo en derivación R_{ajus} a 10 Ω y la velocidad del generador es de 1 800 r/min.

a) ¿Cuál es el voltaje en las terminales en vacío del generador?
b) Si supone que no hay reacción del inducido, ¿cuál es el voltaje en las terminales del generador con una corriente del inducido de 20 A? ¿Y de 40 A?
c) Si supone que hay una reacción del inducido igual a 300 A • vueltas a plena carga, ¿cuál es el voltaje en las terminales del generador con una corriente del inducido de 20 A? ¿Y de 40 A?
d) Calcule y haga la gráfica de las características de las terminales de este generador con y sin reacción del inducido.

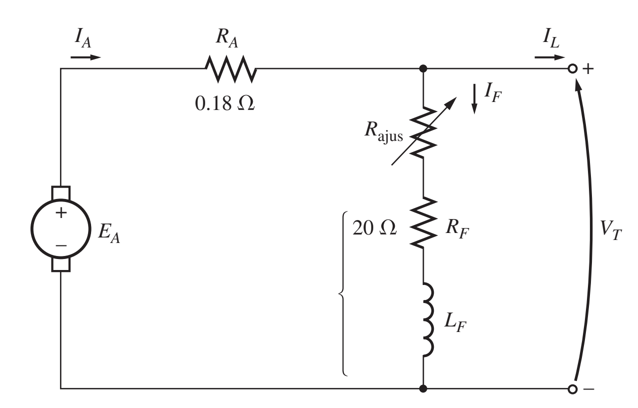


FIGURA P8-9 Generador de cd en derivación de los problemas 8-25 y 8-26.

8-26. Si la máquina del problema 8-25 opera a 1 800 r/min con una resistencia de campo $R_{\text{ajus}} = 10$ Ω y una corriente del inducido de 25 A, ¿cuál será el voltaje en las terminales? Si la resistencia de campo disminuye en 5 Ω, mientras que la corriente del inducido permanece en 25 A, ¿cuál será el nuevo voltaje en las terminales? (Suponga que no hay reacción del inducido.)

8-27. Un generador de cd compuesto acumulativo de 120 V y 50 A tiene las siguientes características:

$$R_A + R_S = 0.21\ \Omega \qquad N_F = 1\,000 \text{ vueltas}$$
$$R_F = 20\ \Omega \qquad N_{\text{SE}} = 25 \text{ vueltas}$$
$$R_{\text{ajus}} = 0 \text{ a } 30\ \Omega, \text{ actualmente a } 10\ \Omega \qquad n_m = 1\,800 \text{ r/min}$$

En la figura P8-7 se aprecia la curva de magnetización de la máquina, y en la figura P8-10 se muestra su circuito equivalente. Responda las siguientes preguntas sobre la máquina bajo el supuesto de que no hay reacción del inducido.

a) Si el generador opera en vacío, ¿cuál es el voltaje en las terminales?
b) Si el generador tiene una corriente del inducido de 20 A, ¿cuál es el voltaje en las terminales?
c) Si el generador tiene una corriente del inducido de 40 A, ¿cuál es el voltaje en las terminales?
d) Calcule y haga la gráfica característica de las terminales de esta máquina.

8-28. Si la máquina que se describe en el problema 8-27 se reconecta como un generador de cd compuesto diferencial, ¿cómo será la forma de su característica en las terminales? Dedúzcala de la misma manera en que lo hizo en el problema 8-27.

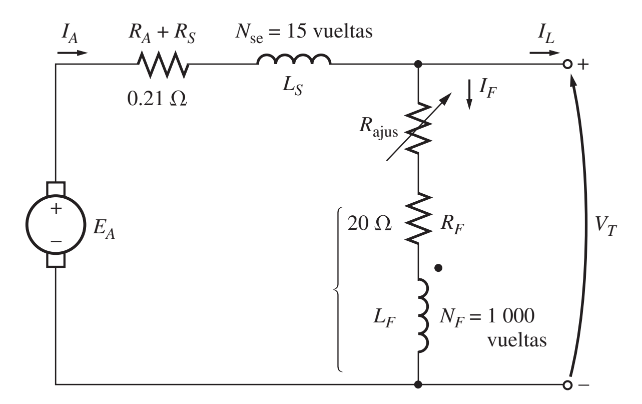


FIGURA P8-10 Generador de cd compuesto de los problemas 8-27 y 8-28.

8-29. Un generador de cd compuesto acumulativo opera correctamente como generador de cd compuesto plano. Se apaga la máquina y se invierten las conexiones del campo en derivación.

a) Si el generador gira en la misma dirección que antes, ¿se incrementa el voltaje de salida en las terminales? Explique su respuesta.
b) ¿Se genera voltaje si gira en la dirección contraria? ¿Por qué sí o por qué no?
c) Para la dirección de rotación en la que se forma el voltaje, ¿el generador estará compuesto diferencial o acumulativamente?

8-30. Una máquina síncrona trifásica se conecta mecánicamente a una máquina de cd en derivación y forman un conjunto de motor-generador como el que se muestra en la figura P8-11. La máquina de cd se conecta a un sistema de potencia de cd que suministra 240 V constantes y la máquina de ca se conecta a un bus infinito de 480 V y 60 Hz.

La máquina de cd tiene cuatro polos y sus valores nominales son: 50 kW y 240 V. Tiene una resistencia del inducido por unidad de 0.03. La máquina de ca tiene cuatro polos y está conectada en Y. Sus valores nominales son de 50 kVA, 480 V, un factor de potencia de 0.8 y su reactancia síncrona saturada es de 3.0 Ω por fase.

Se pueden despreciar todas las pérdidas excepto las de resistencia del inducido de la máquina de cd. Suponga que las curvas de magnetización de ambas máquinas son lineales.

a) Inicialmente, la máquina de ca suministra 50 kVA con un factor de potencia de 0.8 en retraso al sistema de potencia de ca.

1. ¿Cuánta potencia se suministra al motor de cd desde el sistema de potencia de cd?

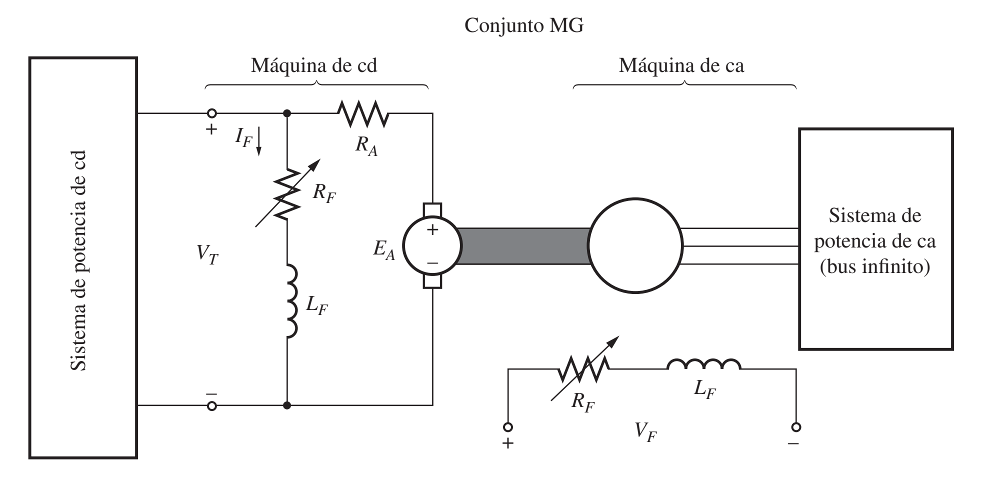


FIGURA P8-11 Conjunto motor-generador del problema 8-30.

2. ¿De qué magnitud es el voltaje interno generado E_A de la máquina de cd?
3. ¿Qué tan grande es el voltaje interno generado $\mathbf{E}_A$ de la máquina de ca?

b) La corriente de campo de la máquina de ca se incrementa 5%. ¿Qué efecto tiene este cambio en la potencia real que suministra el conjunto motor-generador? ¿Y en la potencia reactiva que proporciona el conjunto motor-generador? Calcule la potencia real y reactiva que suministra o consume la máquina de ca en estas condiciones. Dibuje el diagrama fasorial de la máquina de ca antes y después del cambio en la corriente de campo.

c) A partir de las condiciones del inciso *b)*, la corriente de campo en la máquina de cd disminuye en 1%. ¿Qué efecto tiene este cambio en la potencia real suministrada por el conjunto motor-generador? ¿Y en la potencia reactiva suministrada por el conjunto motor-generador? Calcule la potencia real y reactiva suministrada o consumida por la máquina de cd en estas condiciones. Dibuje el diagrama fasorial de la máquina de ca antes y después del cambio en la corriente de campo de la máquina de cd.

d) A partir de los resultados anteriores, responda las siguientes preguntas:

1. ¿Cómo se puede controlar el flujo de potencia real a través de un conjunto de motor-generador ca-cd?
2. ¿Cómo se puede controlar la potencia reactiva suministrada o consumida por la máquina de ca sin afectar el flujo de potencia real?

BIBLIOGRAFÍA

1. Chaston, A.N., *Electric Machinery*, Reston Publications, Reston, Va., 1986.
2. Fitzgerald, A.E. y C. Kingsley, Jr., *Electric Machinery*, McGraw-Hill, Nueva York, 1952.
3. Fitzgerald. A.E., C. Kingsley, Jr. y S.D. Umans, *Electric Machinery*, 6a. ed., McGraw-Hill, Nueva York, 2003.
4. Heck, C., *Magnetic Materials and Their Applications*, Butterworth & Co., Londres, 1974.
5. Norma IEEE 113-1995, *Guide on Test Procedures for DC Machines*, Piscataway, N.J.: IEEE. 1985. (Esta norma se ha retirado oficialmente, pero aún está disponible.)
6. Kloeffler, S.M., R.M. Kerchner y J.L. Brenneman, *Direct Current Machinery*, Macmillan, ed. rev., Nueva York, 1948.
7. Kosow, Irving L., *Electric Machinery and Transformers*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, Nueva Jersey, 1972.
8. McPherson, George, *An Introduction to Electrical Machines and Transformers*, Wiley, Nueva York, 1981.
9. Siskind, Charles S., *Direct Current Machinery*, McGraw-Hill, Nueva York, 1952.
10. Slemon, G.R. y A. Straughen, *Electric Machines*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1980.
11. Werninck, E.H. (ed.), *Electric Motor Handbook*, McGraw-Hill, Londres, 1978.

CAPÍTULO

9

Motores monofásicos y de uso especial

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

- Entender por qué un motor universal se llama así.
- Comprender cómo es posible desarrollar par unidireccional a partir de un campo magnético pulsante en un motor de inducción monofásico.
- Entender cómo arrancar motores de inducción monofásicos.
- Comprender las características de las diferentes clases de motores monofásicos de inducción: de fase partida (de tres cables), de tipo capacitor y de polo sombreado.
- Poder calcular el par inducido en un motor de inducción monofásico.
- Entender la operación básica de los motores de reluctancia e histéresis.
- Comprender la operación de un motor de avance paso a paso.
- Entender la operación de un motor de cd sin escobillas.

Los capítulos 3 al 6 se dedicaron a describir la operación de las dos principales clases de máquinas de ca (síncronas y de inducción) en sistemas de potencia *trifásicos*. Los motores y generadores de este tipo son por mucho los que más se utilizan en los grandes establecimientos comerciales e industriales. Sin embargo, la mayoría de los hogares y pequeñas empresas no tienen sistemas de potencia trifásicos. En este tipo de lugares todos los motores deben alimentarse de fuentes de potencia monofásicas. En este capítulo se aborda la teoría y operación de dos tipos principales de motores monofásicos: el motor universal y el motor de inducción monofásico. En la sección 9.1 se describe el motor universal, que es una extensión directa del motor de cd en serie.

En las secciones 9.2 a 9.5 se describe el motor de inducción monofásico. El principal problema asociado con el diseño de los motores de inducción monofásicos es que, a diferencia de las fuentes de potencia trifásicas, una fuente de potencia monofásica *no* produce un campo magnético giratorio. En cambio, el campo magnético producido por una fuente monofásica es estacionario y *oscila* con el tiempo. Puesto que no hay un campo magnético giratorio neto, no funcionan los motores de inducción convencionales y se requiere de diseños especiales.

Además, hay una cierta cantidad de motores de uso especial que no se han descrito aún en el libro. Éstos incluyen los motores de reluctancia, de histéresis, de avance paso a paso y los motores de cd sin escobillas. Todos se incluyen en la sección 9.6.

9.1 EL MOTOR UNIVERSAL

Quizá la aproximación más sencilla al diseño de un motor que opera con una fuente de potencia de ca monofásico es tomar una máquina de cd y hacerla funcionar con una fuente de ca. Recuérdese que en el capítulo 7 se definió que el par inducido de un motor de cd está dado por

$$\tau_{\text{ind}} = K\phi I_A \qquad \textbf{(7-49)}$$

Si se invierte la polaridad del voltaje aplicado a un motor de cd en derivación o en serie, se invierten *tanto* la dirección del flujo de campo *como* la dirección de la corriente del inducido y el par inducido resultante permanece en la misma dirección que antes. Por lo tanto, debe ser posible lograr un par oscilante, pero unidireccional, con un motor de cd conectado a una fuente de potencia de ca.

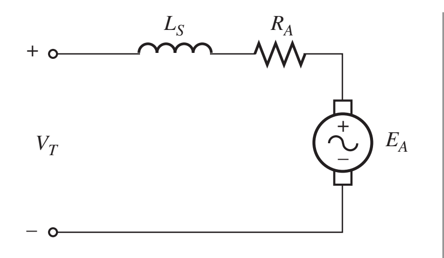


FIGURA 9-1 Circuito equivalente de un motor universal.

Este diseño sólo es práctico para el motor de cd en serie (véase la figura 9-1), puesto que las corrientes del inducido y de campo en la máquina se deben invertir en exactamente el mismo momento. En los motores de cd en derivación la inductancia de campo alta tiende a retrasar la inversión de la corriente de campo y por lo tanto a reducir inaceptablemente el par inducido promedio del motor.

Para que un motor de cd en serie funcione eficazmente con ca, se deben laminar por completo los polos de campo y la cubierta del estator. Si no están completamente laminados, las pérdidas en el núcleo serán enormes. Cuando los polos y el estator están laminados, el motor se llama *motor universal*, puesto que puede funcionar ya sea con una fuente de ca o de cd.

Cuando un motor opera con una fuente de ca, la conmutación será mucho más deficiente que si opera con una fuente de cd. La generación extra de chispas en las escobillas es causada por la acción transformadora que induce voltajes en las bobinas en proceso de conmutación. Estas chispas acortan de manera significativa la vida de las escobillas y pueden ser una fuente de interferencia de frecuencia de radio en ciertos ambientes.

En la figura 9-2 se muestra la típica característica par-velocidad de un motor universal. Difiere de la característica par-velocidad de la misma máquina en operación con una fuente de voltaje de cd por dos razones:

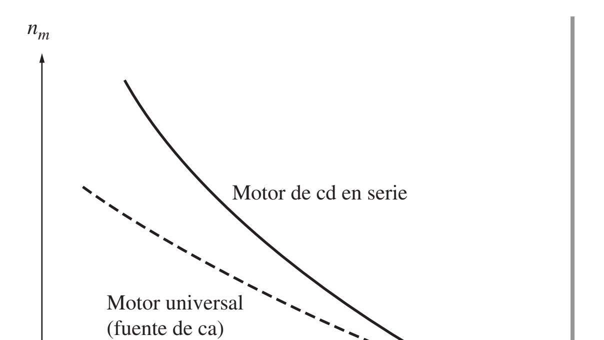


FIGURA 9-2 Comparación de la característica par-velocidad de un motor universal cuando opera con suministros de potencia de ca y de cd.

1. Los devanados del inducido y de campo tienen una reactancia bastante alta a 50 o 60 Hz. Una parte significativa del voltaje de entrada cae a través de estas reactancias y, por lo tanto, E_A es *más pequeño* dado cierto voltaje de entrada durante la operación con ca que durante la operación con cd. Puesto que $E_A = K\phi\omega_m$, el motor es *más lento*, dados cierta corriente del inducido y cierto par inducido con corriente alterna que con corriente directa.
2. Además, el voltaje pico de un sistema de ca es igual a $\sqrt{2}$ de su valor rms, por lo que la saturación magnética puede ocurrir en un valor cercano a la corriente pico de la máquina. Esta saturación puede disminuir de forma significativa el flujo rms del motor dado cierto nivel de corriente y tiende a reducir el par inducido de la máquina. Recuérdese que una disminución del flujo incrementa la velocidad de una máquina de cd, por lo que este efecto puede opacar parcialmente la disminución de velocidad causada por el primer efecto.

Aplicaciones de los motores universales

El motor universal tiene la característica par-velocidad con mayor pendiente de los motores de cd en serie, por lo que no es adecuado cuando se requiere velocidad constante. Sin embargo, es compacto y brinda más par por ampere que cualquier otro motor monofásico. Por lo tanto, se utiliza en casos en que es importante su peso ligero y su par alto.

Las aplicaciones típicas de este motor incluyen aspiradoras, taladros, herramientas portátiles similares y electrodomésticos.

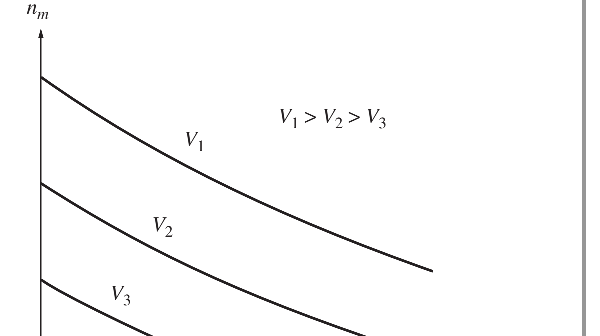


FIGURA 9-3 Efecto del cambio de voltaje en las terminales en la característica par-velocidad de un motor universal.

Control de velocidad en los motores universales

Al igual que con los motores de cd en serie, la mejor manera de controlar la velocidad de un motor universal es por medio de la variación de su voltaje de entrada rms. Mientras más alto sea el rms de entrada, mayor será la velocidad del motor. En la figura 9-3 se muestra la típica característica par-velocidad de un motor universal en función del voltaje.

En la práctica, el voltaje promedio aplicado a este tipo de motores se puede modificar con uno de los circuitos SCR o TRIAC. En la figura

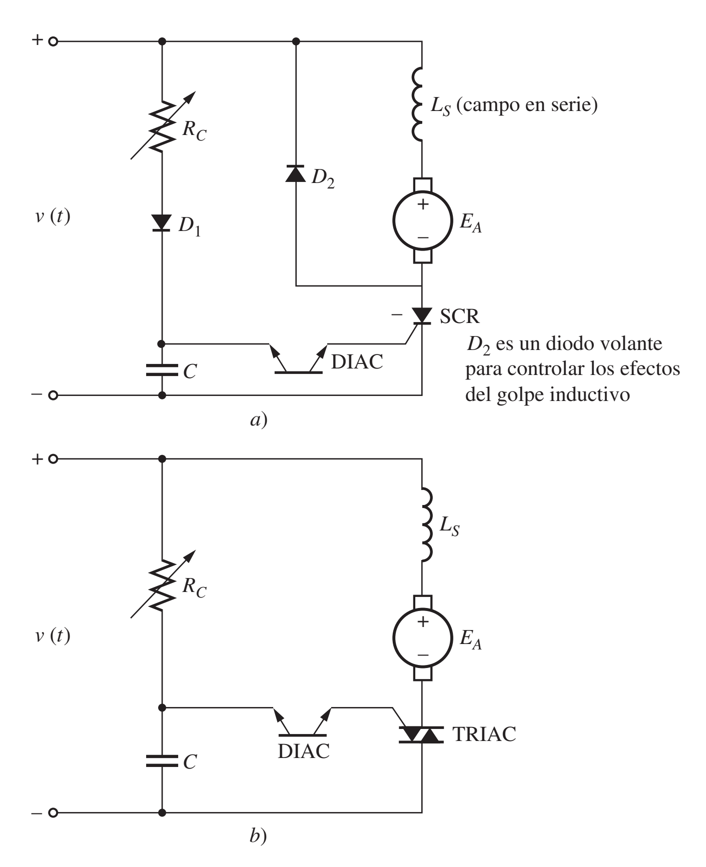


FIGURA 9-4 Circuitos de control de velocidad de un motor universal de muestra. *a*) De media onda; *b*) de onda completa.

9-4 se pueden observar dos de estos circuitos de control de velocidad. Los resistores variables que se muestran en las figuras son las perillas de ajuste de velocidad de los motores (es decir, un resistor de este tipo sería el gatillo de un taladro de velocidad variable).

9.2 INTRODUCCIÓN A LOS MOTORES DE INDUCCIÓN MONOFÁSICOS

Otro de los motores monofásicos comunes es la versión monofásica del motor de inducción. En la figura 9-5 se muestra un motor de inducción con rotor de jaula de ardilla y estator monofásico.

Los motores de inducción monofásicos sufren una severa limitación. Puesto que sólo hay una fase en el devanado del estator, el campo magnético de un motor de inducción monofásico no gira. En cambio, *oscila*, es decir, primero se agranda y luego se reduce, pero siempre mantiene la misma dirección. Puesto que no hay campo magnético del estator giratorio, un motor de inducción monofásico *no tiene par de arranque*.

Este hecho es fácil de ver si se examina un motor cuyo rotor es estacionario. El flujo del estator de la máquina primero se incrementa y luego disminuye, pero siempre apunta en la misma dirección. Puesto que el campo magnético del estator no gira, *no hay movimiento relativo* entre el campo del estator y las barras del rotor. Por lo tanto, no hay voltaje inducido debido al movimiento relativo del rotor, no hay flujo de corriente del rotor debido al movimiento relativo y no hay par inducido. En realidad, se induce un voltaje en las barras del rotor por medio de la acción transformadora ($d\phi/dt$) y puesto que las barras están en

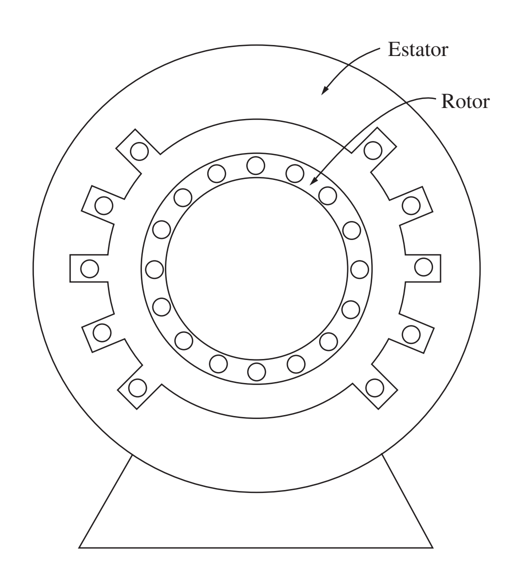


FIGURA 9-5 Construcción de un motor de inducción monofásico. El rotor es igual al de un motor de inducción trifásico, pero el estator tiene una sola fase distribuida.

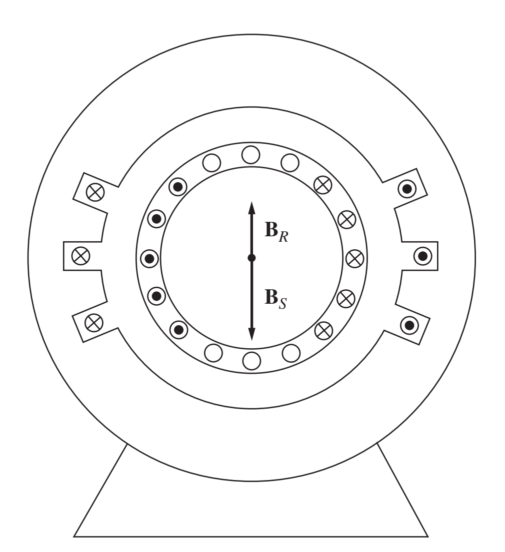


FIGURA 9-6 Motor de inducción monofásico en condiciones de arranque. El devanado del estator induce voltajes y corrientes opuestos en el circuito del rotor, lo que provoca un campo magnético del rotor *alineado* con el campo magnético del estator $\tau_{ind} = 0$.

cortocircuito, la corriente fluye en el rotor. Sin embargo, este campo magnético está alineado con el campo magnético del estator y no produce ningún par neto en el rotor,

$$\begin{aligned}\tau_{ind} &= k\mathbf{B}_R \times \mathbf{B}_S \\ &= kB_RB_S \operatorname{sen}\gamma \\ &= kB_RB_S \operatorname{sen} 180° = 0\end{aligned} \quad \textbf{(3-58)}$$

Como el rotor está detenido, el motor parece un transformador con un devanado secundario en cortocircuito (véase la figura 9-6).

Al principio, el hecho de que los motores de inducción monofásicos no tuvieran un par de arranque intrínseco era un serio impedimento para desarrollar un motor de inducción. Cuando se comenzaron a perfeccionar los motores de inducción a finales de la década de 1880 y a principios de la siguiente, los primeros sistemas de potencia de ca disponibles eran monofásicos de 133 Hz. Con los materiales y técnicas disponibles en ese entonces era imposible construir un motor que funcionara de manera adecuada. El motor de inducción no se convirtió en un producto funcional listo para utilizarse hasta que se desarrollaron los sistemas de potencia trifásicos de 25 Hz a mediados de la década de 1890.

Sin embargo, *una vez que el motor comenzaba a girar, se producía un par inducido en él*. Hay dos teorías básicas que explican por qué se produce un par en el rotor una vez que comienza a girar. Una se llama *teoría del doble campo giratorio* de los motores de inducción monofásicos y la otra se llama *teoría de campo cruzado* de los motores de inducción monofásicos. A continuación se describe cada una de ellas.

Teoría del doble campo giratorio de los motores de inducción monofásicos

Básicamente, la teoría del doble campo giratorio de los motores de inducción monofásicos sostiene que un campo magnético oscilatorio estacionario se puede separar en dos campos magnéticos *giratorios* de igual magnitud, pero que giran en direcciones opuestas. El motor de inducción responde por separado a cada campo magnético y el par neto en la máquina será igual a la suma de los pares de cada uno de los dos campos magnéticos.

La figura 9-7 muestra la forma en que un campo magnético oscilatorio estacionario se puede dividir en dos campos magnéticos iguales que giran en direcciones contrarias. La densidad de flujo del campo magnético estacionario está dada por

$$\mathbf{B}_S(t) = (\mathbf{B}_{máx} \cos \omega t)\,\hat{\mathbf{j}} \quad \textbf{(9-1)}$$

Un campo magnético que gira en el sentido de las manecillas del reloj (SMR) se puede expresar como

$$\mathbf{B}_{SMR}(t) = \left(\frac{1}{2} B_{máx} \cos \omega t\right)\hat{\mathbf{i}} - \left(\frac{1}{2} B_{máx} \operatorname{sen} \omega t\right)\hat{\mathbf{j}} \quad \textbf{(9-2)}$$

y un campo magnético que gira en el sentido contrario a las manecillas del reloj (SCMR) se puede expresar como

$$\mathbf{B}_{SCMR}(t) = \left(\frac{1}{2} B_{máx} \cos \omega t\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{1}{2} B_{máx} \operatorname{sen} \omega t\right)\hat{\mathbf{j}} \quad \textbf{(9-3)}$$

Nótese que la suma de los campos magnéticos en el sentido de las manecillas del reloj y en el sentido contrario a las manecillas del reloj es igual al campo magnético oscilatorio estacionario $\mathbf{B}_S$:

$$\mathbf{B}_S(t) = \mathbf{B}_{SMR}(t) + \mathbf{B}_{SCMR}(t) \quad \textbf{(9-4)}$$

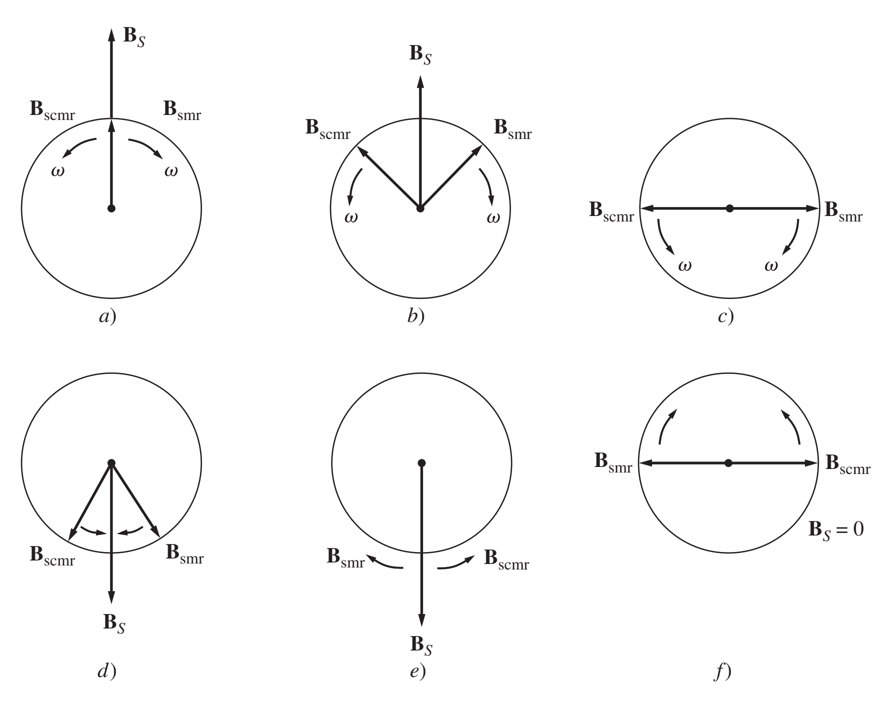


FIGURA 9-7 Transformación de un campo magnético oscilatorio único en dos campos magnéticos de igual magnitud y que giran en direcciones opuestas. Nótese que la suma vectorial de los dos campos magnéticos siempre está en el plano vertical.

La característica par-velocidad de un motor de inducción trifásico en respuesta a su campo magnético giratorio único se muestra en la figura 9-8*a*). Un motor de inducción monofásico responde a cada uno de los dos campos magnéticos que están presentes en él, por lo que el par inducido neto en el motor es igual a la *diferencia* entre las dos curvas par-velocidad. En la figura 9-8*b*) se ilustra este par neto. Nótese que no hay ningún par neto a velocidad cero, por lo que el motor no tiene par de arranque.

La característica par-velocidad que se aprecia en la figura 9-8*b*) no es una descripción exacta del par de un motor monofásico. Se formó por medio de la superposición de dos características trifásicas y se despreció el hecho de que ambos campos magnéticos están presentes *simultáneamente* en un motor monofásico.

Si la potencia se aplica a un motor trifásico mientras se le obliga a girar hacia atrás, las corrientes del rotor serán muy altas (véase la figura 9-9*a*). Sin embargo, la frecuencia del rotor también es muy alta, lo que hace que la reactancia del rotor sea mucho más grande que su resistencia. Puesto

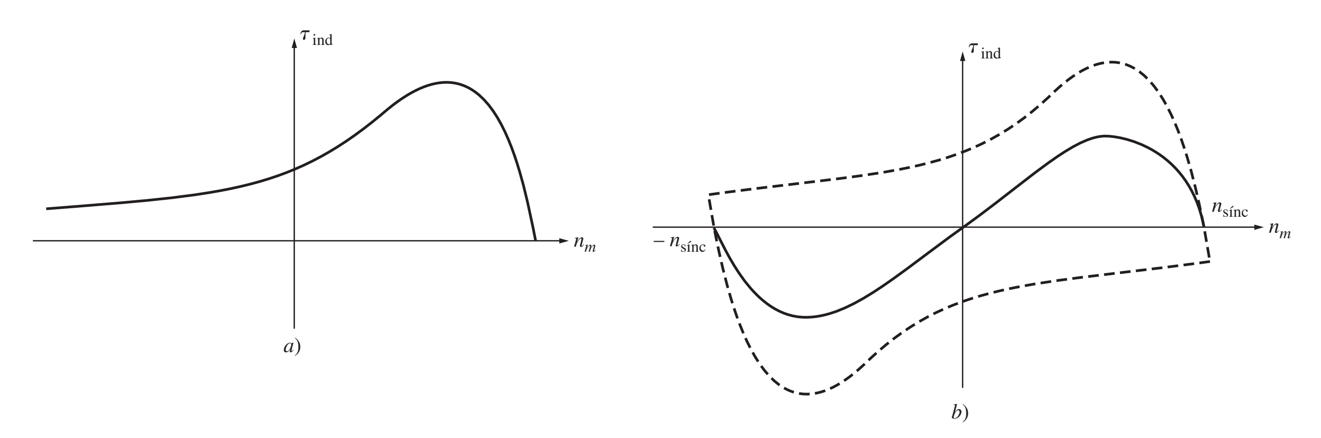


FIGURA 9-8 *a*) Característica par-velocidad de un motor de inducción trifásico. *b*) Curva de la característica par-velocidad de dos campos magnéticos del estator iguales que giran en direcciones opuestas.

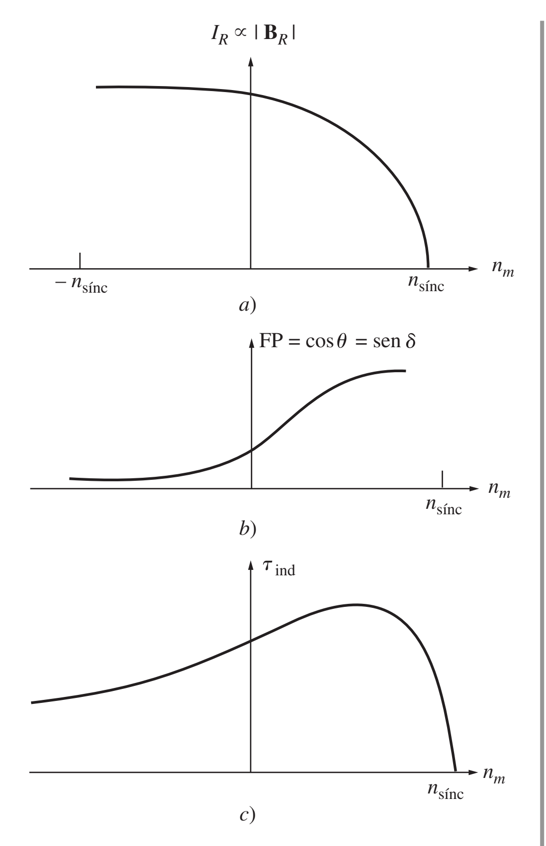


FIGURA 9-9 La característica par-velocidad de un motor de inducción trifásico es proporcional tanto a la intensidad del campo magnético del rotor como al seno del ángulo entre los campos. Cuando el rotor gira hacia atrás, I_R e I_S son muy altas, pero el ángulo entre los campos es tan grande que limita el par del motor.

que la reactancia del rotor es tan alta, la corriente del rotor está casi 90° en retraso con respecto al voltaje del rotor, lo que produce un campo magnético que está casi a 180° del campo magnético del estator (véase la figura 9-10). El par inducido en el motor es proporcional al seno del ángulo entre los dos campos y el seno de un ángulo cercano a los 180° es un número muy pequeño. El par del motor será muy chico, excepto si las corrientes del rotor extremadamente altas opacan de manera parcial el efecto de los ángulos del campo magnético (véase la figura 9-9*b*).

Por otro lado, en un motor monofásico los dos campos magnéticos están presentes y los produce la *misma* corriente. Ambos campos magnéticos del motor contribuyen con un componente del voltaje total del estator y, en cierto sentido, están en serie entre ellos. Puesto que ambos campos magnéticos están presentes, el que gira hacia adelante (que tiene una resistencia del rotor efectiva R_2/s alta) limitará el flujo de corriente del estator en el motor (que produce ambos campos magnéticos). Debido a que la corriente que suministra el campo magnético inverso del estator está limitado a un valor pequeño, y puesto que el campo magnético inverso del rotor tiene un ángulo muy grande con respecto al campo magnético inverso del estator, el par debido a los campos magnéticos inversos es *muy* pequeño a una velocidad cercana a la velocidad síncrona. En la figura 9-11 se puede observar una característica par-velocidad más exacta del motor de inducción monofásico.

Además del par neto promedio que se muestra en la figura 9-11 hay oscilaciones de par al doble de la frecuencia del estator. Estas oscilaciones de par se originan cuando los campos magnéticos hacia adelante e inverso se cruzan entre sí dos veces por ciclo. Aunque estas oscilaciones de par no producen un par promedio, aumentan la vibración y hacen que los motores de inducción monofásicos sean más ruidosos que los motores trifásicos del mismo tamaño. No hay manera de eliminar estas oscilaciones puesto que la potencia instantánea siempre se presenta en oscilaciones en un circuito monofásico. El diseñador de un motor debe tomar en cuenta esta vibración inherente cuando diseña un motor monofásico.

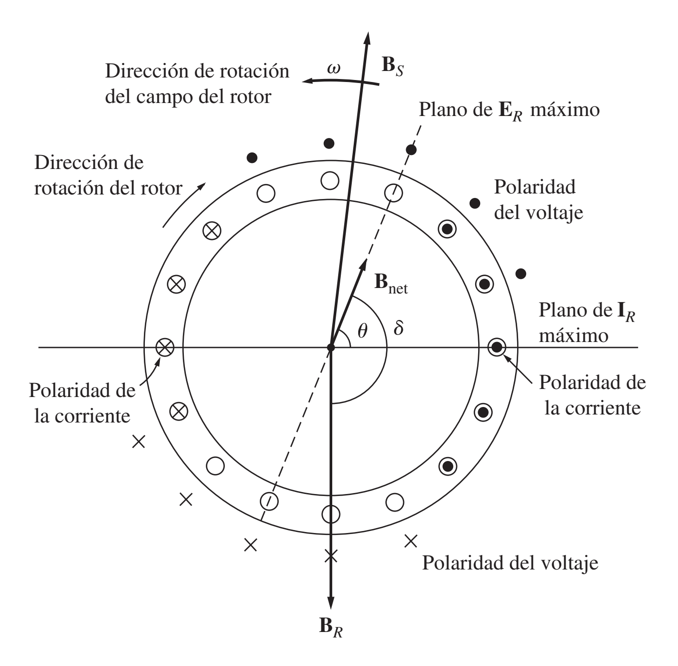


FIGURA 9-10 Cuando el rotor del motor es forzado a girar hacia atrás, el ángulo γ entre $\mathbf{B}_R$ y $\mathbf{B}_S$ se acerca a 180°.

Teoría de campo cruzado de los motores de inducción monofásicos

La teoría de campo cruzado de los motores de inducción monofásicos contempla al motor de inducción desde un punto de vista completamente diferente, pues se enfoca en los voltajes y corrientes que el campo magnético estacionario del estator puede inducir en las barras del rotor cuando éste está en movimiento.

Considérese un motor de inducción monofásico con un rotor que se aceleró por medio de un método externo. En la figura 9-12*a*) se muestra este tipo de motor. Se inducen voltajes en las barras del rotor y el voltaje pico se presenta en los devanados que pasan directamente por debajo de los devanados del estator. Estos voltajes del rotor producen un flujo de corriente en el rotor, pero debido a la alta reactancia de éste la corriente está casi 90° en retraso con respecto del voltaje. Puesto que el rotor gira casi a velocidad síncrona, el retraso de tiempo de 90° en la corriente produce un desplazamiento *angular* de casi 90° entre el plano del voltaje pico del rotor y el plano de la corriente pico. En la figura 9-12*b*) puede observarse el campo magnético del rotor resultante.

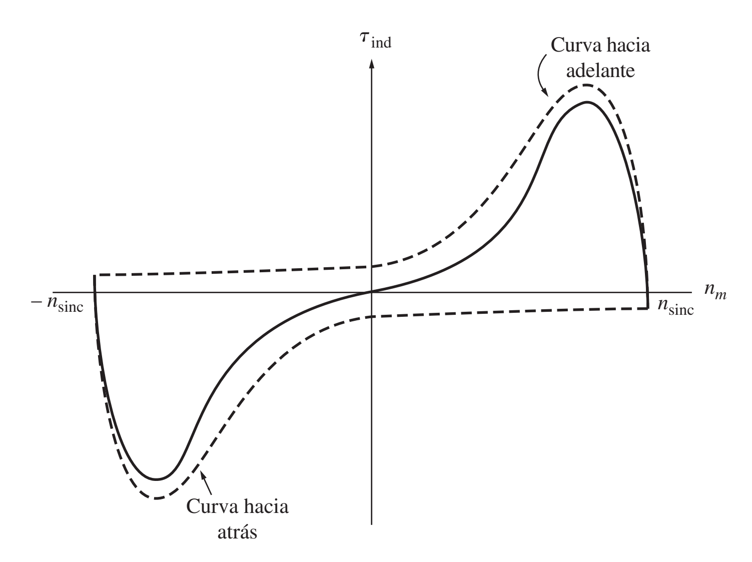


FIGURA 9-11 Característica par-velocidad de un motor de inducción monofásico, tomando en cuenta la limitación de corriente en el campo magnético que gira hacia atrás provocado por la presencia del campo magnético que gira hacia adelante.

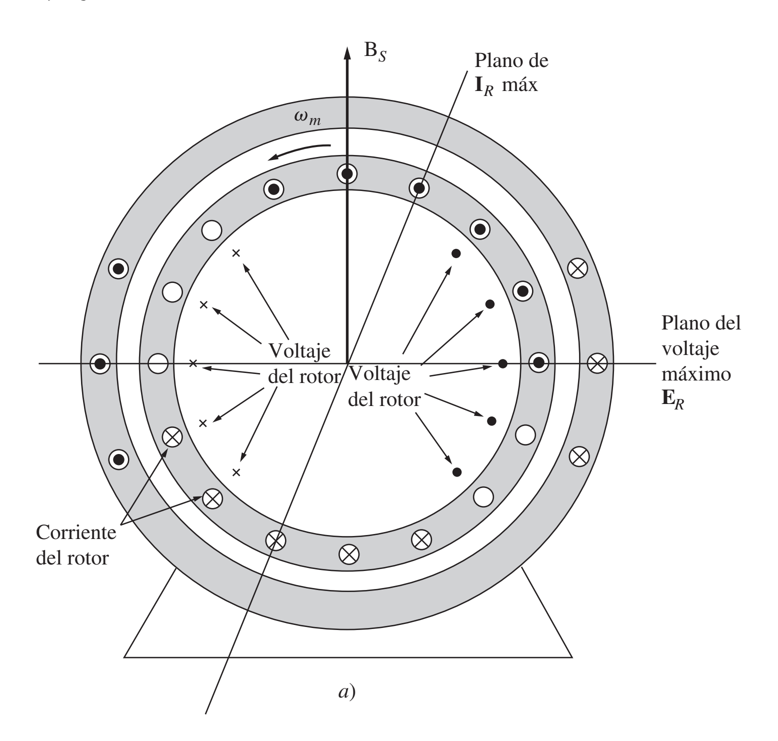


FIGURA 9-12 *a*) Desarrollo del par inducido en un motor de inducción monofásico, como se explica en la teoría de campos cruzados. Si el campo del estator es pulsante, inducirá voltajes en las barras del rotor, como se muestra en los símbolos dentro del rotor. Sin embargo, la corriente del rotor está casi 90° en retraso con respecto al voltaje del rotor y si el rotor está girando, su corriente llegará a su pico en un ángulo diferente al ángulo del voltaje del rotor.

El campo magnético del rotor es un poco más pequeño que el campo magnético del estator debido a las pérdidas en el rotor, pero difieren en casi 90° *tanto en espacio como en tiempo*. Si estos dos campos magnéticos se suman en diferentes momentos, se puede apreciar que el campo magnético total en el motor rota en sentido contrario al de las manecillas del reloj (véase la figura 9-13). Con un campo magnético giratorio presente en el motor, el motor de inducción desarrollará un par neto en la dirección del movimiento que mantendrá al rotor en movimiento.

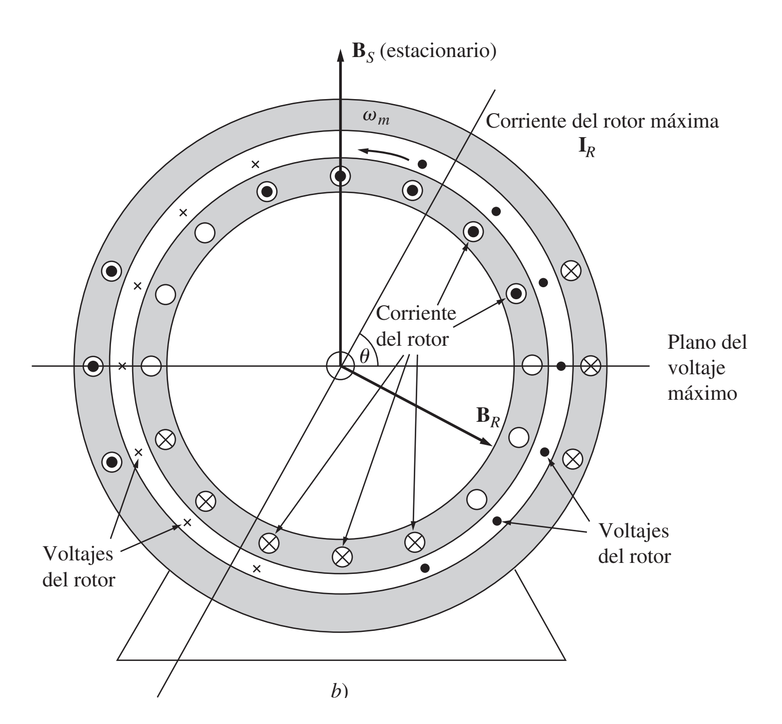


FIGURA 9-12 (*conclusión*) *b*) Este retraso en la corriente del rotor produce un campo magnético con un ángulo diferente al del campo magnético del estator.

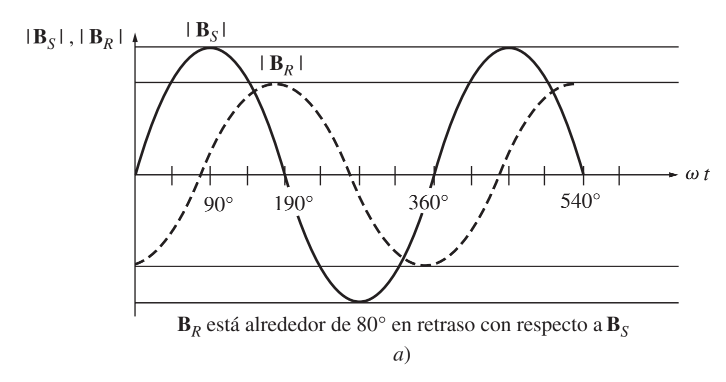


FIGURA 9-13 *a*) *Magnitudes* de los campos magnéticos en función del tiempo.

Si el rotor del motor hubiera estado girando originalmente en la dirección de las manecillas del reloj, el par resultante sería en sentido contrario al de éstas y también mantendría al rotor en movimiento.

9.3 ARRANQUE DE LOS MOTORES DE INDUCCIÓN MONOFÁSICOS

Como ya se explicó, un motor de inducción monofásico no tiene un par de arranque intrínseco. Hay tres técnicas que se usan comúnmente para hacer arrancar estos motores, los cuales se clasifican de acuerdo con los métodos que se utilizan para producir su par de arranque. Estas técnicas de arranque difieren entre sí en costo y en la cantidad de par de arranque que producen. Por lo regular, un ingeniero emplea la técnica menos cara que cumpla con los requerimientos de par de una aplicación dada. Estas tres técnicas de arranque principales son:

1. Devanados de fase partida.
2. Devanados tipo capacitor.
3. Polos de estator sombreados.

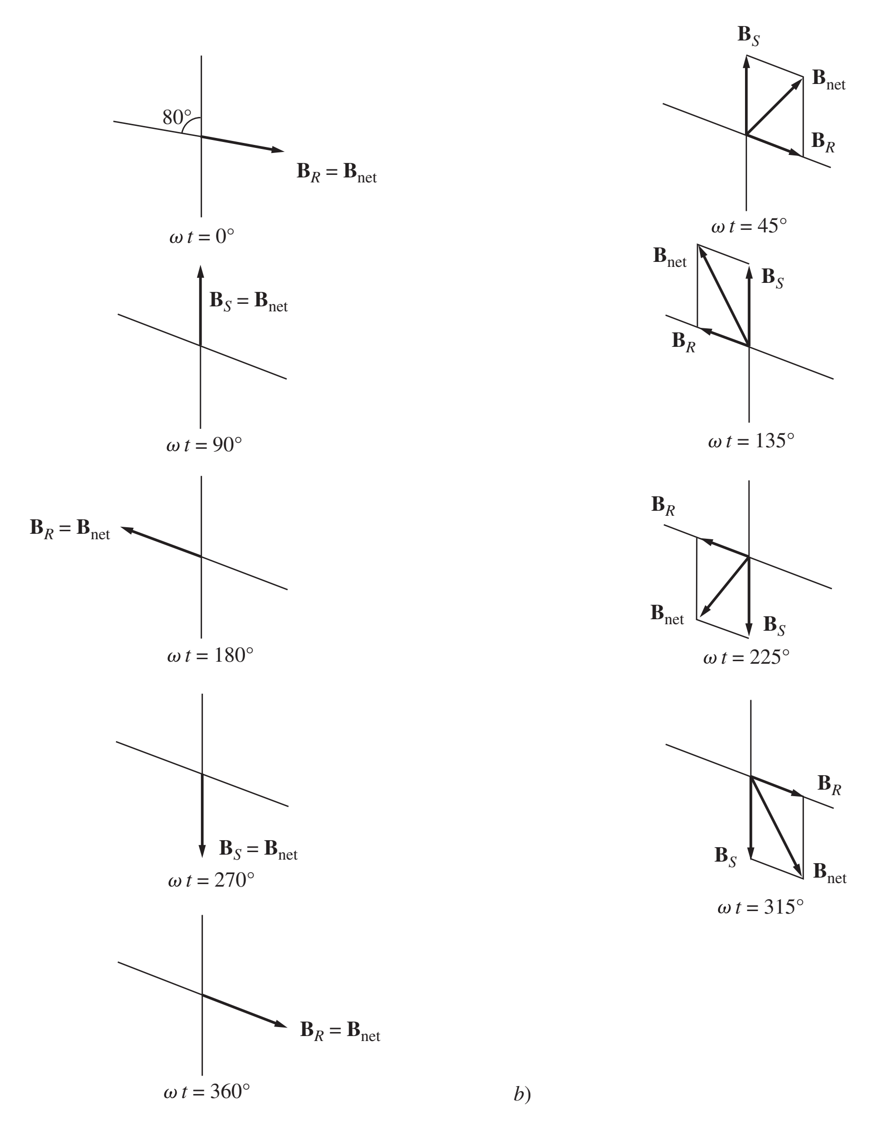


FIGURA 9-13 (*conclusión*) *b*) La suma vectorial de los campos magnéticos del rotor y del estator en diferentes momentos muestra el campo magnético neto que gira en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

Estas tres técnicas de arranque son métodos que sirven para que uno de los dos campos magnéticos giratorios del motor sea más fuerte que el otro y de esta manera darle un apoyo inicial en una u otra dirección.

Devanados de fase partida

Un motor de fase *partida* es un motor de inducción monofásico con dos devanados en el estator, uno en el estator principal (M) y otro en el estator auxiliar (A) (véase la figura 9-14). Estos dos devanados están a una distancia de 90 grados eléctricos entre ellos sobre el estator del motor, y el devanado auxiliar está diseñado para que un interruptor centrífugo lo retire del circuito a cierta velocidad. El devanado auxiliar se diseña para que tenga una relación resistencia/reactancia más alta que el devanado principal, por lo que la corriente en el devanado auxiliar *está adelantada* a la corriente del devanado principal. En general, esta relación R/X más alta se logra por medio de un alambre más delgado en el devanado auxiliar. Se puede utilizar un alambre de diámetro más pequeño debido a que se usa sólo para el arranque y no tiene que tomar toda la corriente en forma continua.

Para entender la función del devanado auxiliar, véase la figura 9-15. Puesto que la corriente en el devanado auxiliar está en adelanto con respecto a la corriente en el devanado principal, el campo

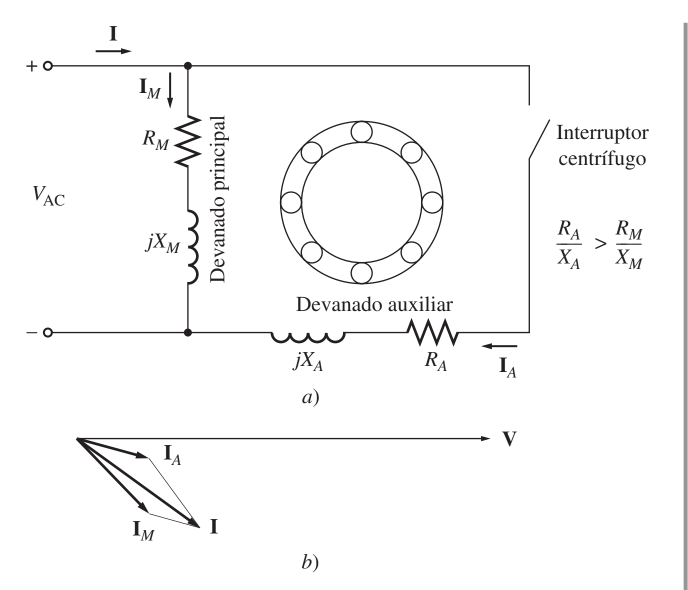


FIGURA 9-14 *a*) Motor de inducción de fase partida. *b*) Las corrientes en el motor en condiciones de arranque.

magnético $\mathbf{B}_A$ llega a su pico antes que el campo magnético principal $\mathbf{B}_M$. Puesto que $\mathbf{B}_A$ llega a su pico antes y luego lo hace $\mathbf{B}_M$, hay una rotación neta en sentido contrario al de las manecillas del reloj en el campo magnético. En otras palabras, el devanado auxiliar hace que uno de los campos magnéticos giratorios del estator que giran en sentido contrario sea más grande que el otro y proporciona un par de arranque neto al motor. En la figura 9-15*c*) se puede observar la típica característica par-velocidad.

En la figura 9-16 se muestra un diagrama de corte transversal de un motor de fase partida. Se pueden observar fácilmente los devanados principales y auxiliares (los devanados auxiliares son los alambres con un diámetro más pequeño) y el interruptor centrífugo que elimina los devanados auxiliares del circuito cuando el motor se acerca a la velocidad de operación.

Los motores de fase partida tienen pares de arranque moderados con una corriente de arranque bastante baja. Se utilizan en aplicaciones que no requieran de un par de arranque muy alto, como ventiladores, sopladores y bombas centrífugas. Están disponibles en fracciones de caballos de potencia y son bastante baratos.

En un motor de inducción de fase dividida la corriente en los devanados auxiliares siempre llega a su pico antes que la corriente en el devanado principal y, por lo tanto, el campo magnético del devanado auxiliar siempre llega a su pico antes que el campo magnético del devanado principal. La dirección de rotación del motor se determina si el ángulo espacial entre el campo magnético de los devanados auxiliares está 90° en adelanto o 90° en retraso con respecto al ángulo del devanado principal. Puesto que se puede cambiar el ángulo de 90° en adelanto por el de 90° en retraso mediante la conmutación de las conexiones en el devanado auxiliar, *se puede invertir la dirección de*

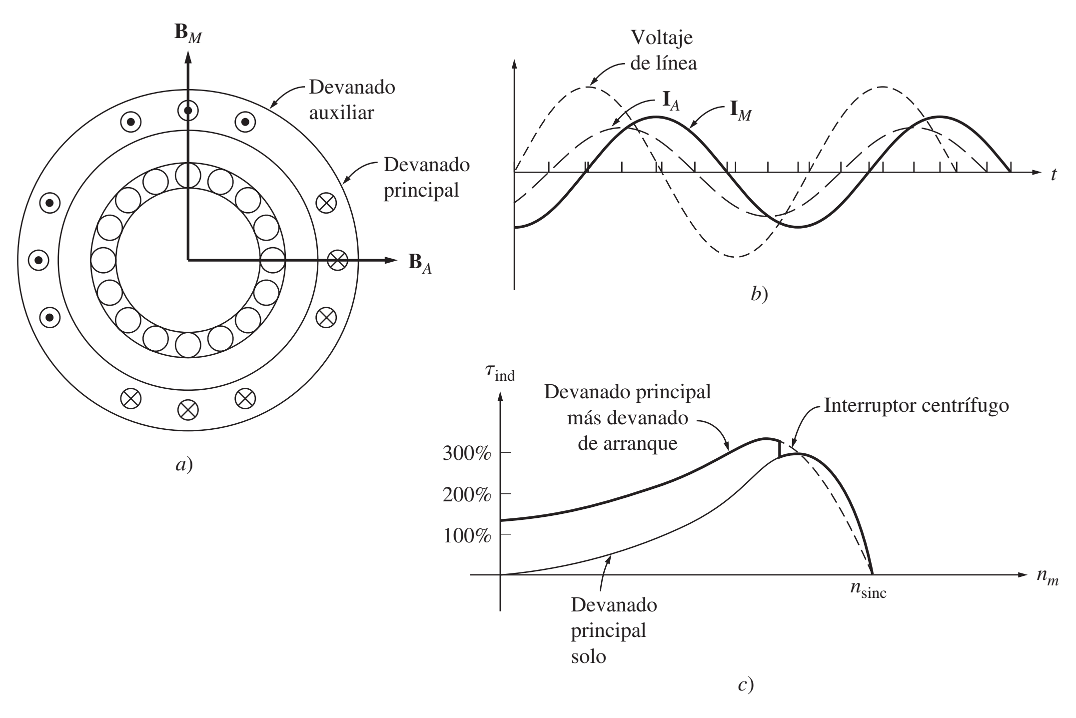


FIGURA 9-15 *a*) Relación de los campos magnéticos principal y auxiliar. *b*) $\mathbf{I}_A$ llega a su pico antes que $\mathbf{I}_M$, produciendo una rotación neta de los campos magnéticos en sentido contrario al de las manecillas del reloj. *c*) Característica par-velocidad resultante.

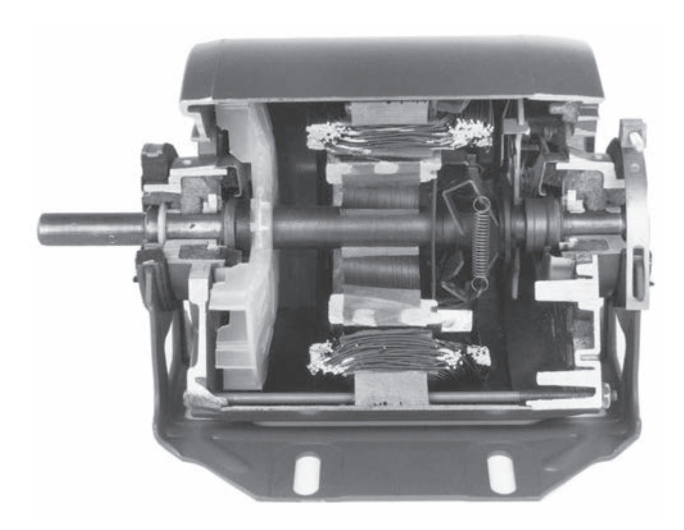


FIGURA 9-16 Vista transversal de un motor de fase partida que muestra los devanados principal y auxiliar y el interruptor centrífugo. (*Cortesía de Westinghouse Electric Corporation*.)

rotación del motor simplemente conmutando las conexiones del devanado auxiliar y sin cambiar las conexiones del devanado principal.

Motores de arranque por capacitor

En el caso de ciertas aplicaciones, el par de arranque que suministra un motor de fase partida no es suficiente para arrancar la carga en el eje del motor. En estos casos se puede utilizar un motor de arranque por capacitor (figura 9-17), que tienen un capacitor en serie con el devanado auxiliar del motor. Si se selecciona de manera adecuada el tamaño del capacitor, la fuerza magnetomotriz

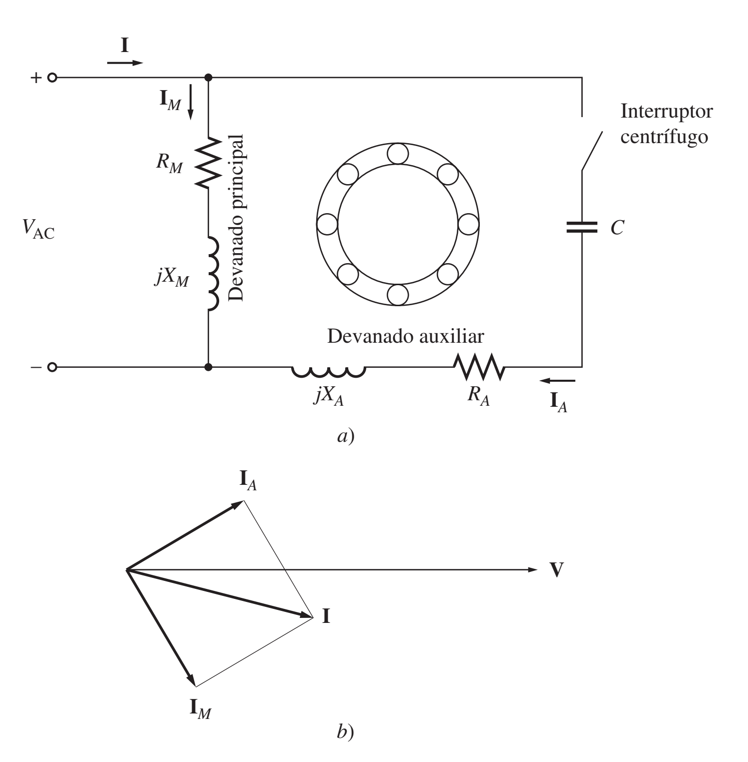


FIGURA 9-17 *a*) Motor de inducción de arranque por capacitor. *b*) Ángulos de la corriente del motor en el arranque.

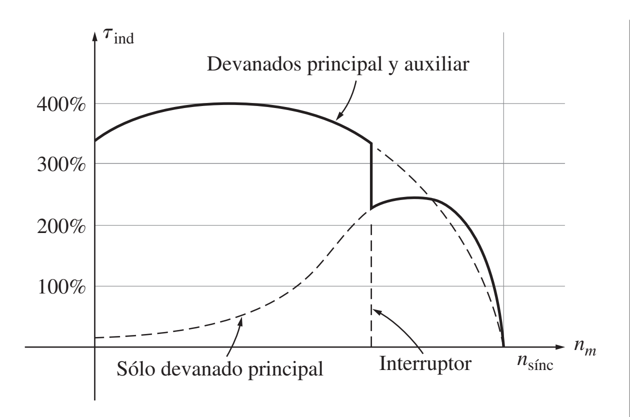


FIGURA 9-18 Característica par-velocidad de un motor de inducción con capacitor de arranque.

de la corriente de arranque en el devanado auxiliar se puede ajustar para que sea igual a la fuerza magnetomotriz de la corriente en el devanado principal y entonces es posible lograr que el ángulo de fase de la corriente en el devanado auxiliar esté 90° en adelanto con respecto a la corriente en el devanado principal. Puesto que los dos devanados están físicamente separados por 90°, una diferencia de 90° en la corriente tendrá como resultado un solo campo magnético giratorio uniforme del estator y el motor se comportará como si arrancara con una fuente de potencia trifásica. En este caso el par de arranque del motor puede ser mayor a 300% de su valor nominal (véase la figura 9-18).

Los motores de arranque por capacitor son más caros que los motores de fase partida y se utilizan en aplicaciones donde es indispensable un alto par de arranque. Las aplicaciones típicas de este tipo de motores son compresores, bombas, equipos de aire acondicionado y otras piezas de equipo que deben arrancar con una carga. (Véase la figura 9-19.)

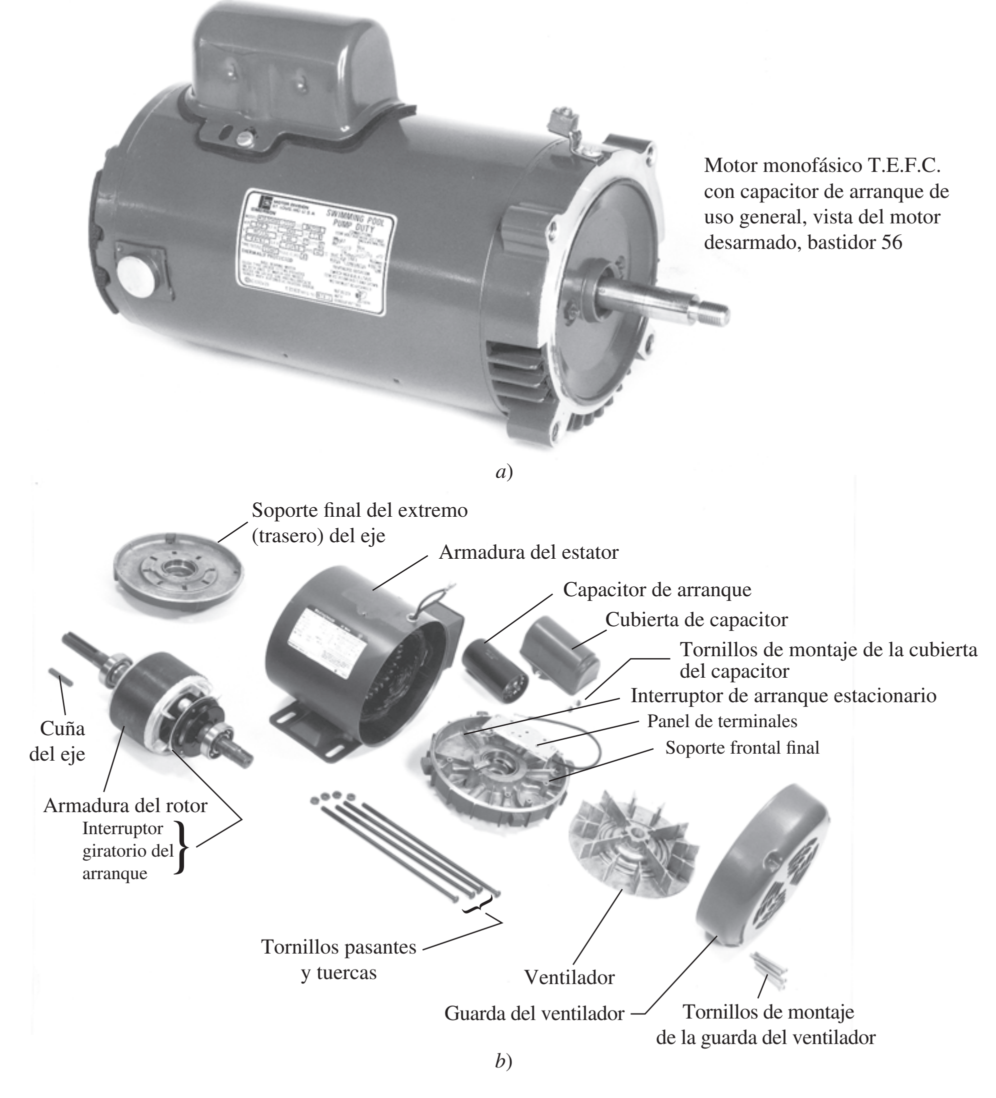


FIGURA 9-19 *a*) Motor de inducción con capacitor de arranque. (*Cortesía de Emerson Electric Company*.) *b*) Vista del motor desarmado de inducción con capacitor de arranque. (*Cortesía de Westinghouse Electric Corporation*.)

Motores de capacitor permanente dividido y motores de capacitor de arranque-capacitor de marcha

El capacitor de arranque mejora tanto la característica par-velocidad de un motor de inducción que a veces se deja permanentemente un devanado auxiliar con un pequeño capacitor en el circuito del motor. Si se elige de manera adecuada el valor del capacitor, este motor tendrá un campo magnético giratorio perfectamente uniforme dada cierta carga específica y se comportará como un motor de inducción trifásico en ese punto. Este tipo de diseño se llama motor *de capacitor permanente dividido* o *de capacitor de arranque y marcha* (figura 9-20). Los motores de capacitor permanente dividido son más sencillos que los motores de capacitor de arranque, puesto que no requieren de un interruptor de arranque. Con cargas normales son más eficientes y tienen un factor de potencia más alto y un par más suave que los motores de inducción monofásicos ordinarios.

Sin embargo, los motores de capacitor permanente dividido tienen *un par de arranque menor* que los motores de capacitor de arranque, puesto que los capacitores deben tener el tamaño adecuado para equilibrar las corrientes en los devanados principal y auxiliares en condiciones de carga normal. Puesto que la corriente de arranque es mucho más grande que la corriente con carga normal, el capacitor que equilibra las fases con cargas normales los hace desequilibrados en condiciones de arranque.

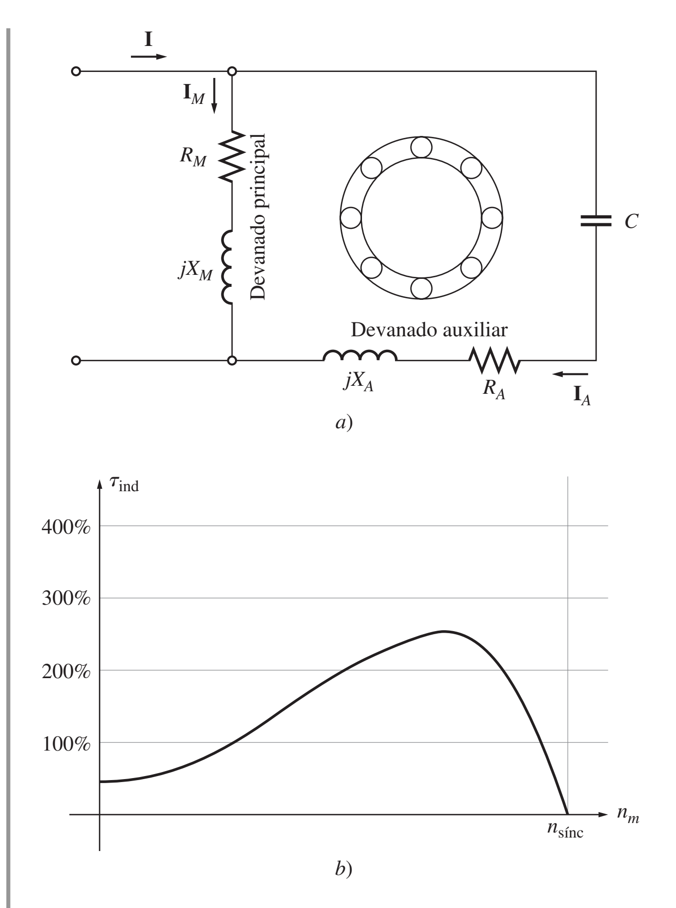


FIGURA 9-20 *a*) Motor de inducción con capacitor permanente dividido. *b*) Característica par-velocidad del motor.

Si se requiere tanto del par de arranque más grande posible como de las mejores condiciones de operación, se deben utilizar dos capacitores en el devanado auxiliar. Los motores con dos capacitores se llaman motores *de capacitor de arranque y capacitor de marcha* o *de capacitor de dos valores* (figura 9-21). El capacitor más grande sólo está presente en el circuito durante el arranque, cuando asegura que las corrientes en los devanados principal y auxiliares estén aproximadamente equilibradas, lo que produce un par de arranque muy alto. Cuando el motor se acelera, se abre el interruptor centrífugo y se queda sólo el capacitor permanente en el circuito del devanado auxiliar. El capacitor permanente es lo suficientemente grande como para equilibrar las corrientes con cargas de motor normales, por lo que el motor opera de manera eficiente con un alto par y un alto factor de potencia. El capacitor permanente de un motor como éste es por lo regular de 10 a 20% del tamaño del capacitor de arranque.

Se puede invertir la dirección de rotación de cualquier motor con capacitor por medio de la conmutación de las conexiones de sus devanados auxiliares.

Motores de polos sombreados

Un motor de inducción de polos sombreados es un motor de inducción que sólo tiene devanado principal. En lugar de tener un devanado auxiliar, tiene polos salientes, una parte de los cuales está rodeada por una bobina en cortocircuito llamada *bobina de sombreo* (véase la figura 9-22*a*). El devanado principal induce un flujo que varía con el tiempo en los polos. Cuando varía el flujo en los polos, induce un voltaje y una corriente en la bobina de sombreo *en sentido opuesto* al cambio de flujo original. Esta oposición *retarda* los cambios de flujo bajo las porciones sombreadas de las bobinas y por lo tanto produce un pequeño desequilibrio entre los dos campos magnéticos del estator que giran en direcciones contrarias. La rotación neta se orienta hacia la parte no sombreada a la porción sombreada de la cara polar. En la figura 9-22*b*) se muestra la característica par-velocidad de un motor de polos sombreados.

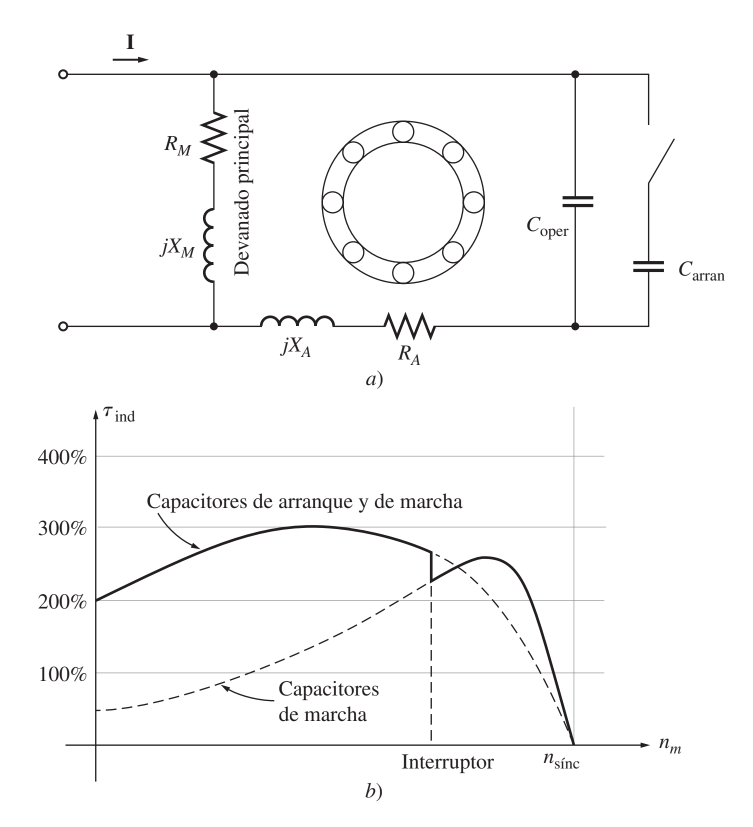


FIGURA 9-21 *a*) Motor de inducción con capacitor de arranque y capacitor de marcha. *b*) Característica par-velocidad del motor.

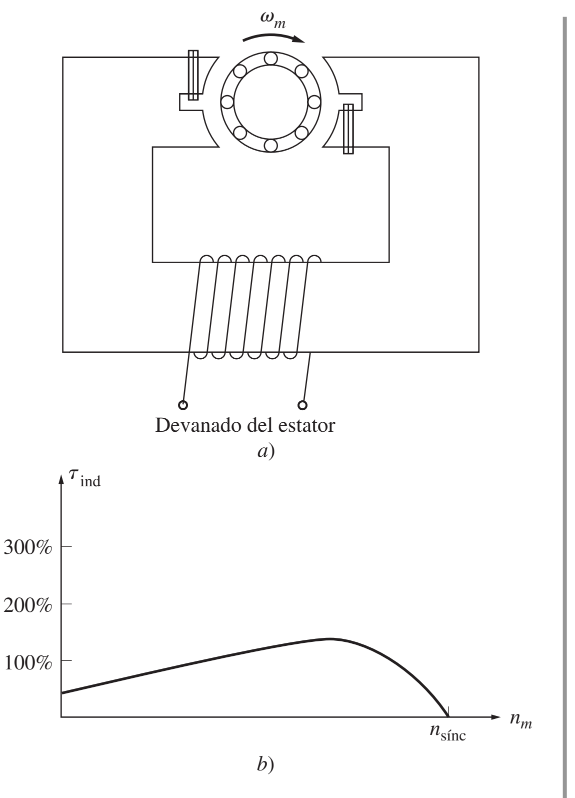


FIGURA 9-22 *a*) Motor básico de inducción de polos sombreados. *b*) Característica par-velocidad resultante.

Los polos sombreados producen menos par de arranque que cualquier otro tipo de sistema de arranque de un motor de inducción. Son mucho menos eficientes y tienen un deslizamiento mucho mayor que otros tipos de motores de inducción monofásicos. Este tipo de polos se usan sólo en motores muy pequeños ($\frac{1}{20}$ hp o menos) con requerimientos de par de arranque muy bajo. Cuando es oportuno utilizarlos, los motores de polos sombreados son el diseño más barato que hay.

Puesto que los motores de polos sombreados se basan en las bobinas de sombreo para obtener un par de arranque, no hay una forma sencilla de invertir su dirección de rotación. Para lograrlo, se deben instalar dos bobinas de sombreo en cada cara polar y selectivamente hacer cortocircuito en una u otra. Véanse las figuras 9-23 y 9-24.

Comparación entre los motores de inducción monofásicos

Los motores de inducción monofásicos se pueden ordenar de mejor a peor en términos de sus características de arranque y marcha:

1. Motor de capacitor de arranque y capacitor de marcha.
2. Motor por capacitor de arranque.
3. Motor de capacitor dividido permanente.
4. Motor de fase partida.
5. Motor de polos sombreados.

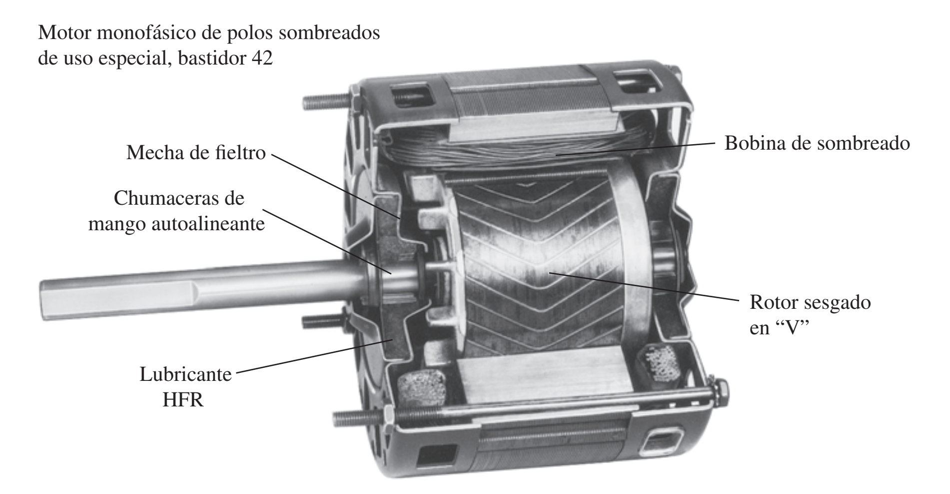


FIGURA 9-23 Vista transversal de un motor de inducción de polos sombreados. (*Cortesía de Westinghouse Electric Corporation*.)

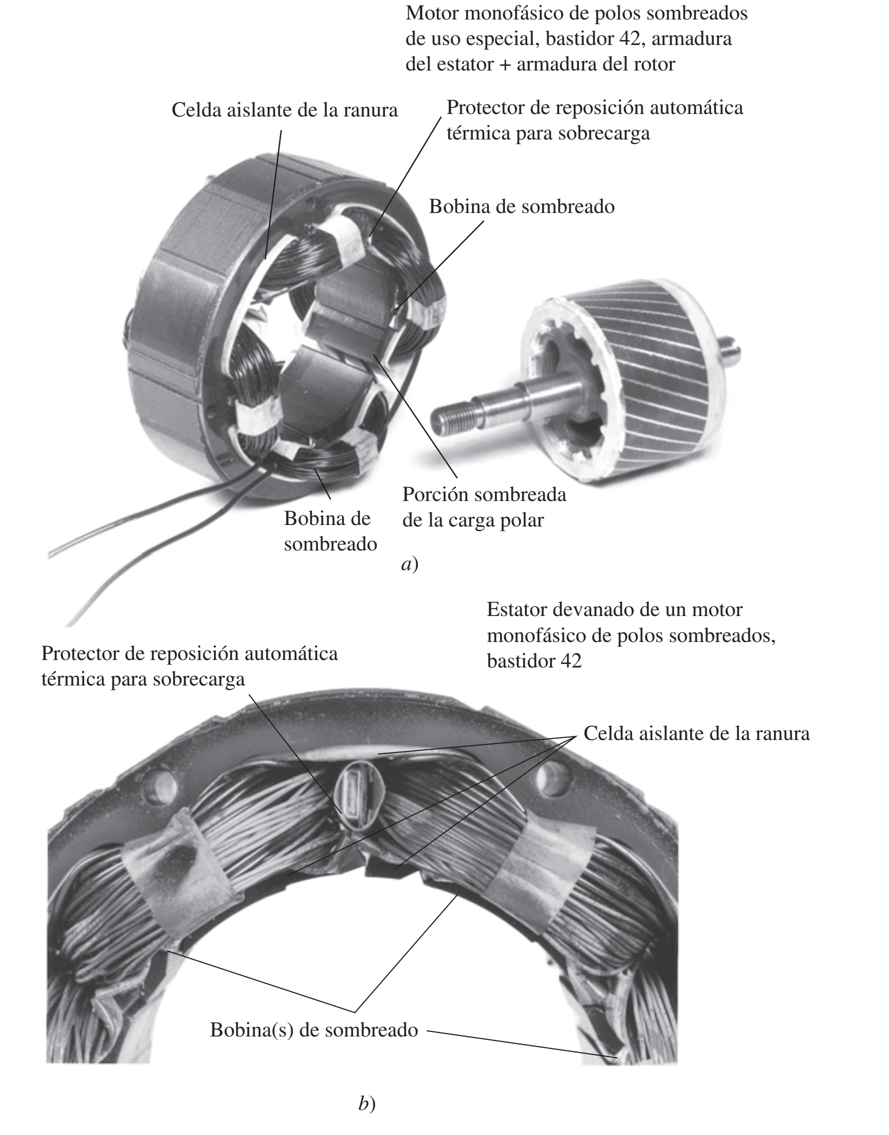


FIGURA 9-24 Vistas en detalle de la construcción de un motor de inducción de polos sombreados de cuatro polos. (*Cortesía de Westinghouse Electric Corporation*.)

Naturalmente, el mejor motor también es el más caro y el peor motor es el más barato. Además, no todas estas técnicas de arranque están disponibles en toda la gama de tamaños de motor. Es trabajo del ingeniero seleccionar el motor más barato disponible que funcionará adecuadamente para cierta aplicación.

9.4 CONTROL DE VELOCIDAD DE UN MOTOR DE INDUCCIÓN MONOFÁSICO

En general, la velocidad de los motores de inducción monofásicos se puede controlar de la misma manera que la de los motores de inducción polifásicos. En el caso de los motores con rotores de jaula de ardilla están disponibles las siguientes técnicas:

1. Variación de la frecuencia del estator.
2. Cambio del número de polos
3. Cambio del voltaje V_T aplicado en las terminales.

En los diseños prácticos que involucran motores con deslizamientos más bien altos, el método común para controlar la velocidad es la variación del voltaje en las terminales del motor. Es posible variar el voltaje aplicado al motor de tres formas diferentes:

1. Se puede utilizar un autotransformador para ajustar continuamente el voltaje de línea. Éste es el método más caro de control de velocidad y sólo se ocupa cuando se requiere un control de velocidad muy suave.
2. Se puede utilizar un circuito SCR o TRIAC para reducir el voltaje rms aplicado al motor por medio del control de fase de ca. Los circuitos de control en estado sólido son considerablemente más baratos que los autotransformadores y por lo tanto cada vez son más comunes.
3. Se puede insertar un resistor en serie con el circuito del estator del motor. Éste es el método más barato para controlar el voltaje, pero tiene la desventaja de que se pierde una cantidad considerable de potencia en el resistor, lo que reduce la eficiencia de la conversión de potencia general.

Hay otra técnica que también se usa con motores que tienen deslizamientos altos como los de polos sombreados. En lugar de ocupar un autotransformador separado para modificar el voltaje aplicado al estator del motor, *se puede utilizar el devanado* como autotransformador. La figura 9-25 muestra una representación esquemática de un devanado principal del estator con varias tomas de derivación a lo largo del devanado. Puesto que el devanado del estator está envuelto alrededor de un núcleo de hierro, se comporta como un autotransformador.

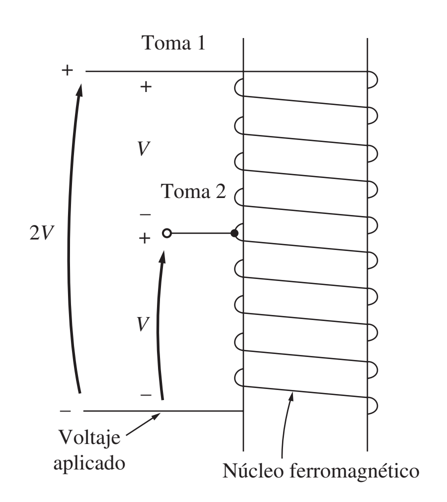


FIGURA 9-25 Utilización de un devanado en el estator como autotransformador. Si se aplica un voltaje V al devanado en la toma central, el voltaje total del devanado será de $2V$.

Cuando se aplica el voltaje de línea pleno V a través de todo el devanado principal, el motor de inducción opera normalmente. Supóngase en cambio que se aplica el voltaje de línea pleno a la toma 2, la toma central del devanado. En este caso se inducirá un voltaje idéntico en la mitad superior del devanado por medio de la acción transformadora y el voltaje total del devanado será el doble del voltaje de línea aplicado. El voltaje total aplicado al devanado se duplicó efectivamente.

Por lo tanto, mientras más pequeña sea la fracción de la bobina total a través de la cual se aplica el voltaje de línea, mayor será el voltaje total a través de todo el devanado y mayor será la velocidad del motor para cierta carga dada (véase la figura 9-26).

El anterior es el método estándar que se utiliza para controlar la velocidad de los motores monofásicos en muchas aplicaciones de ventiladores o sopladores. Este tipo de control de velocidad tiene la ventaja de que es bastante barato, puesto que los únicos componentes que se requieren son tomas en el devanado principal del motor y un interruptor multiposiciones ordinario. También tiene la ventaja de que el efecto del autotransformador no consume potencia como lo haría un resistor en serie.

9.5 CIRCUITO MODELO DE UN MOTOR DE INDUCCIÓN MONOFÁSICO

Como ya se describió, la comprensión del par inducido en un motor de inducción monofásico sólo se puede lograr por medio de las teorías del doble campo giratorio o de campo cruzado de los motores monofásicos. Cualquiera de los dos métodos puede llevar al circuito equivalente del motor y es posible deducir la característica par-velocidad con cualquiera de ellos.

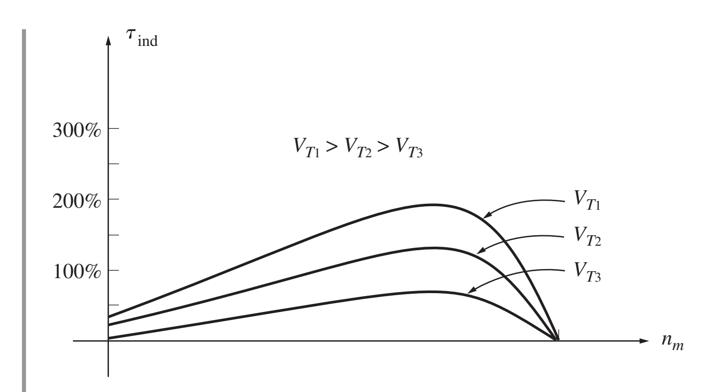


FIGURA 9-26 Característica par-velocidad de un motor de inducción con polos sombreados conforme se cambia el voltaje en las terminales. Se puede lograr incrementar V_T por medio del aumento del voltaje a través del devanado completo o por medio de la conmutación de una toma menor en el devanado del estator.

Esta sección se restringe a la revisión del circuito equivalente con base en la teoría del doble campo giratorio; en realidad, sólo en un caso especial de esa teoría. Se desarrollará un circuito equivalente del *devanado principal* de un motor de inducción monofásico que opera solo. Se requiere la técnica de componentes simétrica para analizar un motor monofásico tanto con devanados principal como auxiliares, y puesto que los componentes simétricos están fuera del alcance de este libro, no se explicará ese caso. Si se quiere un análisis más detallado de los motores monofásicos, consulte la fuente número 4 al final de este capítulo.

La mejor manera de comenzar el análisis de un motor de inducción monofásico es considerar el motor cuando está detenido. En ese momento, el motor parece ser un transformador monofásico con un circuito secundario en cortocircuito y, por lo tanto, el circuito equivalente es el de un transformador. En la figura 9-27*a*) se puede apreciar este circuito equivalente. En esta figura, R_1 y X_1 son la resistencia y reactancia del devanado del estator, X_M es la reactancia de magnetización y R_2 y X_2 son los valores referidos de la resistencia y reactancia del rotor. No se muestran las pérdidas en el núcleo de la máquina y se agruparán con las pérdidas mecánicas y misceláneas, como parte de las pérdidas rotacionales del motor.

Ahora recuérdese que el flujo oscilatorio en el entrehierro del motor en condiciones de rotor estático se puede dividir en dos campos magnéticos iguales y opuestos dentro del motor. Puesto que estos campos son del mismo tamaño, cada uno contribuye con una parte igual a las caídas de voltaje

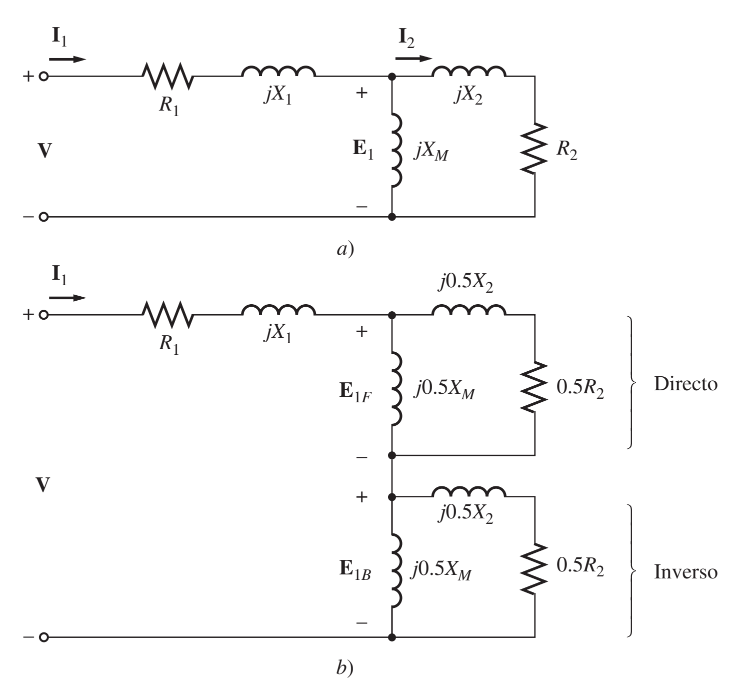


FIGURA 9-27 *a*) Circuito equivalente de un motor de inducción monofásico estático. Sólo sus devanados principales están energizados. *b*) Circuito equivalente con los efectos de los campos magnéticos directo e inverso separados.

resistivas y reactivas en el circuito del rotor. Es posible dividir el circuito equivalente del rotor en dos secciones, cada una correspondiente a los efectos de uno de los campos magnéticos. En la figura 9-27*b*) se muestra el circuito equivalente del motor con los efectos de ambos campos magnéticos por separado.

Ahora suponga que el rotor del motor comienza a girar con la ayuda del devanado auxiliar y que éste se retira una vez que el motor acelera. Como se dedujo en el capítulo 8, la resistencia efectiva del rotor de un motor de inducción depende de la cantidad de movimiento relativo entre los campos magnéticos del rotor y del estator. Sin embargo, hay dos campos magnéticos en este motor y.la cantidad de movimiento relativo de cada uno de ellos es diferente.

En el caso del campo magnético que *va hacia adelante*, la diferencia por unidad entre la velocidad del rotor y la velocidad del campo magnético es el desplazamiento s, donde el deslizamiento se define igual que para los motores de inducción trifásicos. La resistencia del rotor en la parte del circuito asociada con el campo magnético que va hacia adelante es entonces de $0.5R_2/s$.

El campo magnético que va hacia adelante gira a una velocidad n_{sinc} y el campo magnético inverso gira a una velocidad $-n_{\text{sinc}}$. Por lo tanto, la diferencia por unidad total en velocidad (con una base de n_{sinc}) entre el campo magnético que va hacia adelante y el inverso es de 2. Puesto que el rotor gira a una velocidad s menor a la del campo magnético que va hacia adelante, la diferencia total de velocidad por unidad entre el rotor y el campo magnético inverso es de $2 - s$. Por lo tanto, la resistencia efectiva del rotor en la parte del circuito asociada con el campo magnético inverso es de $0.5R_2/(2 - s)$.

En la figura 9-28 se muestra el circuito equivalente total del motor de inducción.

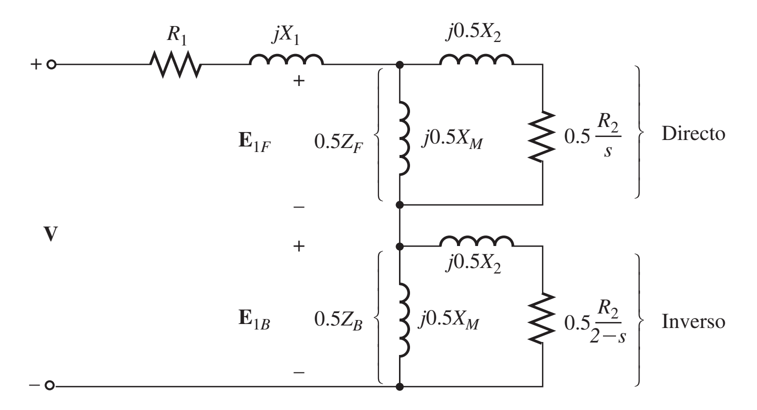


FIGURA 9-28 Circuito equivalente de un motor de inducción monofásico que opera a cierta velocidad y sólo sus devanados principales están energizados.

Análisis del circuito con un circuito equivalente de un motor de inducción monofásico

El circuito equivalente del motor de inducción monofásico que se aprecia en la figura 9-28 es similar al circuito equivalente trifásico, excepto en que los componentes de potencia y par directos e inversos están presentes. Las mismas relaciones de potencia general y de par que se aplican a los motores trifásicos se aplican a los componentes directos e inversos del motor monofásico, y la potencia y par netos de la máquina son la *diferencia* entre los componentes directos e inversos.

En la figura 9-29 se muestra de nuevo el diagrama de flujo de potencia de un motor de inducción para utilizarlo como referencia.

Para simplificar el cálculo del flujo de corriente de entrada al motor, se acostumbra definir las impedancias Z_F y Z_B, donde Z_F es una impedancia equivalente sencilla para todos los elementos de impedancia del campo magnético que va hacia adelante y Z_B es una impedancia equivalente sencilla de todos los elementos de impedancia del campo magnético inverso (véase la figura 9-30). Estas impedancias están dadas por

$$Z_F = R_F + jX_F = \frac{(R_2/s + jX_2)(jX_M)}{(R_2/s + jX_2) + jX_M} \tag{9-5}$$

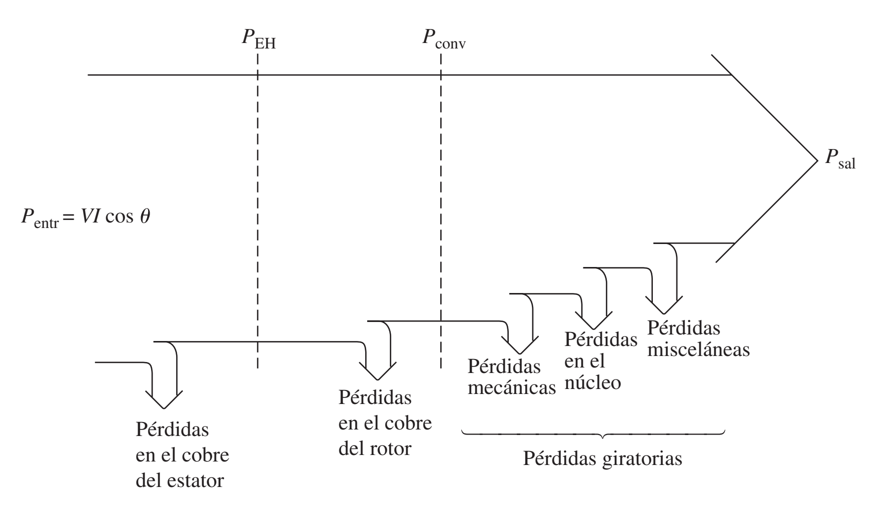


FIGURA 9-29 Diagrama de flujo de potencia de un motor de inducción monofásico.

$$Z_B = R_B + jX_B = \frac{[R_2/(2 - s) + jX_2](jX_M)}{[R_2/(2 - s) + jX_2] + jX_M} \tag{9-6}$$

En términos de Z_F y Z_B, la corriente que fluye en el devanado del estator del motor de inducción es

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{V}}{R_1 + jX_1 + 0.5Z_F + 0.5Z_B} \tag{9-7}$$

La potencia por fase en el entrehierro de un motor de inducción trifásico es igual a la potencia consumida por la resistencia del circuito del rotor $0.5R_2/s$. De manera similar, la potencia directa en el entrehierro de un motor de inducción monofásico es la potencia consumida por $0.5R_2/s$ y la potencia inversa del entrehierro del motor es la potencia consumida por $0.5R_2/(2 - s)$. Por lo tanto, la potencia del entrehierro del motor se puede calcular si se determina la potencia directa en el resistor $0.5R_2/s$, si se establece la potencia en el resistor inverso $0.5R_2/(2 - s)$ y se restan entre ellas.

La parte más difícil de este cálculo es determinar las corrientes separadas que fluyen en los dos resistores. Afortunadamente, este cálculo se puede hacer simplificar. Nótese que el *único* resistor dentro de los elementos del circuito que componen la impedancia equivalente Z_F es el resistor R_2/s. Puesto que Z_F es equivalente a este circuito, cualquier potencia consumida por Z_F también debe ser consumida por el circuito original y puesto que R_2/s es el único resistor del circuito original, su consumo de potencia debe ser igual al de la impedancia Z_F. Por lo tanto, la potencia del entrehierro del campo magnético que va hacia adelante se puede expresar como

FIGURA 9-30 La combinación en serie de R_F y jX_F es el equivalente Thevenin de los elementos de impedancia del campo hacia adelante y, por lo tanto, R_F debe consumir la misma potencia que R_2/s a una corriente dada.

$$P_{EH,F} = I_1^2(0.5\,R_F) \tag{9-8}$$

De manera similar, la potencia del entrehierro del campo magnético inverso se puede expresar como

$$P_{EH,B} = I_1^2(0.5\,R_B) \tag{9-9}$$

La ventaja de estas dos ecuaciones es que sólo se requiere calcular una corriente I_1 para determinar ambas potencias.

La potencia total del entrehierro en un motor de inducción monofásico es entonces

$$P_{EH} = P_{EH,F} - P_{EH,B} \tag{9-10}$$

El par inducido en un motor de inducción trifásico se puede encontrar con la ecuación

$$\tau_{\text{ind}} = \frac{P_{\text{EH}}}{\omega_{\text{sinc}}} \tag{9-11}$$

donde P_{EH} es la potencia neta del entrehierro obtenida con la ecuación (9-10).

Las pérdidas en el cobre del estator se pueden encontrar por medio de la suma de las pérdidas en el cobre del rotor debidas al campo directo y las pérdidas en el cobre del rotor debidas al campo inverso.

$$P_{\text{RCL}} = P_{\text{RCL},F} + P_{\text{RCL},B} \tag{9-12}$$

Las pérdidas en el cobre del rotor en un motor de inducción trifásico son iguales al movimiento relativo por unidad entre el campo del rotor y del estator (deslizamiento) multiplicados por la potencia del entrehierro de la máquina. De manera similar, las pérdidas de sentido directo en el cobre del rotor de un motor de inducción monofásico están dadas por

$$P_{\text{PCR},F} = sP_{\text{EH},F} \tag{9-13}$$

y las pérdidas de sentido inverso en el cobre del rotor del motor están dadas por

$$P_{\text{PCR},B} = sP_{\text{EH},B} \tag{9-14}$$

Puesto que estas dos pérdidas de potencia en el rotor se dan a diferentes frecuencias, la pérdida total de potencia es igual a su suma.

La potencia convertida de forma eléctrica a forma mecánica en un motor de inducción monofásico está dada por la misma ecuación que P_{conv} para un motor de inducción trifásico. Esta ecuación es

$$P_{\text{conv}} = \tau_{\text{ind}}\omega_m \tag{9-15}$$

Puesto que $\omega_m = (1 - s)\omega_{\text{sinc}}$, esta ecuación se puede también escribir de la siguiente manera

$$P_{\text{conv}} = \tau_{\text{ind}}(1 - s)\omega_m \tag{9-16}$$

De la ecuación (9-11) se sabe que $P_{\text{EH}} = \tau_{\text{ind}}\omega_{\text{sinc}}$, por lo que P_{conv} también se puede escribir como

$$P_{\text{conv}} = (1 - s)P_{\text{EH}} \tag{9-17}$$

Como sucede en el motor de inducción trifásico, la potencia de salida del eje no es igual a P_{conv}, puesto que se deben restar las pérdidas rotacionales. En el modelo de motor de inducción monofásico que se utiliza aquí se deben restar las pérdidas en el núcleo, las mecánicas y las misceláneas de P_{conv} para obtener P_{sal}.

EJEMPLO 9-1

Un motor de inducción de fase partida de $\frac{1}{3}$ hp, 110 V, 60 Hz, con seis polos, tiene las siguientes impedancias:

$$R_1 = 1.52\ \Omega \qquad X_1 = 2.10\ \Omega \qquad X_M = 58.2\ \Omega$$
$$R_2 = 3.13\ \Omega \qquad X_2 = 1.56\ \Omega$$

Las pérdidas en el núcleo del motor son de 35 W y las pérdidas por fricción, rozamiento con el aire y misceláneas son de 16 W. El motor opera a la frecuencia y voltaje nominales con el devanado de arranque

abierto y el deslizamiento del motor es de 5%. Encuentre las siguientes cantidades en el motor en estas condiciones:

a) Velocidad en revoluciones por minuto
b) Corriente del estator en amperes
c) Factor de potencia del estator
d) P_{entr}
e) P_{EH}
f) P_{conv}
g) τ_{ind}
h) P_{sal}
i) τ_{carga}
j) Eficiencia

Solución

Las impedancias hacia adelante y en reversa del motor con un deslizamiento de 5% son

$$Z_F = R_F + jX_F = \frac{(R_2/s + jX_2)(jX_M)}{(R_2/s + jX_2) + jX_M} \tag{9-5}$$

$$= \frac{(3.13\ \Omega/0.05 + j1.56\ \Omega)(j58.2\ \Omega)}{(3.13\ \Omega/0.05 + j1.56\ \Omega) + j58.2\ \Omega}$$

$$= \frac{(62.6\angle 1.43°\ \Omega)(j58.2\ \Omega)}{(62.6\ \Omega + j1.56\ \Omega) + j58.2\ \Omega}$$

$$= 39.9\angle 50.5°\ \Omega = 25.4 + j30.7\ \Omega$$

$$Z_B = R_B + jX_B = \frac{[R_2/(2-s) + jX_2](jX_M)}{[R_2/(2-s) + jX_2] + jX_M} \tag{9-6}$$

$$= \frac{(3.13\ \Omega/1.95 + j1.56\ \Omega)(j58.2\ \Omega)}{(3.13\ \Omega/1.95 + j1.56\ \Omega) + j58.2\ \Omega}$$

$$= \frac{(2.24\angle 44.2°\ \Omega)(j58.2\ \Omega)}{(1.61\ \Omega + j1.56\ \Omega) + j58.2\ \Omega}$$

$$= 2.18\angle 45.9°\ \Omega = 1.51 + j1.56\ \Omega$$

Estos valores se utilizarán para determinar la corriente, potencia y par del motor.

a) La velocidad síncrona del motor es

$$n_{sinc} = \frac{120 f_e}{P} = \frac{120(60\text{ Hz})}{6\text{ polos}} = 1\ 200\text{ r/min}$$

Puesto que el motor opera con un deslizamiento de 5%, su velocidad mecánica es

$$n_m = (1 - s)n_{sinc}$$

$$n_m = (1 - 0.05)(1\ 200\text{ r/min}) = 1\ 140\text{ r/min}$$

b) La corriente del estator del motor es

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{V}}{R_1 + jX_1 + 0.5Z_F + 0.5Z_B} \tag{9-7}$$

$$= \frac{110\angle 0°\text{ V}}{1.52\ \Omega + j2.10\ \Omega + 0.5(25.4\ \Omega + j30.7\ \Omega) + 0.5(1.51\ \Omega + j1.56\ \Omega)}$$

$$= \frac{110\angle 0°\text{ V}}{14.98\ \Omega + j18.23\ \Omega} = \frac{110\angle 0°\text{ V}}{23.6\angle 50.6°\ \Omega} = 4.66\angle -50.6°\text{ A}$$

c) El factor de potencia del estator del motor es

$$\text{FP} = \cos(-50.6°) = 0.635 \text{ en retraso}$$

d) La potencia de entrada del motor es

$$P_{\text{entr}} = VI\cos\theta$$
$$= (110\text{ V})(4.66\text{ A})(0.635) = 325\text{ W}$$

e) La potencia del entrehierro de onda hacia adelante es

$$P_{\text{EH},F} = I_1^2(0.5\,R_F) \tag{9-8}$$
$$= (4.66\text{ A})^2(12.7\ \Omega) = 275.8\text{ W}$$

y la potencia del entrehierro de onda hacia atrás es

$$P_{\text{EH},B} = I_1^2(0.5\,R_B) \tag{9-9}$$
$$= (4.66\text{ A})2(0.755\text{ V}) = 16.4\text{ W}$$

Por lo tanto, la potencia del entrehierro total del motor es

$$P_{\text{EH}} = P_{\text{EH},F} - P_{\text{EH},B} \tag{9-10}$$
$$= 275.8\text{ W} - 16.4\text{ W} = 259.4\text{ W}$$

f) La potencia convertida de forma eléctrica a forma mecánica es

$$P_{\text{conv}} = (1 - s)\,P_{\text{EH}} \tag{9-17}$$
$$= (1 - 0.05)(259.4\text{ W}) = 246\text{ W}$$

g) El par inducido en el motor está dado por

$$\tau_{\text{ind}} = \frac{P_{\text{EH}}}{\omega_{\text{sinc}}} \tag{9-11}$$
$$= \frac{259.4\text{ W}}{(1\,200\text{ r/min})(1\text{ min/60 s})(2\pi\text{ rad/r})} = 2.06\text{ N}\cdot\text{m}$$

h) La potencia de salida está dada por

$$P_{\text{sal}} = P_{\text{conv}} - P_{\text{rot}} = P_{\text{conv}} - P_{\text{núcl}} - P_{\text{mec}} - P_{\text{misc}}$$
$$= 246\text{ W} - 35\text{ W} - 16\text{ W} = 195\text{ W}$$

i) El par de carga del motor está dado por

$$\tau_{\text{carga}} = \frac{P_{\text{sal}}}{\omega_m}$$
$$= \frac{195\text{ W}}{(1\,140\text{ r/min})(1\text{ min/60 s})(2\pi\text{ rad/r})} = 1.63\text{ N}\cdot\text{m}$$

j) Por último, la eficiencia del motor en estas condiciones es de

$$\eta = \frac{P_{\text{sal}}}{P_{\text{entr}}} \times 100\% = \frac{195\text{ W}}{325\text{ W}} \times 100\% = 60\%$$

9.6 OTROS TIPOS DE MOTORES

Los otros dos tipos de motores (de reluctancia y de histéresis) se ocupan en ciertas aplicaciones especiales. Estos motores difieren de los descritos en la construcción del rotor, pero utilizan el

mismo diseño de estator. Al igual que los motores de inducción se pueden construir con estatores monofásicos o trifásicos. Otro tipo de motor de uso especial es el de avance paso a paso. Un motor de avance paso a paso requiere un estator polifásico, pero no necesita de una fuente de potencia trifásica. El último motor de uso especial que se explicará es el motor de cd sin escobillas, que como su nombre sugiere funciona con una fuente de potencia de cd.

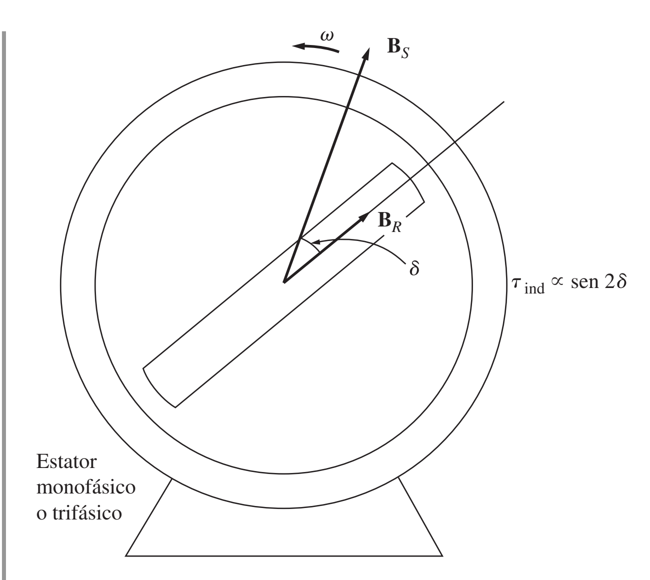


FIGURA 9-31 Concepto básico de un motor de reluctancia.

Motores de reluctancia

Un *motor de reluctancia* es aquel que para operar depende del par de reluctancia. El par de reluctancia es el par inducido en un objeto de hierro (como un alfiler) en presencia de un campo magnético externo, que provoca que el objeto se alinee con el campo magnético externo. Este par se presenta debido a que el campo externo induce un campo magnético interno en el objeto de hierro y el par aparece entre los dos campos, haciendo que el objeto gire hasta que se alinee con el campo externo. Para que se produzca un par de reluctancia en un objeto, se debe extender a lo largo de los ejes en ángulos que correspondan con los ángulos de los polos adyacentes del campo magnético externo.

En la figura 9-31 se muestra un esquema simple de un motor de reluctancia de dos polos. Se puede demostrar que el par aplicado al rotor del motor es proporcional a sen 2δ, donde δ es el ángulo eléctrico entre los campos magnéticos del rotor y del estator. Por lo tanto, el par de reluctancia de un motor llega a su valor máximo cuando el ángulo entre los campos magnéticos del rotor y del estator es de 45°.

El tipo de motor de reluctancia que se observa en la figura 9-31 es un *motor síncrono*, puesto que el rotor estará unido a los campos magnéticos del estator mientras no se exceda el par máximo del motor. Al igual que un motor síncrono normal, no tiene par de arranque y no puede encenderse solo.

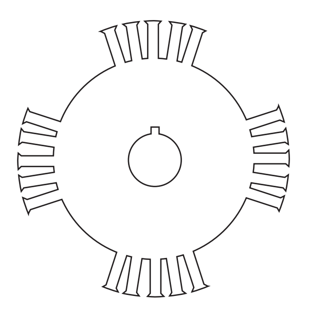


FIGURA 9-32 Diseño del rotor de un motor de reluctancia de autoarranque o de "inducción síncrona".

Se puede construir un *motor de reluctancia de autoarranque* que opere a velocidad síncrona hasta que se exceda su par de reluctancia por medio de la modificación del rotor de un motor de inducción, tal como se observa en la figura 9-32. En esta figura el rotor tiene polos salientes para la operación en estado estacionario como un motor de reluctancia y también tiene devanados de jaula o de amortiguamiento para el arranque. El estator de un motor de este tipo puede ser trifásico o monofásico. En la figura 9-33 se muestra la característica par-velocidad de este motor, al que a veces se llama *motor de inducción síncrono*.

El motor Synchrospeed es una variación interesante del motor de reluctancia y lo fabrica en Estados Unidos MagneTek, Inc. En la figura 9-34 se ilustra el rotor de este motor. Utiliza "guías de flujo" para incrementar el acoplamiento entre las caras de los polos adyacentes y por lo tanto aumentar el par de reluctancia máxima del motor. Con estas guías de flujo, el par de reluctancia máxima se incrementa a alrededor de 150% del par nominal, en comparación con sólo un poco más de 100% del par nominal que logra un motor de reluctancia convencional.

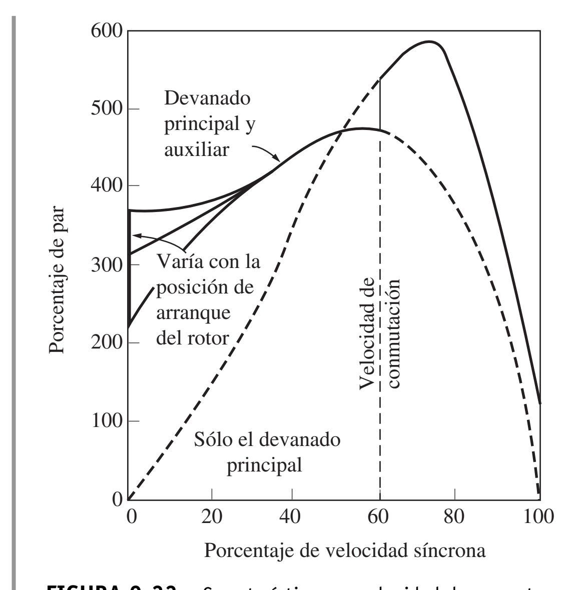


FIGURA 9-33 Característica par-velocidad de un motor monofásico de reluctancia de autoarranque.

Motores de histéresis

Hay otro motor de uso especial que utiliza el fenómeno de la histéresis para producir un par mecánico. El rotor de un motor de histéresis es un cilindro liso de material magnético sin dientes, protuberancias ni devanados. El estator del motor puede ser monofásico o trifásico; en el primer caso, se debe usar un capacitor permanente con un devanado auxiliar para

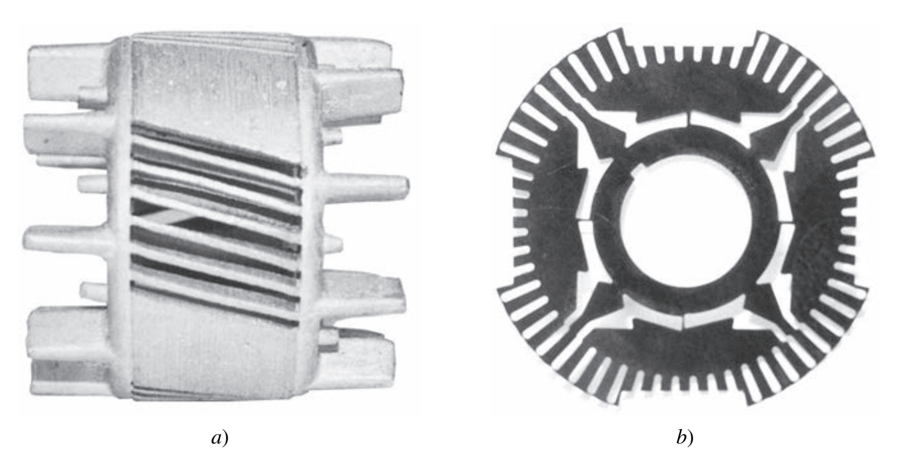


FIGURA 9-34 *a*) Pieza de aluminio fundido del rotor de un motor Synchrospeed. *b*) Laminación del rotor del motor. Nótense las guías de flujo que conectan los polos adyacentes. Estas guías incrementan el par de reluctancia del motor. (*Cortesía de MagneTek, Inc.*)

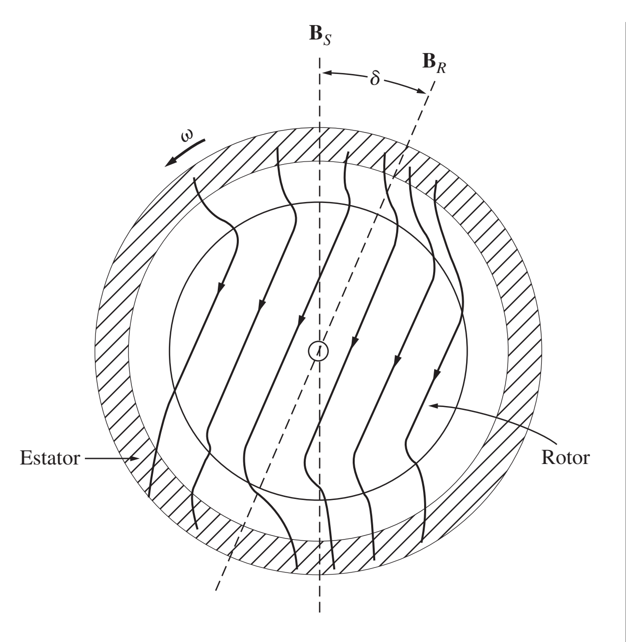


FIGURA 9-35 Construcción de un motor de histéresis. El componente principal del par en este motor es proporcional al ángulo entre los campos magnéticos del rotor y del estator.

suministrar un campo magnético tan uniforme como sea posible, puesto que así se reduce en gran medida las pérdidas del motor.

La figura 9-35 muestra la operación básica de un motor de histéresis. Cuando se le aplica una corriente trifásica (o monofásica con devanado auxiliar) al estator del motor, aparece un campo magnético giratorio dentro de la máquina. Este campo magnético giratorio magnetiza el metal del rotor e induce polos dentro de él.

Cuando el motor opera por debajo de la velocidad síncrona, hay dos fuentes de par dentro de él. La mayoría del par lo produce la histéresis. Cuando el campo magnético del estator barre alrededor de la superficie del rotor, el flujo de éste no lo puede seguir exactamente puesto que el metal del rotor tiene una gran pérdida por histéresis. Mientras más grande sea ésta, mayor será el ángulo por el que el campo magnético del rotor estará en retraso con el campo magnético del estator. Puesto que los campos magnéticos del estator y del rotor tienen diferentes ángulos, se producirá un par finito en el motor. Además, el campo magnético del estator producirá corrientes parásitas en el rotor, las cuales producen su propio campo magnético e incrementan aún más el par en el rotor. Mientras más grande sea el movimiento relativo entre el campo magnético del estator y del rotor, mayores serán las corrientes parásitas y el par de corriente parásita.

Cuando el motor llega a velocidad síncrona, el flujo del estator deja de barrer a través del rotor y éste actúa como imán permanente. Entonces, el par inducido en el motor es proporcional al ángulo entre el campo magnético del rotor y del estator, hasta un ángulo máximo delimitado por la histéresis en el rotor.

En la figura 9-36 se puede ver la característica par-velocidad de un motor de histéresis. Puesto que la cantidad de histéresis dentro de un rotor está en función sólo de la densidad de flujo en el estator y del material del que está hecho, el par de histéresis del motor es aproximadamente constante a cualquier velocidad entre cero y n_{sinc}. El par de corriente parásita es aproximadamente proporcional al deslizamiento del motor. Estos dos hechos son los culpables de la forma de la característica par-velocidad del motor de histéresis.

Puesto que el par de un motor de histéresis a cualquier velocidad subsíncrona es mayor que su par síncrono máximo, el motor de histéresis puede acelerar con cualquier carga que pueda soportar durante la operación normal.

Se puede construir un motor de histéresis muy pequeño con estator de polos sombreados para crear un motor síncrono de baja potencia y de autoarranque. En la figura 9-37 se muestra un motor de este tipo. Por lo general se lo utiliza como el mecanismo accionador de los relojes eléctricos. Por lo tanto, un reloj eléctrico está sincronizado con la frecuencia de línea del sistema de potencia y el reloj resultante es tan exacto (o inexacto) como la frecuencia del sistema de potencia al que está unido.

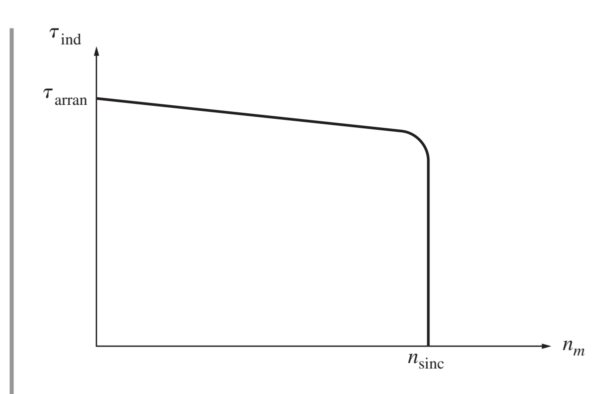


FIGURA 9-36 Característica par-velocidad de un motor.

Motores de avance paso a paso (motores a pasos)

Un *motor de avance paso a paso* es un tipo especial de motor síncrono diseñado para girar a cierto número específico de grados por cada pulso eléctrico que recibe su unidad de control. Los pasos típicos son de 7.5° o 15° por pulso. Estos motores se utilizan en muchos sistemas de control, puesto que pueden controlar precisamente la posición de un eje u otra pieza de la maquinaria.

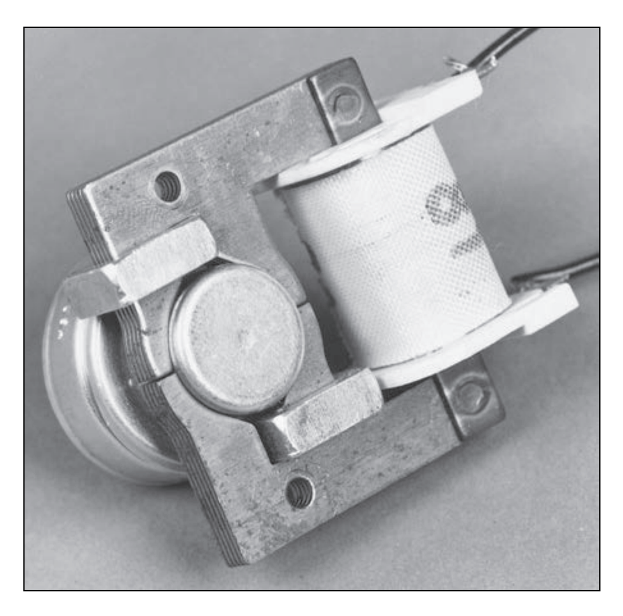


FIGURA 9-37 Pequeño motor de histéresis con estator de polos sombreados, adecuado para accionar un reloj eléctrico. Nótense los polos sombreados del estator. (*Stephen J. Chapman*.)

En la figura 9-38 se puede observar un motor de avance paso a paso simple y su unidad de control asociada. Para entender la operación de los motores de avance paso a paso examínese la figura 9-39, que muestra un estator trifásico de dos polos con un rotor de imán permanente. Si se aplica un voltaje de cd a la fase *a* del estator y no se aplica ningún voltaje a las fases *b* y *c*, se inducirá un par en el rotor que provocará su alineación con el campo magnético del estator $\mathbf{B}_S$, como puede verse en la figura 9-39*b*).

Ahora suponga que se apaga la fase *a* y que se aplica un voltaje negativo a la fase *c*. El nuevo campo magnético del estator rota 60° con respecto al campo magnético previo y el rotor del motor lo sigue. Si se continúa con este patrón, es posible construir una tabla que indique la posición del rotor en función del voltaje que aplica al estator del motor. Si el voltaje que produce la unidad de control cambia con cada pulso de entrada en el orden que se ilustra en la tabla 9-1, el motor de avance paso a paso avanzará 60° con cada pulso de entrada.

Es muy fácil construir un motor de avance paso a paso con un tamaño de paso más pequeño si se incrementa el número de polos del motor. Con la ecuación (3-31) se puede saber que el número de grados mecánicos correspondientes a cierto número de grados eléctricos es

$$\theta_m = \frac{2}{P}\,\theta_e \qquad \textbf{(9-18)}$$

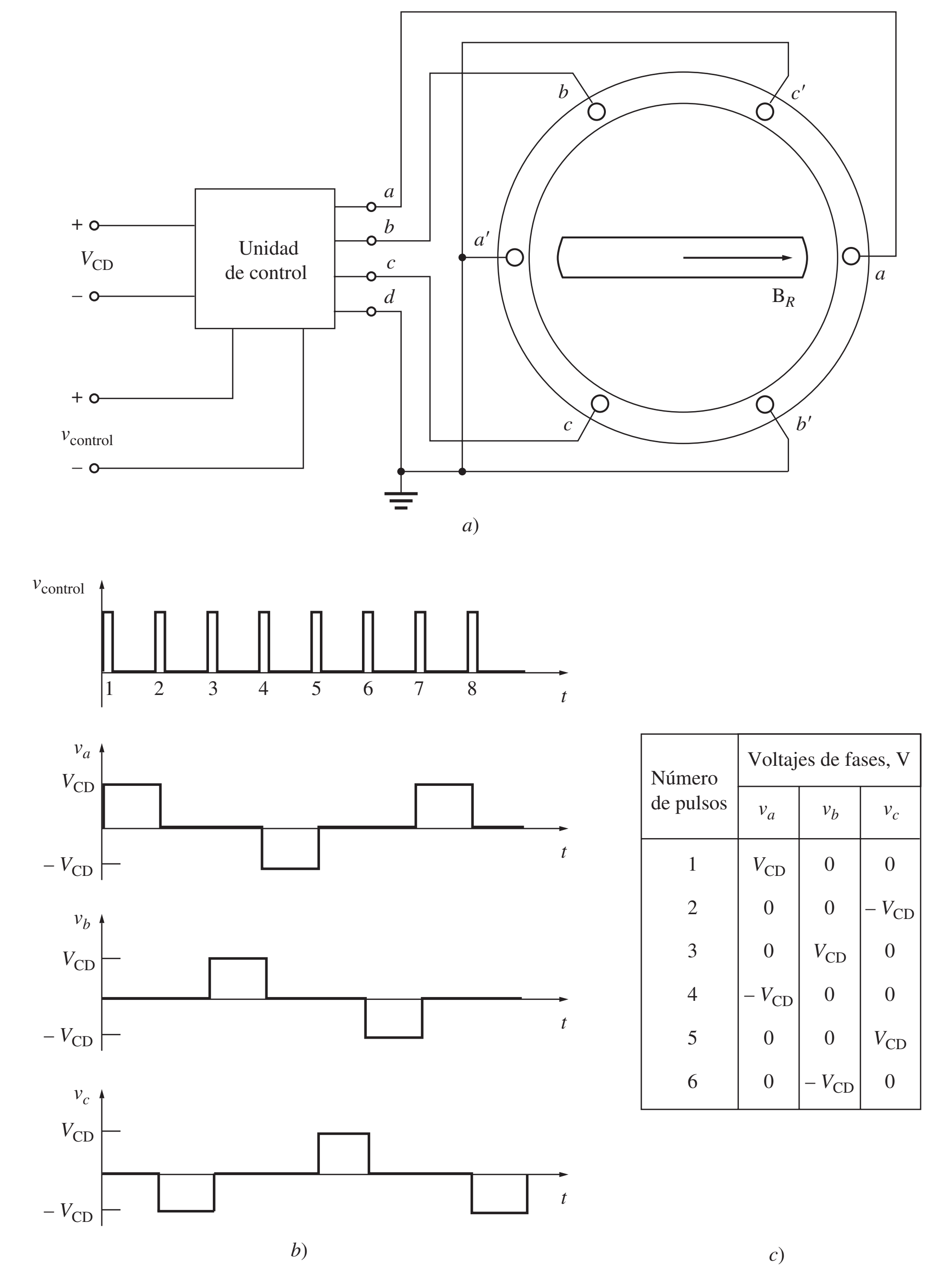
Puesto que cada paso en la tabla 9-1 corresponde a 60 grados eléctricos, el número de grados eléctricos avanzados por paso disminuye conforme aumenta el número de polos. Por ejemplo, si el motor de avance paso a paso tiene ocho polos, el ángulo mecánico del eje del motor cambiará 15° por paso.

La velocidad de un motor de avance paso a paso se puede relacionar con el número de pulsos que entran en su unidad de control por unidad de tiempo mediante la ecuación (9-18), que define el ángulo mecánico de un motor de avance paso a paso en función del ángulo eléctrico. Si se derivan ambos lados de la ecuación con respecto al tiempo, se obtiene la relación entre las velocidades de rotación eléctrica y mecánica del motor:

$$\omega_m = \frac{2}{P}\,\omega_e \qquad \textbf{(9-19a)}$$

o

$$n_m = \frac{2}{P}\,n_e \qquad \textbf{(9-19b)}$$



Número de pulsos	Voltajes de fases, V		
	v_a	v_b	v_c
1	V_{CD}	0	0
2	0	0	$-V_{CD}$
3	0	V_{CD}	0
4	$-V_{CD}$	0	0
5	0	0	V_{CD}
6	0	$-V_{CD}$	0

FIGURA 9-38 *a*) Motores de avance paso a paso trifásico simple y su unidad de control asociada. Las entradas a la unidad de control consisten en una fuente de potencia de cd y una señal de control que consta de un tren de pulsos. *b*) Dibujo del voltaje de salida de la unidad de control conforme se alimenta una serie de pulsos de control. *c*) Tabla que muestra el voltaje de salida de la unidad de control en función del número de pulsos.

Puesto que hay seis pulsos de entrada por revolución eléctrica, la relación entre la velocidad del motor en revoluciones por minuto y el número de pulsos por minuto es

$$n_m = \frac{1}{3P}\, n_{pulsos} \qquad \textbf{(9-20)}$$

donde n_{pulsos} es el número de pulsos por minuto.

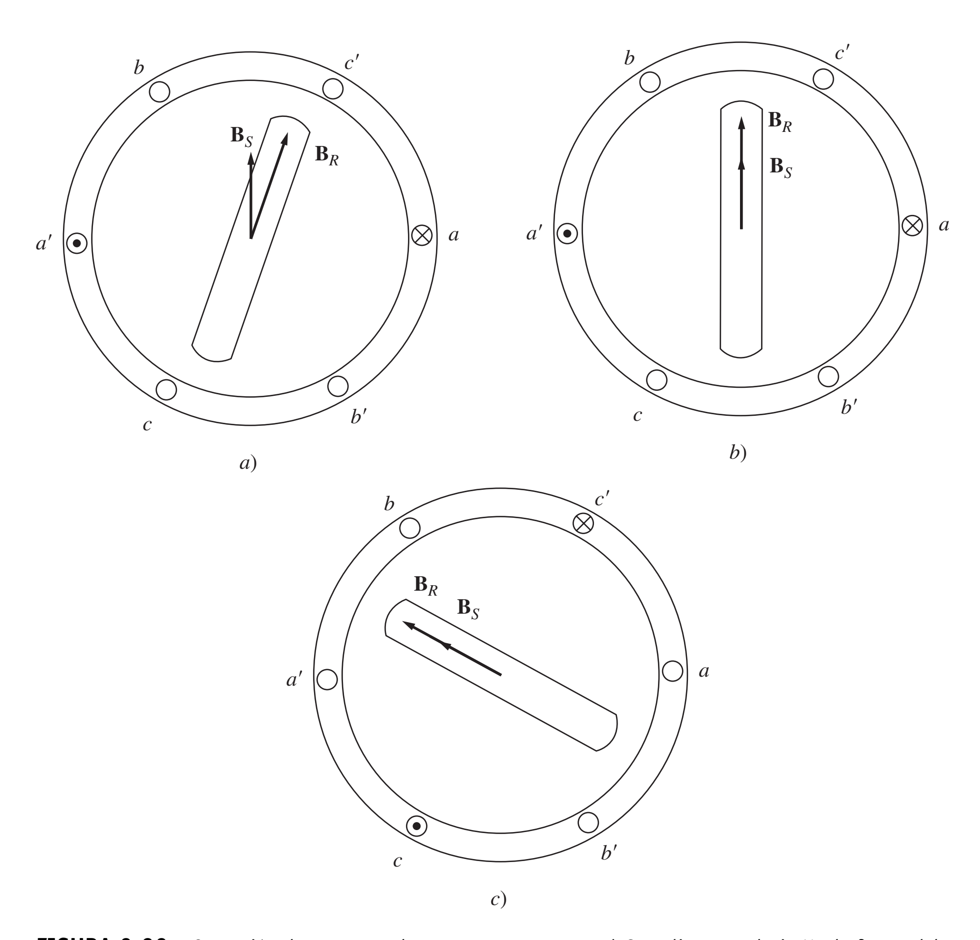


FIGURA 9-39 Operación de un motor de avance paso a paso. *a*) Se aplica un voltaje V a la fase a del estator, lo que provoca que fluya una corriente en fase a y produce un campo magnético del estator $\mathbf{B}_S$. La interacción entre $\mathbf{B}_R$ y $\mathbf{B}_S$ produce un par en sentido contrario al de las manecillas del reloj en el rotor. *b*) Cuando el rotor se alinea con el campo magnético del estator, el par neto baja a cero. *c*) Se aplica un voltaje $-V$ a la fase c del estator, lo cual genera el flujo de corriente en la fase c y produce un campo magnético del estator $\mathbf{B}_S$. La interacción entre $\mathbf{B}_R$ y $\mathbf{B}_S$ produce un par en el rotor en sentido contrario al de las manecillas del reloj, provocando que el rotor se alinee con la nueva posición del campo magnético.

Hay dos tipos básicos de motores de avance paso a paso que difieren entre sí sólo en la construcción del rotor: *de imán permanente* y *de reluctancia*. El motor de avance paso a paso de imán permanente tiene un rotor de imán permanente, mientras que el motor de avance paso a paso de reluctancia tiene un rotor ferromagnético que no es un imán permanente. (El rotor del motor de reluctancia que se describió antes en esta sección es el motor de avance paso a paso de reluctancia.) En general, el motor de avance paso a paso de imán permanente puede producir más par que el de reluctancia, puesto que el motor de avance paso a paso de imán permanente tiene par tanto del campo magnético permanente del rotor como de los efectos de reluctancia.

TABLA 9-1 Posición del rotor en función del voltaje en un motor de avance paso a paso de dos polos

	Voltajes de fase			
Número de pulsos de entrada	***a***	***b***	***c***	**Posición del rotor**
1	V	0	0	0°
2	0	0	$-V$	60°
3	0	V	0	120°
4	$-V$	0	0	180°
5	0	0	V	240°
6	0	$-V$	0	300°

A menudo, los motores de avance paso a paso de reluctancia se fabrican con un devanado del estator de cuatro fases en lugar del devanado del estator trifásico que se describió previamente. Un devanado del estator de cuatro fases reduce los pasos entre pulsos de 60 grados eléctricos a 45 grados eléctricos. Como se mencionó con anterioridad, el par de un motor de inducción varía con sen 2δ, por lo que el par de reluctancia entre los pasos será el máximo para un ángulo de 45°. Por lo tanto, un motor de avance paso a paso de reluctancia puede producir más par con un devanado del estator de cuatro fases que con un devanado del estator trifásico.

Se puede generalizar la ecuación (9-20) para aplicarla a todos los motores de avance paso a paso, sin importar el número de fases en los devanados del estator. En general, si un estator tiene N fases, ese motor requiere $2N$ pulsos por revolución eléctrica. Por lo tanto, la relación entre la velocidad del motor en revoluciones por minuto y el número de pulsos por minuto es

$$n_m = \frac{1}{NP}\, n_{\text{pulsos}} \tag{9-21}$$

Los motores de avance paso a paso son muy útiles en sistemas de control y posicionamiento porque la computadora que realiza el control puede saber tanto la *velocidad* como la *posición* exacta del motor sin necesidad de tener información de retroalimentación proveniente del eje del motor. Por ejemplo, si el sistema de control manda 1 200 pulsos por minuto al motor de avance paso a paso de dos polos que se muestra en la figura 9-38, la velocidad del motor será exactamente

$$\begin{aligned} n_m &= \frac{1}{3P}\, n_{\text{pulsos}} \qquad \text{(9-20)} \\ &= \frac{1}{3(2 \text{ polos})}(1\,200 \text{ pulsos/min}) \\ &= 200 \text{ r/min} \end{aligned}$$

Además, si se conoce la posición inicial del eje, la computadora puede determinar el ángulo exacto del eje del rotor en cualquier momento contando el número total de pulsos que ha mandado a la unidad de control del motor de avance paso a paso.

EJEMPLO 9-2

Un motor de avance paso a paso de imán permanente trifásico que se requiere para una aplicación específica debe ser apto para controlar la posición de un eje en pasos de 7.5° así como de operar a velocidades de hasta 300 r/min.

a) ¿Cuántos polos debe tener?
b) ¿A qué velocidad se deben recibir los pulsos de control en la unidad de control del motor para operarlo a 300 r/min?

Solución

a) En un motor de avance paso a paso trifásico cada pulso avanza 60 grados eléctricos la posición del rotor. Este avance debe corresponder a 7.5 grados mecánicos. Si se utiliza la ecuación (9-18) se obtiene

$$P = 2\,\frac{\theta_e}{\theta_m} = 2\left(\frac{60°}{7.5°}\right) = 16 \text{ polos}$$

b) Si se obtiene el valor de n_{pulsos} por medio de la ecuación (9-21) se tiene

$$\begin{aligned} n_{\text{pulsos}} &= NPn_m \\ &= (3 \text{ fases})(16 \text{ polos})(300 \text{ r/min}) \\ &= 240 \text{ pulsos/s} \end{aligned}$$

Motores de cd sin escobillas

Los motores de cd convencionales se utilizan tradicionalmente en aplicaciones donde se tienen fuentes de potencia de cd, como en los aviones y automóviles. Sin embargo, los motores de cd pequeños de estos tipos tienen varias desventajas. La principal es la generación excesiva de chispas y el desgaste de las escobillas. Los motores de cd veloces y pequeños son demasiado compactos como para usar devanados de compensación e interpolos, por lo que la reacción del inducido y los efectos $L\,di/dt$ tienden a producir chispas en las escobillas del conmutador. Además, la alta velocidad de rotación de este tipo de motores provoca un desgaste excesivo de las escobillas y requiere mantenimiento regular cada pocos miles de horas. Si los motores deben funcionar en un ambiente de baja presión (como las altitudes a las que viaja un avión), el desgaste de las escobillas puede ser de tal magnitud que se tienen que reemplazar después de poco menos de una hora de operación.

En algunas aplicaciones el mantenimiento regular que requieren las escobillas de este tipo de motores de cd puede llegar a ser incosteable. Considérese por ejemplo un motor de cd en un corazón artificial donde el mantenimiento regular requeriría una cirugía de pecho. En otras aplicaciones, las chispas en las escobillas pueden originar una explosión o generar ruido de radiofrecuencia inaceptable. En todos estos casos se requiere un motor de cd pequeño y rápido que sea altamente confiable, que produzca poco ruido y tenga una larga vida útil.

En los últimos 25 años se han estado desarrollando este tipo de motores por medio de la combinación de motores pequeños, como el de avance paso a paso de imán permanente, con un sensor de posición del rotor y un circuito conmutador electrónico en estado sólido. Estos motores se llaman *motores de cd sin escobillas* puesto que operan con una fuente de potencia de cd, pero no tienen ni conmutadores ni escobillas. En la figura 9-40 se puede ver un dibujo de un pequeño motor de cd sin escobillas y en la figura 9-41 se muestra la fotografía de un típico motor de cd sin escobillas. El rotor es similar al de un motor de avance paso a paso de imán permanente, excepto en que es de polos no salientes. El estator puede tener tres fases o más (el motor del ejemplo que se muestra en la figura 9-40 tiene cuatro fases).

Los componentes básicos de un motor de cd sin escobillas son:

1. Rotor de imán permanente.
2. Estator con un devanado de tres, cuatro o más fases.
3. Sensor de posición del rotor.
4. Circuito equivalente para controlar las fases del devanado del rotor.

Un motor de cd sin escobillas funciona por medio de la energización de una bobina del estator a la vez que con un voltaje de cd constante. Cuando se enciende una bobina, se produce un campo magnético del estator $\mathbf{B}_S$ y se produce un par en el rotor dado por

$$\tau_{\text{ind}} = k\mathbf{B}_R \times \mathbf{B}_S$$

que tiende a alinear el rotor con el campo magnético del estator. En el momento que se muestra en la figura 9-40*a*), el campo magnético del estator $\mathbf{B}_S$ apunta hacia la izquierda mientras que el campo magnético del rotor de imán permanente $\mathbf{B}_R$ apunta hacia arriba, lo que produce un par en sentido contrario al de las manecillas del reloj en el rotor. Como resultado, el rotor girará hacia la izquierda.

Si la bobina *a* permanece energizada todo el tiempo, el rotor girará hasta que los dos campos magnéticos se alinearan y luego se detendría, al igual que un motor de avance paso a paso. La clave del funcionamiento de un motor de cd sin escobillas es que incluye un *sensor de posición*, por lo que el circuito de control sabe cuándo el rotor está casi alineado con el campo magnético del estator. En ese momento apagará la bobina *a* y prenderá la bobina *b*, lo que provocará que el rotor experimente una vez más un par en sentido contrario al de las manecillas del reloj y continúe girando. Este proceso se repite en forma indefinida y las bobinas se prenden en el siguiente orden: *a*, *b*, *c*, *d*, –*a*, –*b*, –*c*, –*d*, etc., por lo que el motor gira continuamente.

La electrónica del circuito de control se puede utilizar para regular tanto la velocidad como la dirección del motor. El efecto neto de este diseño es un motor que opera con una fuente de potencia de cd, con un control absoluto de la velocidad y de la dirección de rotación.

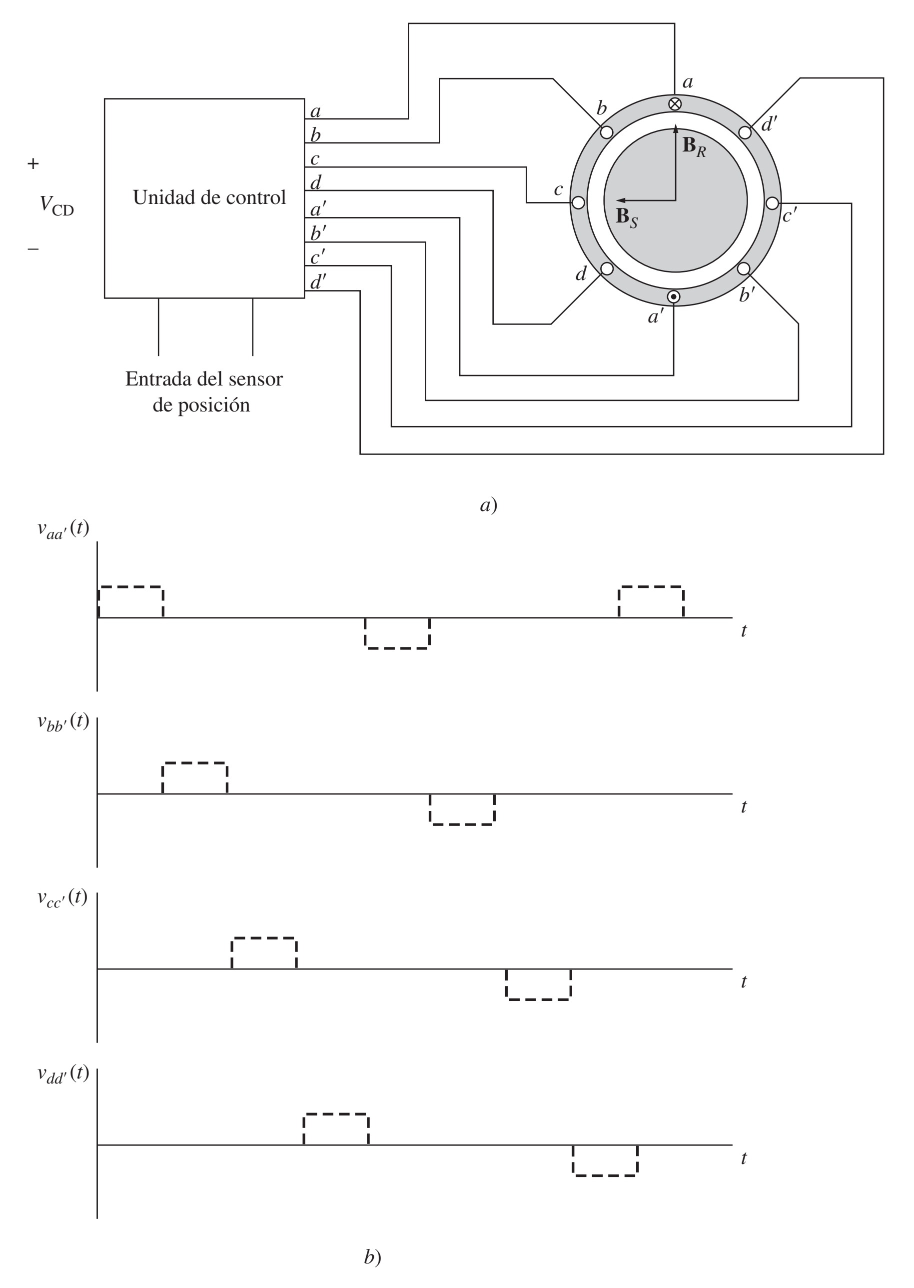
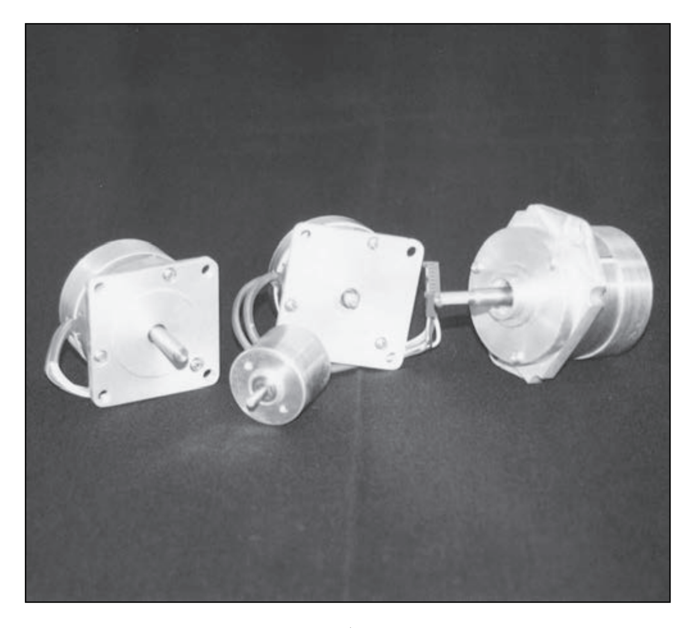


FIGURA 9-40 *a*) Motor de cd sin escobillas simple y su unidad de control asociada. Las entradas a la unidad de control consisten en una fuente de potencia de cd y una señal proporcional a la posición del rotor actual. *b*) Voltajes aplicados a las bobinas del estator.

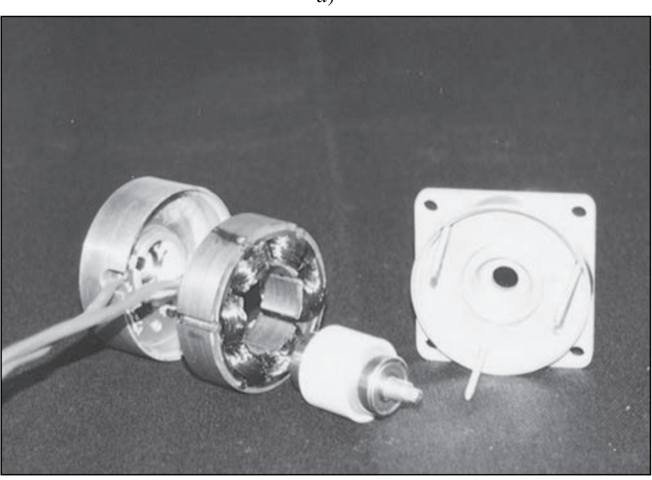
Los motores de cd sin escobillas sólo están disponibles en tamaños pequeños, de hasta 20 W, pero tienen muchas ventajas debido a la gama de tamaños con que se cuenta. Algunas de las ventajas más importantes son:

1. Eficiencia relativamente alta.
2. Larga vida útil y alta confiabilidad.
3. Poco o ningún mantenimiento.
4. Muy poco ruido de radiofrecuencia en comparación con los motores de cd con escobillas.
5. Se pueden lograr velocidades muy altas (mayores a 50 000 r/min).

Su principal desventaja es que un motor de cd sin escobillas es más caro que uno equivalente de cd con escobillas.



a)



b)

FIGURA 9-41 *a*) Típicos motores de cd sin escobillas. *b*) Motor desarmado que muestra el rotor de imán permanente y el estator trifásico (de 6 polos). (*Cortesía de Carson Technologies, Inc.*)

9.7 RESUMEN

Los motores de ca que se describieron en los capítulos anteriores requieren de potencia trifásica para funcionar. Puesto que la mayoría de los hogares y de los pequeños negocios tienen sólo fuentes de potencia monofásica, no pueden utilizar este tipo de motores. En este capítulo se describieron los motores en serie que pueden operar con una fuente de potencia monofásica.

El primer motor que se describió fue el motor universal. Un motor universal es un motor de cd en serie que está adaptado para funcionar con una fuente de ca y su característica par-velocidad es similar a la de los motores de cd en serie. El motor universal tiene un par muy alto, pero su regulación de velocidad es muy mala.

Los motores de inducción monofásicos no tienen un par de arranque intrínseco, pero una vez que aceleran, sus características par-velocidad son casi tan buenas como las de los motores trifásicos de tamaños similares. El arranque se logra por medio de la adición de un devanado auxiliar con una corriente cuyo ángulo de fase difiere del ángulo del devanado principal o por medio de porciones sombreadas de los polos del estator.

El par de arranque de un motor de inducción monofásico depende del ángulo de fase entre la corriente en el devanado primario y la corriente en el devanado auxiliar, y el par máximo se presenta cuando el ángulo alcanza los 90°. Puesto que la construcción de fase partida proporciona sólo una pequeña diferencia de fase entre los devanados auxiliar y principal, su par de arranque es modesto. Los motores de capacitor de arranque están hechos con devanados auxiliares con un desplazamiento de fase de aproximadamente 90°, por lo que tienen un par de arranque más grande. Los motores con capacitor dividido, que cuentan con capacitores similares, tienen pares de arranque intermedios entre los de motor de fase partida y los motores con capacitor de arranque. Los motores de polos sombreados muestran un desplazamiento de fase efectivo muy pequeño y por lo tanto tienen un par de arranque pequeño.

Los motores de reluctancia y los de histéresis son de ca de uso especial que pueden operar a velocidad síncrona sin los devanados de campo del rotor que requieren los motores síncronos y que pueden acelerar hasta llegar a la velocidad síncrona por sí mismos. Estos motores pueden tener estatores monofásicos o trifásicos.

Los motores de avance paso a paso se usan para que la posición del eje o de algún otro dispositivo mecánico avance una cierta distancia cada vez que se recibe un pulso de control. Se utilizan mucho en sistemas de control para ubicar y localizar objetos.

Los motores de cd sin escobillas son similares a los de avance paso a paso con rotores de imán permanente, excepto que incluyen un sensor de posición. Éste se utiliza para conmutar la bobina del estator energizada siempre que el rotor está por alinearse con ella, lo que mantiene al rotor girando a una velocidad establecida por la electrónica de control. Los motores de cd sin escobillas son más caros que los motores de cd ordinarios, pero requieren poco mantenimiento y son altamente confiables, tienen una larga vida útil y generan poco ruido de radiofrecuencia. Sólo están disponibles en tamaños pequeños (de 20 W o menos).

PREGUNTAS

9-1. ¿Qué cambios se requiere hacer en un motor de cd en serie para que pueda operar con una fuente de potencia de ca?

9-2. ¿Por qué la característica par-velocidad de un motor universal con una fuente de ca es diferente de la característica par-velocidad del mismo motor con una fuente de cd?

9-3. ¿Por qué un motor de inducción monofásico no puede arrancar por sí mismo sin devanados auxiliares especiales?

9-4. ¿Cómo se desarrolla el par inducido en un motor de inducción monofásico: *a*) de acuerdo con la teoría del doble campo giratorio o *b*) de acuerdo con la teoría de campo cruzado?

9-5. ¿De qué forma un devanado auxiliar proporciona el par de arranque a un motor de inducción monofásico?

9-6. ¿De qué manera se logra el desplazamiento de fase de la corriente en el devanado auxiliar de un motor de inducción de fase partida?

9-7. ¿Cómo se logra el desplazamiento de fase de la corriente en el devanado auxiliar de un motor de inducción con capacitor de arranque?

9-8. ¿Cómo es el par de arranque de un motor de capacitor permanente dividido en comparación con el de un motor con capacitor de arranque del mismo tamaño?

9-9. ¿Cómo se puede invertir la dirección de rotación de un motor de inducción de fase partida o con capacitor de arranque?

9-10. ¿Cómo es el par de arranque que se produce en un motor de polos sombreados?

9-11. ¿Cómo arranca un motor de reluctancia?

9-12. ¿Cómo puede un motor de reluctancia operar a velocidad síncrona?

9-13. ¿Qué mecanismo produce el par de arranque en un motor de histéresis?

9-14. ¿Qué mecanismo produce el par síncrono en un motor de histéresis?

9-15. Explique la operación de un motor de avance paso a paso.

9-16. ¿Cuál es la diferencia entre un motor de avance paso a paso de imán permanente y un motor de avance paso a paso de reluctancia?

9-17. ¿Cuál es la distancia óptima entre fases en un motor de avance paso a paso de reluctancia? ¿Por qué?

9-18. ¿Cuáles son las ventajas y las desventajas de los motores de cd sin escobillas en comparación con los motores de cd con escobillas ordinarios?

PROBLEMAS

9-1. Un motor de inducción de fase partida con cuatro polos, de 120 V, $\frac{1}{4}$ hp y 60 Hz, tiene las siguientes impedancias:

$R_1 = 2.00\ \Omega$ $\quad X_1 = 2.56\ \Omega$ $\quad X_M = 60.5\ \Omega$

$R_2 = 2.80\ \Omega$ $\quad X_2 = 2.56\ \Omega$

Con un desplazamiento de 0.05, las pérdidas rotacionales del motor son de 51 W. Se puede suponer que las pérdidas rotacionales son constantes en el intervalo de operación normal del motor. Si el deslizamiento es de 0.05, encuentre las siguientes cantidades del motor:

a) Potencia de entrada
b) Potencia del entrehierro
c) P_{conv}
d) P_{sal}
e) τ_{ind}
f) τ_{carga}
g) Eficiencia general del motor
h) Factor de potencia del estator

9-2. Repita el problema 9-1 con un deslizamiento de rotor del 0.025.

9-3. Suponga que el motor del problema 9-1 arranca y el devanado auxiliar no se abre cuando el rotor está acelerando a 400 r/min. ¿Cuánto par inducido producirá el motor en el devanado principal? Suponiendo que las pérdidas giratorias son aún de 51 W, ¿este motor seguirá acelerando o perderá velocidad? Pruebe su respuesta.

9-4. Utilice el programa MATLAB para calcular y hacer una gráfica de la característica par-velocidad del motor del problema 9-1. Desprecie el devanado de arranque.

9-5. Un motor de inducción con capacitor de arranque, dos polos, 220 V, 1.5 hp y 50 Hz, tiene las siguientes impedancias en el devanado principal:

$R_1 = 1.30\ \Omega$ $\quad X_1 = 2.01\ \Omega$ $\quad X_M = 105\ \Omega$
$R_2 = 1.73\ \Omega$ $\quad X_2 = 2.01\ \Omega$

Con un desplazamiento de 0.05, las pérdidas giratorias del motor son de 291 W. Se puede suponer que las pérdidas giratorias son constantes en el intervalo de operación normal del motor. Encuentre las siguientes cantidades del motor con un deslizamiento de 5%:

a) Corriente del estator
b) Factor de potencia del estator
c) Potencia de entrada
d) P_{EH}
e) P_{conv}
f) P_{sal}
g) τ_{ind}
h) τ_{carga}
i) Eficiencia

9-6. Encuentre el par inducido en el motor del problema 9-5 si opera con un deslizamiento de 5% y su voltaje terminal es de *a*) 190 V, *b*) 208 V, *c*) 230 V.

9-7. ¿Qué tipo de motor elegiría para cada uno de los siguientes aparatos? ¿Por qué?

a) Aspiradora
b) Refrigerador
c) Compresor de aire acondicionado
d) Ventilador de aire acondicionado
e) Máquina de coser de velocidad variable
f) Reloj
g) Taladro eléctrico

9-8. Para una aplicación en particular, un motor trifásico de avance paso a paso debe ser capaz de dar pasos en incrementos de 10°. ¿Cuántos polos debe tener?

9-9. ¿Cuántos pulsos por segundo deben suministrarse a la unidad de control del motor del problema 9-8 para lograr una velocidad rotacional de 600 r/min?

9-10. Construya una tabla que muestre el tamaño del paso y el número de polos de los motores de avance paso a paso trifásicos y de cuatro fases.

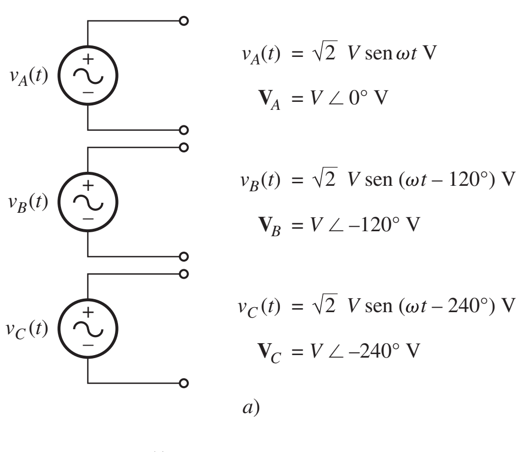
BIBLIOGRAFÍA

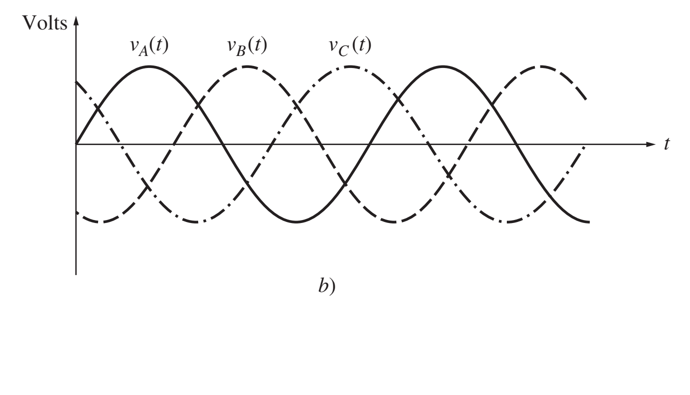
1. Fitzgerald, A.E. y C. Kingsley, Jr., *Electric Machinery*, McGraw-Hill, Nueva York, 1952.
2. National Electrical Manufacturers Association. *Motors and Generators*, Publicación núm. MG1-1993, NEMA, Washington, D.C., 1993.
3. Veinott, G.C., *Fractional and Subfractional Horsepower Electric Motors*, McGraw-Hill, Nueva York, 1970.
4. Werninck, E.H. (ed.), *Electric Motor Handbook*, McGraw-Hill, Londres, 1978.

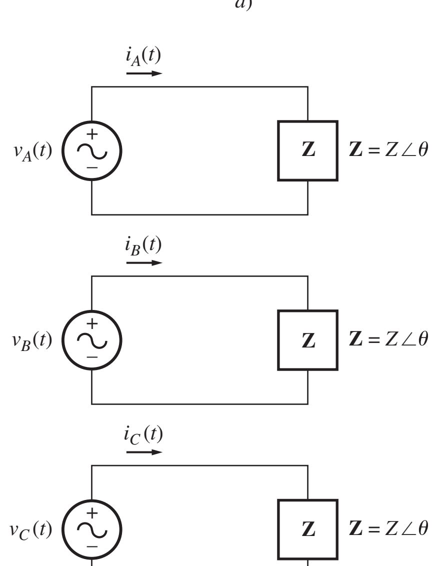
APÉNDICE

A Circuitos trifásicos

Hoy en día casi toda la generación de potencia eléctrica y la mayoría de la transmisión de potencia en el mundo se hace en la forma de circuitos de ca trifásicos. Un sistema de este tipo consta de generadores, líneas de transmisión y cargas trifásicas. Los sistemas de potencia de ca tienen una gran ventaja sobre los sistemas de cd: pueden cambiar los niveles de voltaje con transformadores para reducir las pérdidas de transmisión de la manera en que se describe en el capítulo 2. Los sistemas de potencia *trifásica* tienen dos grandes ventajas sobre los sistemas de potencia de ca: 1) es posible obtener más potencia por kilogramo de metal de una máquina trifásica y 2) la potencia que se suministra a una carga trifásica es constante en todo momento, en lugar de oscilar como lo hace en los sistemas monofásicos. Los sistemas trifásicos también hacen que la utilización de los motores de inducción sea más sencilla, permitiéndoles arrancar sin devanados de arranque auxiliares especiales.







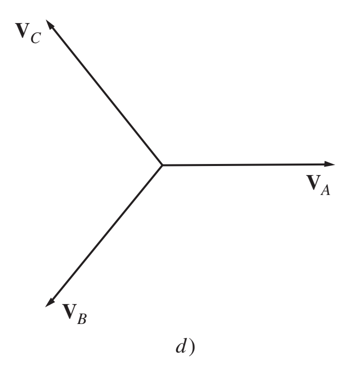


FIGURA A-1 *a*) Generador trifásico que consta de tres fuentes monofásicas de igual magnitud y una separación de fase de 120°. *b*) Voltajes en cada fase del generador. *c*) Las tres fases del generador conectadas a tres cargas idénticas. *d*) Diagrama fasorial que muestra los voltajes en cada fase.

A.1 GENERACIÓN DE VOLTAJES Y CORRIENTES TRIFÁSICAS

Un generador trifásico consta de tres generadores monofásicos, con voltajes que son iguales en magnitud pero difieren en su ángulo de fase por 120°. Cada uno de estos tres generadores se puede conectar a una de tres cargas idénticas con un par de cables y el sistema de potencia resultante será igual al que se muestra en la figura A-1*c*). Este tipo de sistema consta de tres circuitos monofásicos que difieren en fase por un ángulo de 120°. La corriente que fluye a cada carga se puede obtener con la ecuación

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}} \tag{A-1}$$

Por lo tanto, los tres flujos de corriente en las tres fases son

$$\mathbf{I}_A = \frac{V\angle 0°}{Z\angle\theta} = I\angle -\theta \tag{A-2}$$

$$\mathbf{I}_B = \frac{V\angle -120°}{Z\angle\theta} = I\angle -120° - \theta \tag{A-3}$$

$$\mathbf{I}_C = \frac{V\angle -240°}{Z\angle\theta} = I\angle -240° - \theta \tag{A-4}$$

Se pueden conectar juntos los extremos negativos de estos tres generadores monofásicos y también las cargas, de tal manera que compartan una línea de regreso (llamada *neutro*). En la figura A-2 se puede observar el sistema resultante; nótese que sólo se requieren *cuatro* cables para suministrar potencia desde los tres generadores a las tres cargas.

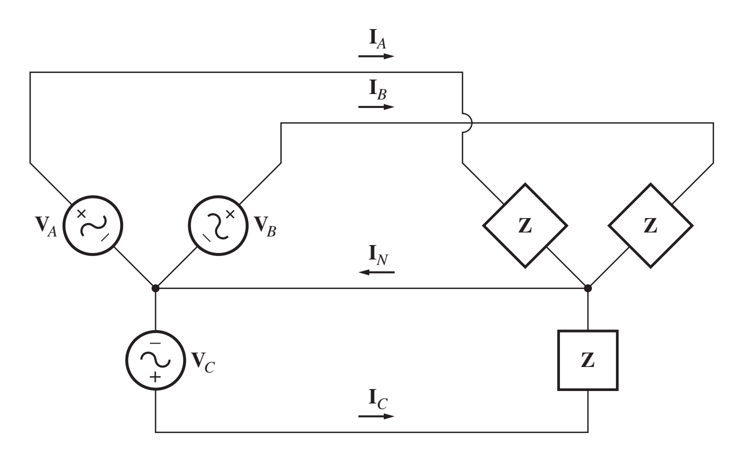


FIGURA A-2 Los tres circuitos conectados juntos con un neutro común.

¿Cuánta corriente fluye en el único cable neutro que se aprecia en la figura A-2? La corriente de regreso será igual a la suma de corrientes que fluyen hacia cada carga individual en el sistema de potencia. Esta corriente está dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_N &= \mathbf{I}_A + \mathbf{I}_B + \mathbf{I}_C \\ &= I\angle -\theta + I\angle -\theta - 120° + I\angle -\theta - 240° \\ &= I\cos(-\theta) + jI\,\mathrm{sen}(-\theta) \\ &\quad + I\cos(-\theta - 120°) + jI\,\mathrm{sen}(-\theta - 120°) \\ &\quad + I\cos(-\theta - 240°) + jI\,\mathrm{sen}(-\theta - 240°) \\ &= I[\cos(-\theta) + \cos(-\theta - 120°) + \cos(-\theta - 240°)] \\ &\quad + jI[\mathrm{sen}(-\theta) + \mathrm{sen}(-\theta - 120°) + \mathrm{sen}(-\theta - 240°)] \end{aligned} \tag{A-5}$$

Recuérdense las identidades trigonométricas elementales:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \tag{A-6}$$

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta \tag{A-7}$$

Si se aplican estas identidades trigonométricas se tiene como resultado

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_N = {} & I[\cos(-\theta) + \cos(-\theta)\cos 120° + \operatorname{sen}(-\theta)\operatorname{sen} 120° + \cos(-\theta)\cos 240° \\
& + \operatorname{sen}(-\theta)\operatorname{sen} 240°] \\
& + jI[\operatorname{sen}(-\theta) + \operatorname{sen}(-\theta)\cos 120° - \cos(-\theta)\operatorname{sen} 120° \\
& + \operatorname{sen}(-\theta)\cos 240° - \cos(-\theta)\operatorname{sen} 240°] \\
\mathbf{I}_N = {} & I\left[\cos(-\theta) - \frac{1}{2}\cos(-\theta) + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}(-\theta) - \frac{1}{2}\cos(-\theta) - \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}(-\theta)\right] \\
& + jI\left[\operatorname{sen}(-\theta) - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(-\theta) - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(-\theta) - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(-\theta) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(-\theta)\right] \\
\mathbf{I}_N = {} & 0\text{ A}
\end{aligned}$$

¡Siempre y cuando las tres cargas sean iguales, la corriente de regreso en el neutro es igual a cero! Un sistema de potencia trifásico en el que los tres generadores tienen voltajes exactamente de igual magnitud, una diferencia de 120° en su fase y las tres cargas son idénticas se llama *sistema trifásico balanceado*. En realidad, en un sistema de este tipo no se requiere del neutro y se podrían tener únicamente *tres* cables en lugar de los seis originales.

SECUENCIA DE FASE La *secuencia de fase* de un sistema de potencia trifásico es el orden en el que los voltajes de las fases individuales llegan a su pico. Se dice que el sistema de potencia trifásico que se ilustra en la figura A-1 tiene una secuencia de fase *abc* (secuencia positiva), puesto que los voltajes en las tres fases llegan a su pico en el siguiente orden: *a*, *b*, *c* (véase la figura A-1*b*). En la figura A-3*a*) se muestra el diagrama fasorial de un sistema de potencia con frecuencia de fase *abc*.

También se pueden conectar las tres fases de un sistema de potencia de tal manera que los voltajes en las fases lleguen a su pico en el orden *a*, *c*, *b*. Se dice que este tipo de sistema de potencia tiene una secuencia de fase *acb* (secuencia negativa). En la figura A-3*b*) se puede apreciar el diagrama fasorial de un sistema de potencia con secuencia de fase *acb*.

El resultado al que se llegó en los párrafos anteriores también es válido para las secuencias de fase *abc* y *acb*. En cualquier caso, si el sistema de potencia está equilibrado, la corriente que fluye en el neutro será 0.

A.2 VOLTAJES Y CORRIENTES EN UN CIRCUITO TRIFÁSICO

En la figura A-2 se muestra una conexión del tipo ye (Y), llamada así porque se parece a la letra Y. Otra conexión posible es la delta (Δ), en donde el extremo superior de cada generador está conectado con el extremo inferior del otro. La conexión Δ es posible porque la suma de los tres voltajes

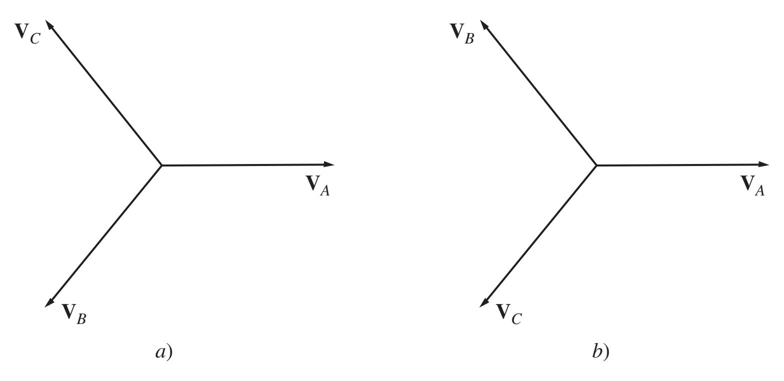


FIGURA A-3 *a*) Voltajes de fase en un sistema de potencia con una secuencia de fase *abc*. *b*) Voltajes de fase en un sistema de potencia con una secuencia de fase *acb*.

$\mathbf{V}_A + \mathbf{V}_B + \mathbf{V}_C = 0$, por lo que no fluirán corrientes en cortocircuito cuando se conecte el extremo superior de cada fuente con el extremo inferior de la otra.

Cada generador y cada carga en un sistema de potencia trifásico pueden estar conectados en Y o en Δ. Se puede mezclar cualquier número de generadores y cargas conectados en Y o en Δ en un sistema de potencia.

La figura A-4 muestra generadores trifásicos conectados en Y y en Δ. Los voltajes y corrientes en una cierta fase se llaman *cantidades de fase* y los voltajes entre las líneas y las corrientes en las líneas conectadas a los generadores se llaman *cantidades de línea*. La relación entre las cantidades de línea y las cantidades de fase en cierto generador o carga depende del tipo de conexión del generador o de la carga. A continuación se explorarán estas relaciones en cada una de las conexiones Y o Δ.

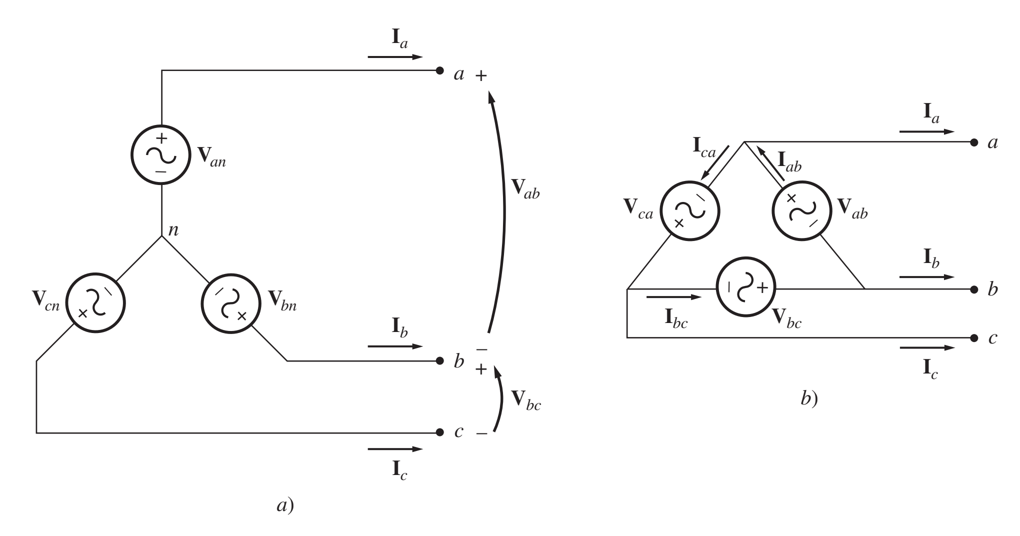


FIGURA A-4 *a*) Conexión Y. *b*) Conexión Δ.

Voltajes y corrientes en la conexión en ye (Y)

En la figura A-5 se muestra un generador trifásico conectado en Y con una secuencia de fase *abc* conectada a una carga resistiva. Los voltajes de fase en este generador están dados por

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_{an} &= V_\phi\angle 0° \\ \mathbf{V}_{bn} &= V_\phi\angle -120° \\ \mathbf{V}_{cn} &= V_\phi\angle -240°\end{aligned} \tag{A-8}$$

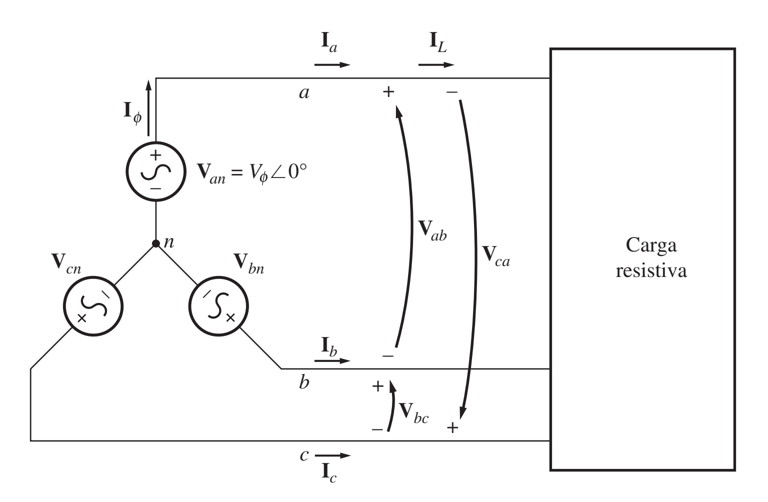


FIGURA A-5 Generador conectado en Y con una carga resistiva.

Puesto que se supone que la carga conectada al generador es resistiva, la corriente en cada fase del generador tendrá el mismo ángulo que el voltaje. Por lo tanto, la corriente en cada fase estará dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_a &= I_\phi \angle 0° \\ \mathbf{I}_b &= I_\phi \angle -120° \\ \mathbf{I}_c &= I_\phi \angle -240° \end{aligned} \tag{A-9}$$

A partir de la figura A-5 es obvio que la corriente en cualquier línea es igual a la corriente en la fase correspondiente. Por lo tanto, en una conexión en Y,

$$I_L = I_\phi \qquad \text{conexión en Y} \tag{A-10}$$

La relación entre el voltaje de línea y el voltaje de fase es un poco más compleja. De acuerdo con la ley de voltaje de Kirchhoff, el voltaje de línea a línea $\mathbf{V}_{ab}$ está dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{ab} &= \mathbf{V}_a - \mathbf{V}_b \\ &= V_\phi \angle 0° - V_\phi \angle -120° \\ &= V_\phi - \left(-\frac{1}{2} V_\phi - j\frac{\sqrt{3}}{2} V_\phi\right) = \frac{3}{2} V_\phi + j\frac{\sqrt{3}}{2} V_\phi \\ &= \sqrt{3} V_\phi \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}\right) \\ &= \sqrt{3} V_\phi \angle 30° \end{aligned}$$

Por lo tanto, la relación entre las magnitudes del voltaje línea a línea y el voltaje línea a neutro (de fase) en un generador o carga conectado en Y es

$$V_{LL} = \sqrt{3} V_\phi \qquad \text{conexión en Y} \tag{A-11}$$

Además, los voltajes de línea están desplazados 30° con respecto a los voltajes de fase. En la figura A-6 se muestra el diagrama fasorial de los voltajes de línea y de fase de la conexión en Y de la figura A-5.

Nótese que en las conexiones en Y, con la secuencia de fase *abc* o *positiva* como la de la figura A-5, el voltaje de línea *está en adelanto* 30° respecto del voltaje de fase correspondiente. En el caso de las conexiones en Y con secuencias de fase *acb* o *negativa* el voltaje de línea *está* 30° *en retraso* respecto del voltaje de fase correspondiente y se le pedirá que demuestre este hecho en un problema al final de este apéndice.

Aun cuando se dedujeron las relaciones entre los voltajes de línea y de fase y las corrientes de la conexión en Y dada la suposición de un factor de potencia unitario, de hecho son válidas para cualquier factor de potencia. La suposición de cargas con factor de potencia unitario sólo facilita un poco los cálculos matemáticos.

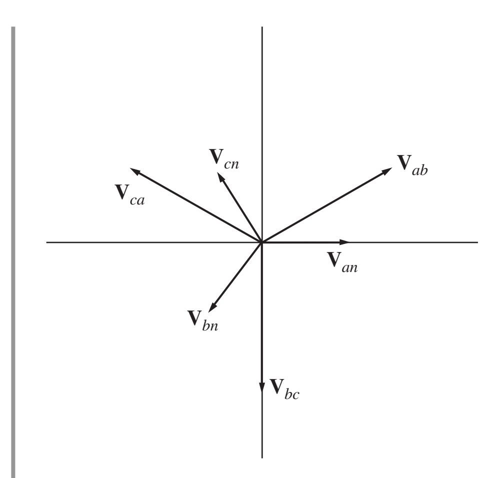


FIGURA A-6 Voltajes línea a línea y voltaje de fase (voltaje de línea a neutro) de la conexión en Y de la figura A-5.

Voltajes y corrientes en la conexión en delta (Δ)

En la figura A-7 se muestra un generador trifásico con conexión en Δ acoplado a una carga resistiva. Los voltajes de fase del generador están dados por

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{ab} &= V_\phi \angle 0° \\ \mathbf{V}_{bc} &= V_\phi \angle -120° \\ \mathbf{V}_{ca} &= V_\phi \angle -240° \end{aligned} \tag{A-12}$$

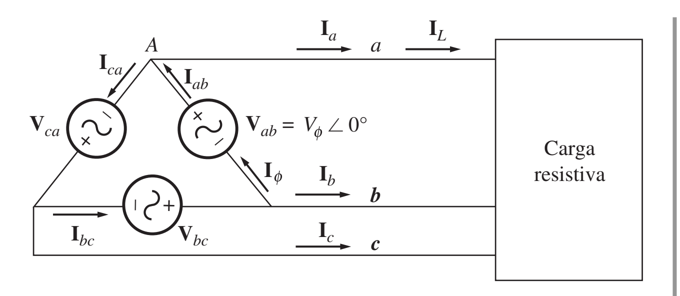


FIGURA A-7 Generador conectado en Δ con una carga resistiva.

Puesto que la carga es resistiva, las corrientes de fase están dadas por

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{ab} &= I_\phi \angle 0° \\ \mathbf{I}_{bc} &= I_\phi \angle -120° \\ \mathbf{I}_{ca} &= I_\phi \angle -240° \end{aligned} \tag{A-13}$$

En el caso de la conexión en Δ, es obvio que el voltaje línea a línea entre cualesquiera dos líneas será igual al voltaje en la fase correspondiente. *En una conexión* Δ,

$$V_{LL} = V_\phi \qquad \text{conexión en } \Delta \tag{A-14}$$

La relación entre la corriente de línea y la corriente de fase es más compleja. Se puede encontrar por medio de la ley de corriente de Kirchhoff en uno de los nodos de la Δ. Si se aplica la ley de corriente de Kirchhoff al nodo *A*, se obtiene como resultado la ecuación

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_a &= \mathbf{I}_{ab} - \mathbf{I}_{ca} \\ &= I_\phi \angle 0° - I_\phi \angle -240° \\ &= I_\phi - \left(-\frac{1}{2} I_\phi + j\frac{\sqrt{3}}{2} I_\phi\right) = \frac{3}{2} I_\phi - j\frac{\sqrt{3}}{2} I_\phi \\ &= \sqrt{3} I_\phi \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{1}{2}\right) \\ &= \sqrt{3} I_\phi \angle -30° \end{aligned}$$

TABLA A-1 Resumen de la relación de las conexiones en Y y en Δ

	Conexión en Y	**Conexión en Δ**
Magnitudes de voltaje	$V_{LL} = \sqrt{3}\, V_\phi$	$V_{LL} = V_\phi$
Magnitudes de corriente	$I_L = I_\phi$	$I_L = \sqrt{3}\, I_\phi$
Secuencia de fase *abc*	$\mathbf{V}_{ab}$ 30° adelante de $\mathbf{V}_a$	$\mathbf{I}_a$ 30° atrás de $\mathbf{I}_{ab}$
Secuencia de fase *acb*	$\mathbf{V}_{ab}$ 30° atrás de $\mathbf{V}_a$	$\mathbf{I}_a$ 30° adelante de $\mathbf{I}_{ab}$

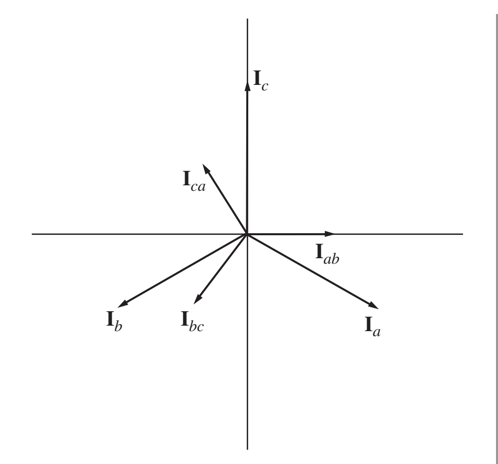


FIGURA A-8 Corrientes de línea y de fase de la conexión en Δ, de la figura A-7.

Por lo tanto, la relación entre las magnitudes de las corrientes de línea y de fase en un generador o carga conectado en Δ es

$$I_L = \sqrt{3} I_\phi \qquad \text{conexión en } \Delta \tag{A-15}$$

y las corrientes de línea están desplazadas 30° con respecto a las corrientes de fase correspondientes.

Nótese que en una conexión en Δ con secuencia de fase *abc* o *positiva* como la que se muestra en la figura A-7, la corriente de línea *está en retraso* con respecto a la corriente de fase correspondiente por 30° (véase la figura A-8). En las conexiones en Δ con secuencia de fase *acb* o *negativa*, la corriente de línea *está adelantada* con respecto a la corriente de fase por 30°.

En la tabla A-1 se resumen las relaciones de voltaje y corriente de fuentes y cargas conectadas en Y y en Δ.

A.3 RELACIONES DE POTENCIA EN LOS CIRCUITOS TRIFÁSICOS

En la figura A-9 se muestra una carga conectada en Y balanceada, cuya impedancia de fase es $\mathbf{Z}_\phi = Z \angle \theta°$. Si los voltajes trifásicos aplicados a la carga están dados por

$$\begin{aligned} v_{an}(t) &= \sqrt{2}V \operatorname{sen} \omega t \\ v_{bn}(t) &= \sqrt{2}V \operatorname{sen}(\omega t - 120°) \\ v_{cn}(t) &= \sqrt{2}V \operatorname{sen}(\omega t - 240°) \end{aligned} \tag{A-16}$$

FIGURA A-9 Carga conectada en Y balanceada.

entonces las corrientes trifásicas que fluyen en la carga están dadas por

$$\begin{aligned} i_a(t) &= \sqrt{2}I \operatorname{sen}(\omega t - \theta) \\ i_b(t) &= \sqrt{2}I \operatorname{sen}(\omega t - 120° - \theta) \\ i_c(t) &= \sqrt{2}I \operatorname{sen}(\omega t - 240° - \theta) \end{aligned} \tag{A-17}$$

donde $I = V/Z$. ¿Cuánta potencia suministra la fuente a la carga?

La potencia instantánea suministrada a una fase de la carga está dada por la ecuación

$$p(t) = v(t)i(t) \tag{A-18}$$

Por lo tanto, la potencia instantánea suministrada a cada una de las tres fases es

$$\begin{aligned} p_a(t) &= v_{an}(t)i_a(t) = 2VI \operatorname{sen}(\omega t) \operatorname{sen}(\omega t - \theta) \\ p_b(t) &= v_{bn}(t)i_b(t) = 2VI \operatorname{sen}(\omega t - 120°) \operatorname{sen}(\omega t - 120° - \theta) \\ p_c(t) &= v_{cn}(t)i_c(t) = 2VI \operatorname{sen}(\omega t - 240°) \operatorname{sen}(\omega t - 240° - \theta) \end{aligned} \tag{A-19}$$

Una de las identidades trigonométricas establece que

$$\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha - \beta)] \tag{A-20}$$

Si se aplica esta identidad a la ecuación (A-19), se tiene como resultado una nueva expresión de la potencia en cada fase de la carga:

$$\begin{aligned} p_a(t) &= VI[\cos\theta - \cos(2\omega t - \theta)] \\ p_b(t) &= VI[\cos\theta - \cos(2\omega t - 240° - \theta)] \\ p_c(t) &= VI[\cos\theta - \cos(2\omega t - 480° - \theta)] \end{aligned} \tag{A-21}$$

La potencia total suministrada a toda la carga trifásica es igual a la suma de la potencia suministrada a cada una de las fases individuales. La potencia suministrada por cada fase consta de un componente constante más un componente oscilante. Sin embargo, *los componentes oscilantes de las tres fases se cancelan entre sí, puesto que están 120° fuera de fase entre ellos mismos* y la potencia final suministrada por el sistema trifásico es constante. Esta potencia está dada por:

$$p_{\text{tot}}(t) = p_A(t) + p_B(t) + p_C(t) = 3VI\cos\theta \tag{A-22}$$

La potencia instantánea en las bases *a*, *b* y *c* se muestra en función del tiempo en la figura A-10. Nótese que *la potencia total suministrada a una carga trifásica balanceada es constante en todo momento.* El hecho de que un sistema de potencia trifásico suministre potencia constante es una de sus mayores ventajas en comparación con las fuentes monofásicas.

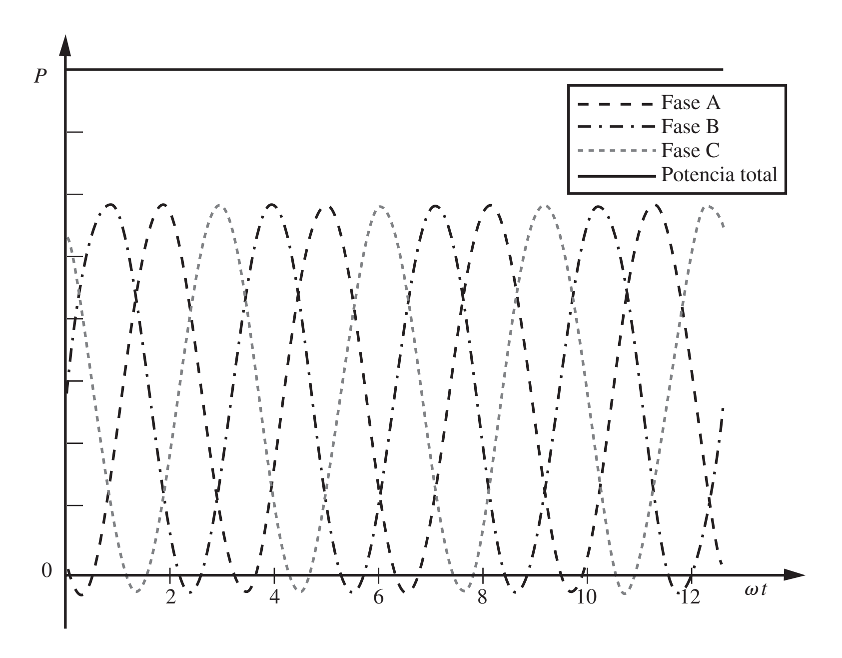


FIGURA A-10 Potencia instantánea en las fases *a*, *b* y *c* más la potencia total suministrada a la carga.

Ecuaciones de potencia trifásica que involucran valores de fase

Las ecuaciones de potencia monofásica (1-60) a (1-66) se aplican a *cada fase* de una carga trifásica conectada en Y o en Δ, por lo que las potencias real, reactiva y aparente suministradas a una carga trifásica equilibrada están dadas por

$$P = 3V_\phi I_\phi \cos\theta \tag{A-23}$$

$$Q = 3V_\phi I_\phi \operatorname{sen}\theta \tag{A-24}$$

$$S = 3V_\phi I_\phi \tag{A-25}$$

$$P = 3I_\phi^2 Z \cos\theta \tag{A-26}$$

$$Q = 3I_\phi^2 Z \operatorname{sen}\theta \tag{A-27}$$

$$S = 3I_\phi^2 Z \tag{A-28}$$

Una vez más, el ángulo θ es el que existe entre el voltaje y la corriente en cualquier fase de la carga (y es el mismo en todas las fases) y el factor de potencia de la carga es el coseno del ángulo de la impedancia θ. También se aplican las relaciones de triángulo de potencia.

Ecuaciones de potencia trifásica que involucran valores de línea

También se pueden deducir las expresiones de la potencia de una carga trifásica balanceada en términos de cantidades de línea. Esta deducción se debe llevar a cabo de manera separada para las cargas conectadas en Y y las conectadas en Δ, puesto que las relaciones entre las cantidades de línea y de fase son diferentes en cada tipo de conexión.

En el caso de una carga conectada en Y, la potencia consumida por la carga está dada por

$$P = 3V_\phi I_\phi \cos \theta \qquad \textbf{(A-23)}$$

En este tipo de carga, $I_L = I_\phi$ y $V_{LL} = \sqrt{3}V_\phi$, por lo que la potencia consumida por la carga también se puede expresar como

$$P = 3\left(\frac{V_{LL}}{\sqrt{3}}\right) I_L \cos \theta$$

$$P = \sqrt{3}V_{LL} I_L \cos \theta \qquad \textbf{(A-29)}$$

En el caso de una carga conectada en Δ, la potencia consumida por la carga está dada por

$$P = 3V_\phi I_\phi \cos \theta \qquad \textbf{(A-23)}$$

En este tipo de carga, $I_L = \sqrt{3}I_\phi$ y $V_{LL} = V_\phi$, por lo que la potencia consumida por la carga también se puede expresar en términos de cantidades de línea como

$$P = 3V_{LL}\left(\frac{I_L}{\sqrt{3}}\right) \cos \theta$$

$$= \sqrt{3}V_{LL}I_L \cos \theta \qquad \textbf{(A-29)}$$

La anterior es exactamente la misma ecuación que se dedujo en el caso de una carga conectada en Y, por lo que la ecuación (A-29) da como resultado la potencia de una carga trifásica balanceada en términos de cantidades de línea *sin importar la conexión de la carga*. Las potencias reactiva y aparente de la carga en términos de cantidades de línea son

$$Q = \sqrt{3}V_{LL} I_L \operatorname{sen} \theta \qquad \textbf{(A-30)}$$

$$S = \sqrt{3}V_{LL} I_L \qquad \textbf{(A-31)}$$

Es importante darse cuenta de que los términos de la ecuación (A-29) y (A-30) cos θ y sen θ son el coseno y el seno del ángulo entre el voltaje *de fase* y la corriente *de fase*, no el ángulo entre el voltaje de línea a línea y la corriente de línea. Recuérdese que hay un desplazamiento de fase de 30° entre el voltaje de línea a línea y el voltaje de fase en una conexión en Y y entre la corriente de línea y la corriente de fase en una conexión en Δ, por lo que es importante no tomar el coseno del ángulo entre el voltaje de línea a línea y la corriente de línea.

A.4 ANÁLISIS DE UN SISTEMA TRIFÁSICO BALANCEADO

Si un sistema de potencia trifásica está balanceado, se pueden determinar los voltajes, corrientes y potencias en diferentes puntos del circuito con un *circuito equivalente por fase*. Esta idea se ilustra en la figura A-11. La figura A-11*a*) muestra un generador conectado en Y que suministra potencia a una carga conectada en Y a través de una línea de transmisión trifásica.

En un sistema balanceado como éste, se puede insertar un cable neutro y no tendrá ningún efecto en el sistema puesto que no fluye ninguna corriente por él. En la figura A-11*b*) se puede observar este sistema con el cable extra. Además, observe que cada una de las tres fases es *idéntica* excepto en el desplazamiento de 120° en el ángulo de fase. Por lo tanto, se puede analizar un circuito que consta de *una fase y el neutro* y los resultados del análisis serán válidos también en el caso de las otras dos fases si se incluye el desplazamiento de 120°. En la figura A-11*c*) se muestra un circuito por fase de este tipo.

Sin embargo, hay un problema asociado con este método: se requiere que haya una línea neutra disponible (al menos conceptualmente) para proveer un camino de regreso para el flujo de corriente

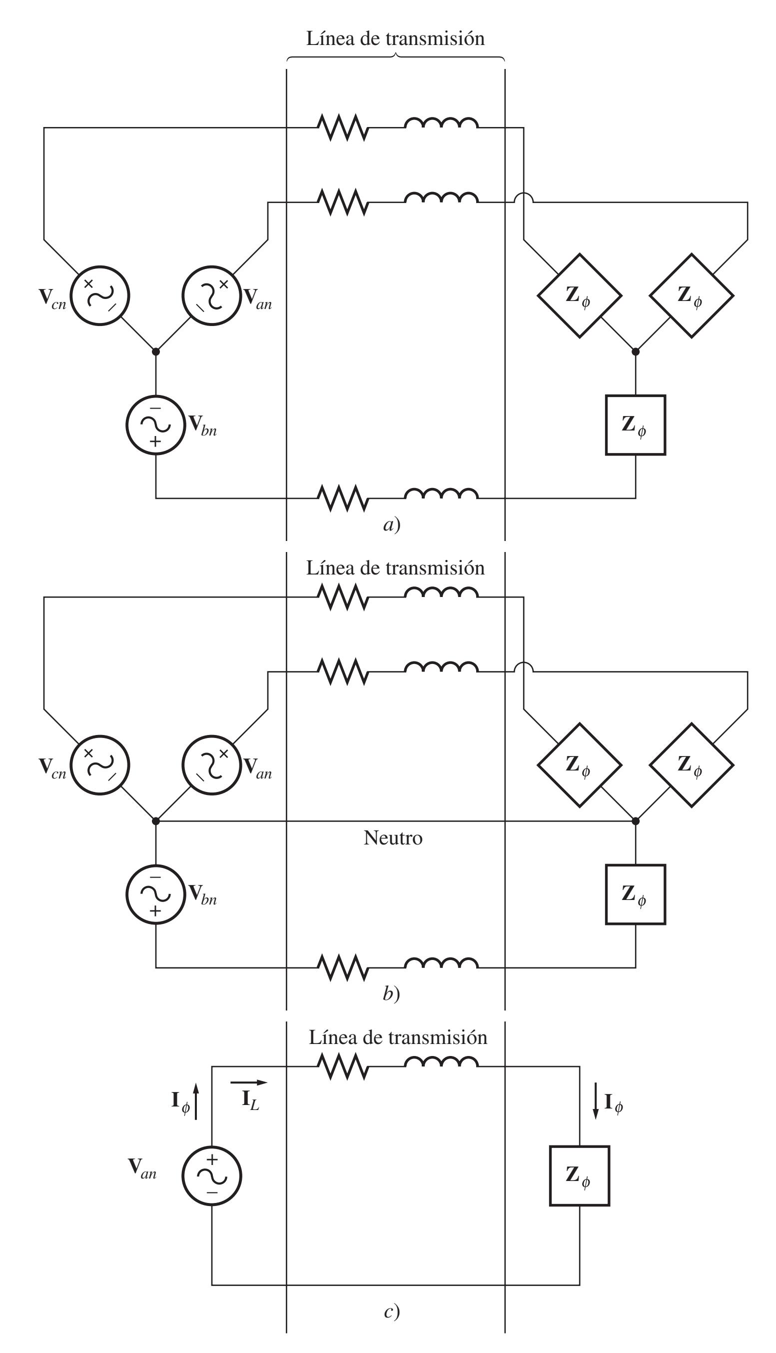


FIGURA A-11 *a*) Generador y carga conectados en Y. *b*) Sistema con un neutro. *c*) Circuito equivalente por fase.

de las cargas al generador. Esto no representa problema alguno para las fuentes y cargas conectadas en Y, pero no se puede conectar un neutro a las cargas y fuentes conectadas en Δ.

¿Cómo se pueden incluir las fuentes y cargas conectadas en Δ en un sistema de potencia para analizarlas? El método estándar consiste en transformar las impedancias con la teoría de circuito elemental de transformación Δ-Y. En el caso especial de cargas balanceadas, la transformación Δ-Y dice que una carga conectada en Δ que consta de tres impedancias iguales, cada una con un valor *Z*, es totalmente equivalente a una carga conectada en Y que consta de tres impedancias, cada una con un valor de *Z*/3 (véase la figura A-12). Esta equivalencia significa que los voltajes, corrientes y potencias suministrados a las dos cargas no se pueden distinguir de ninguna manera por ningún dispositivo externo a la carga misma.

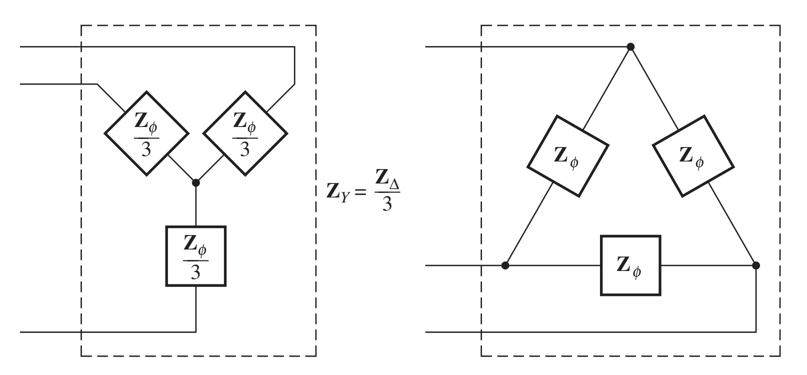


FIGURA A-12 Transformación Y-Δ. Una impedancia de $Z/3\ \Omega$ conectada en Y es totalmente equivalente a una impedancia de $Z\ \Omega$ conectada en Δ en cualquier circuito conectado a los terminales de la carga.

Si las fuentes o cargas conectadas en Δ incluyen fuentes de voltaje, entonces las magnitudes de las fuentes de voltaje se deben graduar de acuerdo con la ecuación (A-11) y también se debe tomar en cuenta el efecto del desplazamiento de fase de 30°.

EJEMPLO A-1

En la figura A-13 se muestra un sistema de potencia trifásico de 208 V. Consta de un generador ideal trifásico conectado en Y de 208 V acoplado a una carga con conexión en Y a través de una línea de transmisión trifásica. La línea de transmisión tiene una impedancia de $0.06 + j0.12\ \Omega$ por fase y la carga tiene una impedancia de $12 + j9\ \Omega$ por fase. Encuentre las siguientes cantidades del sistema de potencia:

a) La magnitud de la corriente de línea I_L.
b) La magnitud de los voltajes de línea y de fase de la carga V_{LL} y $V_{\phi L}$.
c) Las potencias real, reactiva y aparente consumidas por la carga.
d) El factor de potencia de la carga.
e) Las potencias real, reactiva y aparente consumidas por la línea de transmisión.
f) Las potencias real, reactiva y aparente suministradas por el generador.
g) El factor de potencia del generador.

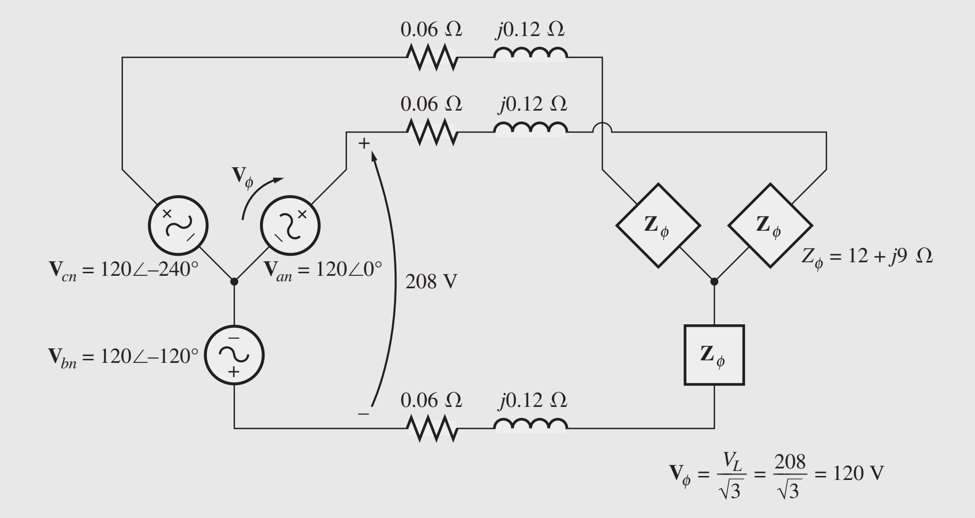


FIGURA A-13 Circuito trifásico del ejemplo A-1.

Solución

Puesto que tanto el generador como la carga del sistema de potencia están conectados en Y, es muy fácil construir un circuito equivalente por fase. En la figura A-14 se muestra este circuito.

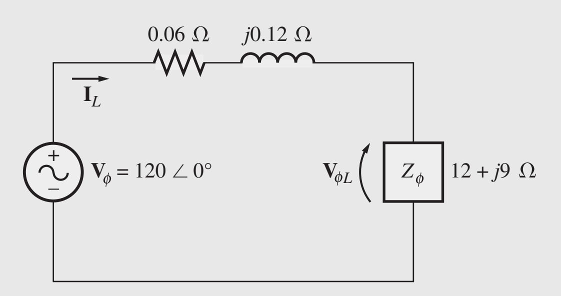


FIGURA A-14 Circuito por fase del ejemplo A-1.

a) La corriente de línea que fluye en el circuito equivalente por fase está dada por

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_{\text{línea}} &= \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}_{\text{línea}} + \mathbf{Z}_{\text{carga}}} \\ &= \frac{120\angle 0^\circ \text{ V}}{(0.06 + j\,0.12\ \Omega) + (12 + j\,9\Omega)} \\ &= \frac{120\angle 0^\circ}{12.06 + j\,9.12} = \frac{120\angle 0^\circ}{15.12\angle 37.1^\circ} \\ &= 7.94\angle -37.1^\circ \text{ A}\end{aligned}$$

Entonces, la magnitud de la corriente de línea es de 7.94 A.

b) El voltaje de fase en la carga es el voltaje en una fase de la carga. Este voltaje es el producto de la impedancia de fase multiplicada por la corriente de fase de la carga:

$$\begin{aligned}V_{\phi L} &= \mathbf{I}_{\phi L}\mathbf{Z}_{\phi L} \\ &= (7.94\angle -37.1^\circ \text{ A})(12 + j\,9\ \Omega) \\ &= (7.94\angle -37.1^\circ \text{ A})(15\angle 36.9^\circ\ \Omega) \\ &= 119.1\angle -0.2^\circ \text{ V}\end{aligned}$$

Por lo tanto, la magnitud del voltaje de fase de la carga es

$$V_{\phi L} = 119.1 \text{ V}$$

y la magnitud del voltaje de línea de la carga es

$$V_{LL} = \sqrt{3}V_{\phi L} = 206.3 \text{ V}$$

c) La potencia real consumida por la carga es de

$$\begin{aligned}P_{\text{carga}} &= 3V_\phi I_\phi \cos\theta \\ &= 3(119.1 \text{ V})(7.94 \text{ A}) \cos 36.9^\circ \\ &= 2\,270 \text{ W}\end{aligned}$$

La potencia reactiva por la carga es

$$\begin{aligned}Q_{\text{carga}} &= 3V_\phi I_\phi \operatorname{sen}\theta \\ &= 3(119.1 \text{ V})(7.94 \text{ A}) \operatorname{sen} 36.9^\circ \\ &= 1\,702 \text{ var}\end{aligned}$$

La potencia aparente consumida por la carga es

$$\begin{aligned}S_{\text{carga}} &= 3V_\phi I_\phi \\ &= 3(119.1 \text{ V})(7.94 \text{ A}) \\ &= 2\,839 \text{ VA}\end{aligned}$$

d) El factor de potencia de la carga es

$$\text{FP}_{\text{carga}} = \cos\theta = \cos 36.9° = 0.8 \text{ en retraso}$$

e) La corriente en la línea de transmisión es de 7.94 ∠ − 37.1 A y la impedancia de la línea es de 0.06 + *j*0.12 Ω o 0.134 ∠ 63.4° Ω por fase. Por lo tanto, las potencias real, reactiva y aparente consumidas por la línea son

$$P_{\text{línea}} = 3I_\phi^2 Z\cos\theta \qquad \textbf{(A-26)}$$
$$= 3(7.94\text{ A})^2\,(0.134\,\Omega)\cos 63.4°$$
$$= 11.3\text{ W}$$

$$Q_{\text{línea}} = 3I_\phi^2 Z\,\text{sen}\,\theta \qquad \textbf{(A-27)}$$
$$= 3(7.94\text{ A})^2\,(0.134\,\Omega)\,\text{sen}\,63.4°$$
$$= 22.7\text{ var}$$

$$S_{\text{línea}} = 3I_\phi^2 Z \qquad \textbf{(A-28)}$$
$$= 3(7.94\text{ A})^2\,(0.134\,\Omega)$$
$$= 25.3\text{ VA}$$

f) Las potencias real y reactiva suministradas por el generador son iguales a la suma de las potencias consumidas por la línea y por la carga:

$$P_{\text{gen}} = P_{\text{línea}} + P_{\text{carga}}$$
$$= 11.3\text{ W} + 2\,270\text{ W} = 2\,281\text{ W}$$

$$Q_{\text{gen}} = Q_{\text{línea}} + Q_{\text{carga}}$$
$$= 22.7\text{ var} + 1\,702\text{ var} = 1\,725\text{ var}$$

La potencia aparente del generador es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las potencias real y reactiva:

$$S_{\text{gen}} = \sqrt{P_{\text{gen}}^2 + Q_{\text{gen}}^2} = 2\,860\text{ VA}$$

g) A partir del triángulo de potencia, el ángulo θ del factor de potencia es

$$\theta_{\text{gen}} = \tan^{-1}\frac{Q_{\text{gen}}}{P_{\text{gen}}} = \tan^{-1}\frac{1\,725\text{ VAR}}{2\,281\text{ W}} = 37.1°$$

Por lo tanto, el factor de potencia del generador es de

$$\text{FP}_{\text{gen}} = \cos 37.1° = 0.798 \text{ en retraso}$$

EJEMPLO A-2

Repita el ejemplo A-1, pero con una carga conectada en Δ. Todos los demás valores permanecen iguales.

Solución

En la figura A-15 se muestra el sistema de potencia. Puesto que la carga de éste está conectada en Δ, primero se debe convertir a una forma equivalente en Y. La impedancia de fase de la carga conectada en Δ es de 12 + *j*9 Ω, por lo que la impedancia de fase equivalente de la forma en Y correspondiente es

$$Z_{\text{Y}} = \frac{Z_\Delta}{3} = 4 + j3\,\Omega$$

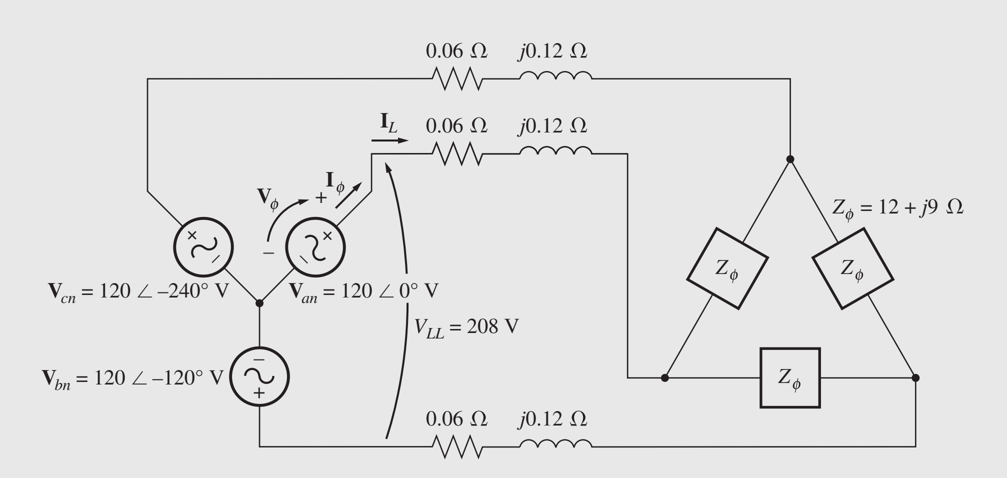


FIGURA A-15 Circuito trifásico del ejemplo A-2.

En la figura A-16 se ilustra el circuito equivalente por fase resultante de este sistema.

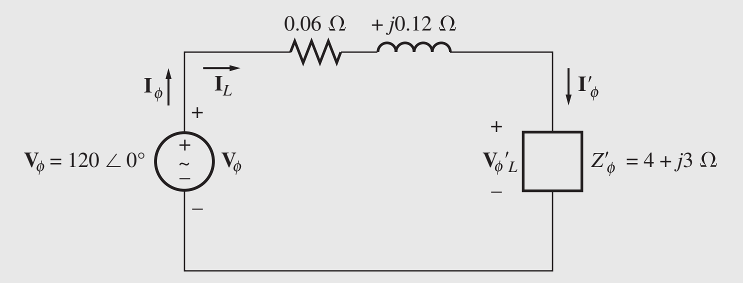


FIGURA A-16 Circuito por fase del ejemplo A-2.

a) La corriente de línea que fluye en el circuito equivalente por fase está dada por

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_{\text{línea}} &= \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}_{\text{línea}} + \mathbf{Z}_{\text{carga}}} \\ &= \frac{120\angle 0^\circ \text{ V}}{(0.06 + j\,0.12\ \Omega) + (4 + j\,3\ \Omega)} \\ &= \frac{120\angle 0^\circ}{4.06 + j\,3.12} = \frac{120\angle 0^\circ}{5.12\angle 37.5^\circ} \\ &= 23.4\angle -37.5^\circ \text{ A}\end{aligned}$$

Entonces, la magnitud de la corriente de línea es de 23.4 A.

b) El voltaje de fase en la carga Y equivalente es igual al voltaje a través de una fase de la carga. Este voltaje es el producto de la impedancia de fase y la corriente de fase de la carga:

$$\begin{aligned}\text{V}'_{\phi L} &= \mathbf{I}'_{\phi L}\mathbf{Z}'_{\phi L} \\ &= (23.4\angle -37.5^\circ \text{ A})(4 + j\,3\ \Omega) \\ &= (23.4\angle -37.5^\circ \text{ A})(5\angle 36.9^\circ\ \Omega) = 117\angle -0.6^\circ \text{ V}\end{aligned}$$

La carga original estaba conectada en **Δ**, por lo que el voltaje de fase original de la carga es de

$$\text{V}_{\phi L} = \sqrt{3}\,(117 \text{ V}) = 203 \text{ V}$$

y la magnitud del voltaje de línea de la carga es

$$V_{LL} = V_{\phi L} = 203 \text{ V}$$

c) La potencia real consumida por la carga Y equivalente (que es la misma potencia presente en la carga real) es

$$\begin{aligned} P_{\text{carga}} &= 3V_\phi I_\phi \cos \theta \\ &= 3(117 \text{ V})(23.4 \text{ A}) \cos 36.9° \\ &= 6\,571 \text{ W} \end{aligned}$$

La potencia reactiva consumida por la carga es

$$\begin{aligned} Q_{\text{carga}} &= 3V_\phi I_\phi \operatorname{sen} \theta \\ &= 3(117 \text{ V})(23.4 \text{ A}) \operatorname{sen} 36.9° \\ &= 4\,928 \text{ var} \end{aligned}$$

La potencia aparente consumida por la carga es

$$\begin{aligned} S_{\text{carga}} &= 3V_\phi I_\phi \\ &= 3(117 \text{ V})(23.4 \text{ A}) \\ &= 8\,213 \text{ VA} \end{aligned}$$

d) El factor de potencia de la carga es

$$\text{FP}_{\text{carga}} = \cos \theta = \cos 36.9° = 0.8 \text{ en retraso}$$

e) La corriente en la línea de transmisión es de $23.4 \angle -37.5°$ A y la impedancia en la línea es de $0.06 + j0.12\ \Omega$ o $0.134 \angle 63.4°\ \Omega$ por fase. Por lo tanto, las potencias real, reactiva y aparente consumidas en la línea son

$$\begin{aligned} P_{\text{línea}} &= 3I_\phi^2 Z \cos \theta \qquad \textbf{(A-26)} \\ &= 3(23.4 \text{ A})^2(0.134\ \Omega) \cos 63.4° \\ &= 98.6 \text{ W} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{\text{línea}} &= 3I_\phi^2 Z \operatorname{sen} \theta \qquad \textbf{(A-27)} \\ &= 3(23.4 \text{ A})^2(0.134\ \Omega) \operatorname{sen} 63.4° \\ &= 197 \text{ var} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{\text{línea}} &= 3I_\phi^2 Z \qquad \textbf{(A-28)} \\ &= 3(23.4 \text{ A})^2(0.134\ \Omega) \\ &= 220 \text{ VA} \end{aligned}$$

f) Las potencias real y reactiva suministradas por el generador son iguales a la suma de las potencias consumidas en la línea y en la carga:

$$\begin{aligned} P_{\text{gen}} &= P_{\text{línea}} + P_{\text{carga}} \\ &= 98.6 \text{ W} + 6\,571 \text{ W} = 6\,670 \text{ W} \\ Q_{\text{gen}} &= Q_{\text{línea}} + Q_{\text{carga}} \\ &= 197 \text{ var} + 4\,928 \text{ VAR} = 5\,125 \text{ var} \end{aligned}$$

La potencia aparente del generador es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las potencias real y reactiva:

$$S_{\text{gen}} = \sqrt{P_{\text{gen}}^2 + Q_{\text{gen}}^2} = 8\,411 \text{ VA}$$

g) A partir del triángulo de potencia, el ángulo θ del factor de potencia es

$$\theta_{\text{gen}} = \tan^{-1}\frac{Q_{\text{gen}}}{P_{\text{gen}}} = \tan^{-1}\frac{5\,125\text{ var}}{6\,670\text{ W}} = 37.6°$$

Por lo tanto, el factor de potencia del generador es de

$$\text{FP}_{\text{gen}} = \cos 37.6° = 0.792 \text{ en retraso}$$

A.5 DIAGRAMAS DE UNA LÍNEA O DIAGRAMAS UNIFILARES

Como se ha visto en este capítulo, un sistema de potencia trifásico balanceado tiene tres líneas que conectan cada fuente con cada carga, una para cada una de las fases en el sistema de potencia. Las tres fases son parecidas, las amplitudes de sus voltajes y corrientes son iguales y sus fases están desplazadas entre ellas por 120°. Puesto que las tres fases son básicamente iguales, se acostumbra dibujar los sistemas de potencia de una manera muy sencilla por medio de una *sola línea* que representa las tres fases del sistema de potencia real. Estos *diagramas de una línea* (comúnmente llamados diagramas unifilares), son una manera compacta de representar las interconexiones de un sistema de potencia. Por lo regular los diagramas de una línea incluyen todos los principales componentes de un sistema de potencia, tales como generadores, transformadores y cargas cuyas líneas de transmisión se representan por una sola línea. Normalmente se representan en el diagrama los voltajes y los tipos de conexión de cada generador y de cada carga. En la figura A-17 se muestra un sistema de potencia simple junto con el diagrama de una línea correspondiente.

A.6 UTILIZACIÓN DEL TRIÁNGULO DE POTENCIA

Si se supone que las líneas de transmisión de un sistema de potencia tienen una impedancia despreciable, se puede hacer una simplificación importante en el cálculo de las corrientes y potencias trifásicas. Dicha simplificación depende del empleo de las potencias real y reactiva de cada carga para determinar las corrientes y factores de potencia en diferentes puntos del sistema.

Por ejemplo, considérese el sistema de potencia simple que se muestra en la figura A-17. Si se supone que no hay pérdidas en la línea de transmisión del sistema de potencia, el voltaje de línea del generador será igual al voltaje de línea de las cargas. Si se especifica el voltaje del generador, entonces se puede encontrar la corriente y el factor de potencia en cualquier punto del sistema de potencia de la siguiente manera:

1. Se determina el voltaje de línea del generador y de las cargas. Puesto que se supone que no hay pérdidas en la línea de transmisión, estos dos voltajes son idénticos.
2. Se determinan las potencias real y reactiva de cada carga en el sistema de potencia. Se puede utilizar el voltaje de carga conocido para realizar este cálculo.
3. Se encuentran las potencias real y reactiva suministradas a todas las cargas "con dirección hacia abajo" desde el punto de vista examinado.
4. Se determina el factor de potencia del sistema en ese punto por medio de las relaciones del triángulo de potencia.
5. Se utiliza la ecuación (A-29) para determinar las corrientes de línea o la ecuación (A-23) para determinar las corrientes de fase en ese punto.

Por lo general, este método lo utilizan los ingenieros para estimar los flujos de corriente y de potencia en diferentes puntos de los sistemas de distribución dentro de una planta industrial. Dentro de una sola planta la longitud de las líneas de transmisión será bastante corta y sus impedancias serán relativamente pequeñas, por lo que sólo se tendrá un error muy pequeño si se desprecian. Un

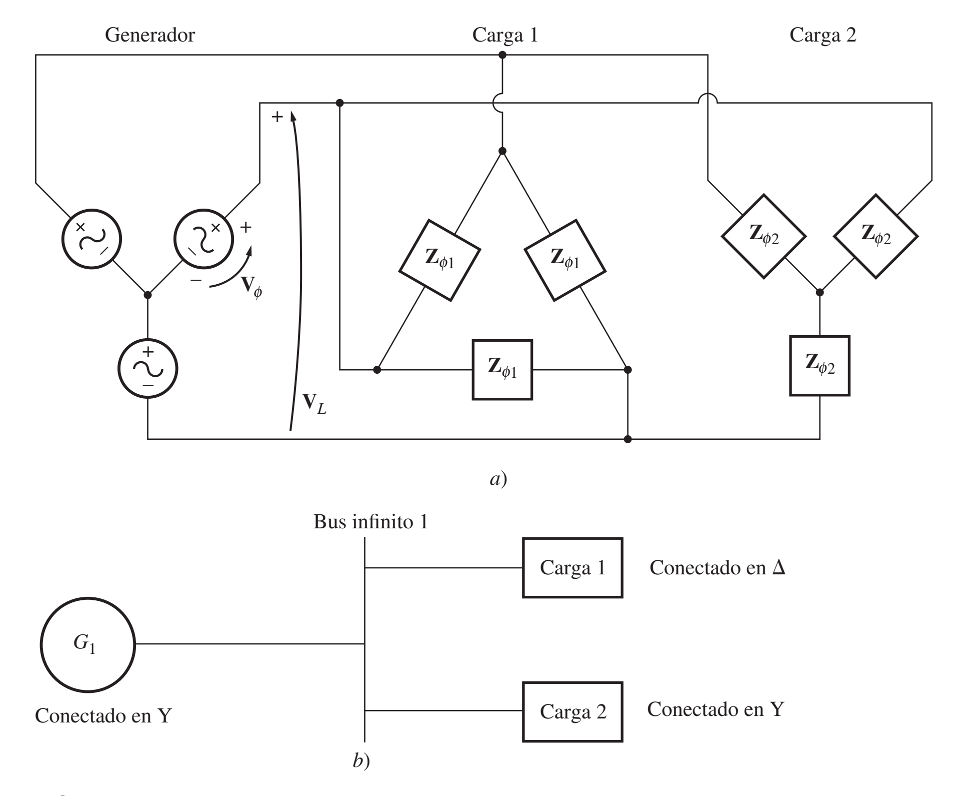


FIGURA A-17 *a*) Sistema de potencia simple con un generador conectado en Y, una carga conectada en Δ y una carga conectada en Y. *b*) Diagrama de una línea o diagrama unifilar correspondiente.

ingeniero puede tomar los voltajes de línea como una constante y utilizar el método del triángulo de potencia para calcular rápidamente el efecto que produce añadir una carga sobre el factor de potencia y la corriente del sistema en general.

EJEMPLO A-3

La figura A-18 muestra el diagrama de una línea de un sistema de distribución industrial de 480 V. El sistema de potencia suministra un voltaje de línea constante de 480 V y se puede despreciar la impedancia de las líneas de distribución. La carga 1 está conectada en Δ con una impedancia de fase de $10 \angle 30° \ \Omega$ y la carga 2 está conectada en Y con una impedancia de fase de $5 \angle -36.87° \ \Omega$.

a) Calcule el factor de potencia general del sistema de distribución.
b) Encuentre la corriente de línea total suministrada al sistema de distribución.

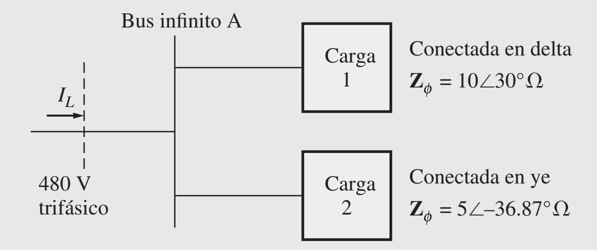


FIGURA A-18 El sistema del ejemplo A-3.

Solución

Se supone que las líneas del sistema no tienen impedancia, por lo que no habrá ninguna caída de voltaje dentro del sistema. Puesto que la carga 1 está conectada en Δ, su voltaje de fase será de 480 V. Puesto que la carga 2 está conectada en Y, su voltaje de fase será $480/\sqrt{3} = 277$ V.

La corriente de fase en la carga 1 es

$$I_{\phi 1} = \frac{480 \text{ V}}{10 \ \Omega} = 48 \text{ A}$$

Por lo tanto, las potencias real y reactiva de la carga 1 son

$$\begin{aligned} P_1 &= 3V_{\phi 1}I_{\phi 1} \cos \theta \\ &= 3(480 \text{ V})(48 \text{ A}) \cos 30° = 59.9 \text{ kW} \\ Q_1 &= 3V_{\phi 1}I_{\phi 1} \text{ sen}\,\theta \\ &= 3(480 \text{ V})(48 \text{ A}) \text{ sen } 30° = 34.6 \text{ kvar} \end{aligned}$$

La corriente de fase de la carga 2 es

$$I_{\phi 2} = \frac{277 \text{ V}}{5 \ \Omega} = 55.4 \text{ A}$$

Por lo tanto, las potencias real y reactiva de la carga 2 son

$$\begin{aligned} P_2 &= 3V_{\phi 2}I_{\phi 2} \cos \theta \\ &= 3(277 \text{ V})(55.4 \text{ A}) \cos(-36.87°) = 36.8 \text{ kW} \\ Q_2 &= 3V_{\phi 2}I_{\phi 2} \text{ sen}\,\theta \\ &= 3(277 \text{ V})(55.4 \text{ A}) \text{ sen}(-36.87°) = -27.6 \text{ kvar} \end{aligned}$$

a) Las potencias real y reactiva que suministra el sistema de distribución son

$$\begin{aligned} P_{tot} &= P_1 + P_2 \\ &= 59.9 \text{ kW} + 36.8 \text{ kW} = 96.7 \text{ kW} \\ Q_{tot} &= Q_1 + Q_2 \\ &= 34.6 \text{ kvar} - 27.6 \text{ kvar} = 7.00 \text{ kvar} \end{aligned}$$

Con base en el triángulo de potencia, el ángulo de impedancia efectivo θ está dado por

$$\begin{aligned} \theta &= \tan^{-1} \frac{Q}{P} \\ &= \tan^{-1} \frac{7.00 \text{ kvar}}{96.7 \text{ kW}} = 4.14° \end{aligned}$$

Entonces, el factor de potencia del sistema es

$$\text{FP} = \cos \theta = \cos(4.14°) = 0.997 \text{ en retraso}$$

b) La corriente de línea total está dada por

$$I_L = \frac{P}{\sqrt{3}V_L \cos \theta}$$

$$I_L = \frac{96.7 \text{ kW}}{\sqrt{3}(480 \text{ V})(0.997)} = 117 \text{ A}$$

PREGUNTAS

A-1. ¿Cómo se pueden conectar los generadores y cargas trifásicos?

A-2. ¿Qué quiere decir el término “balanceado” en la expresión sistema trifásico balanceado?

A-3. ¿Cuál es la relación entre los voltajes de línea y de fase y las corrientes en una conexión en ye (Y)?

A-4. ¿Cuál es la relación entre los voltajes de línea y de fase y las corrientes en una conexión en delta (Δ)?

A-5. ¿Qué es secuencia de fase?

A-6. Escriba las ecuaciones de las potencias real, reactiva y aparente en los circuitos trifásicos, tanto en términos de cantidades de fase como en términos de cantidades de línea.

A-7. ¿Qué es la transformación Y-Δ?

PROBLEMAS

A-1. Tres impedancias de $4 + j3\ \Omega$ conectadas en Δ están unidas a una línea de potencia trifásica de 208 V. Encuentre I_ϕ, I_L, P, Q, S y el factor de potencia de la carga.

A-2. La figura PA-1 muestra un sistema trifásico con dos cargas. El generador conectado en Δ produce un voltaje de línea de 480 V y tiene una impedancia de línea de $0.09 + j0.16\ \Omega$. La carga 1 está conectada en Y y tiene una impedancia de fase de $2.5 \angle 36.87°\ \Omega$ y la carga 2 está conectada en Δ y tiene una impedancia de fase de $5 \angle -20°\ \Omega$.

a) ¿Cuál es el voltaje de línea de las dos cargas?
b) ¿Cuál es la caída de voltaje en las líneas de transmisión?
c) Encuentre las potencias real y reactiva que se suministran a cada carga.
d) Encuentre las pérdidas de las potencias real y reactiva en la línea de transmisión.
e) Encuentre la potencia real, la potencia reactiva y el factor de potencia suministrados por el generador.

A-3. La figura PA-2 muestra el diagrama de una línea de un sistema de potencia simple que consta de un solo generador de 480 V y tres cargas. Suponga que no hay pérdidas en las líneas de transmisión del sistema de potencia y responda las siguientes preguntas:

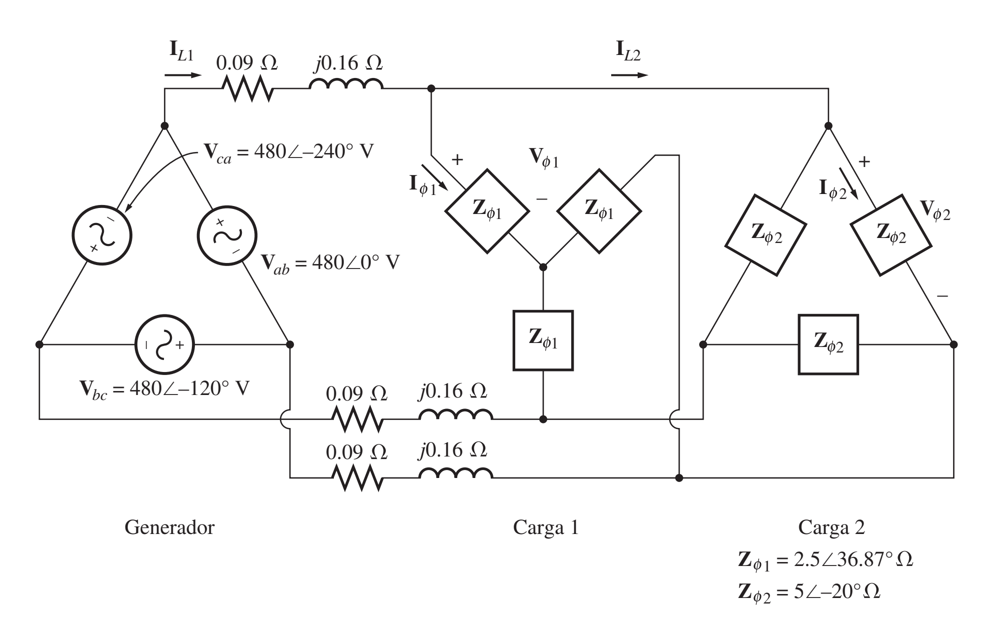


FIGURA PA-1 Sistema del problema A-2.

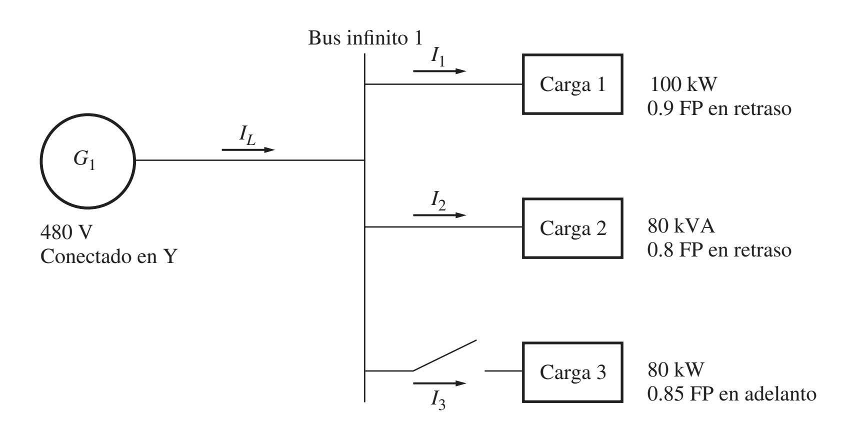


FIGURA PA-2 Sistema de potencia del problema A-3.

a) Suponga que la carga 1 está conectada en Y. ¿Cuál es el voltaje de fase y las corrientes de la carga?
b) Suponga que la carga 2 está conectada en Δ. ¿Cuál es el voltaje de fase y las corrientes de la carga?
c) ¿Cuánta potencia real, reactiva y aparente suministra el generador cuando el interruptor está abierto?
d) ¿Cuál es la corriente de línea total I_L cuando el interruptor está abierto?
e) ¿Cuánta potencia real, reactiva y aparente suministra el generador cuando el interruptor está cerrado?
f) ¿Cuál es la corriente de línea total I_L cuando el interruptor está cerrado?
g) ¿Cómo es la corriente de línea total I_L en comparación con la suma de las tres corrientes individuales $I_1 + I_2 + I_3$? Si no son iguales, explique por qué.

A-4. Pruebe que el voltaje de línea de un generador conectado en Y con una secuencia de fase *acb* está 30° en retraso con respecto al voltaje de fase. Dibuje un diagrama fasorial que muestre los voltajes de fase y de línea del generador.

A-5. Encuentre las magnitudes y ángulos de cada línea y la corriente y el voltaje de fase en la carga que se observa en la figura PA-3.

A-6. La figura PA-4 muestra el diagrama de una línea de un sistema de distribución pequeño de 480 V en una planta industrial. Uno de los ingenieros que trabajan en la planta quiere calcular la corriente que se tomará de la compañía de luz con y sin el banco de capacitores conectados al sistema. Para realizar el cálculo, el ingeniero supondrá que las líneas del sistema no tienen impedancia.

a) Si el interruptor que se muestra está abierto, encuentre las potencias real, reactiva y aparente del sistema. Encuentre la corriente total que suministra la compañía de luz al sistema de distribución.
b) Repita el inciso *a*) con el interruptor cerrado.
c) ¿Qué pasa con la corriente total que suministra el sistema de potencia cuando se cierra el interruptor? ¿Por qué?

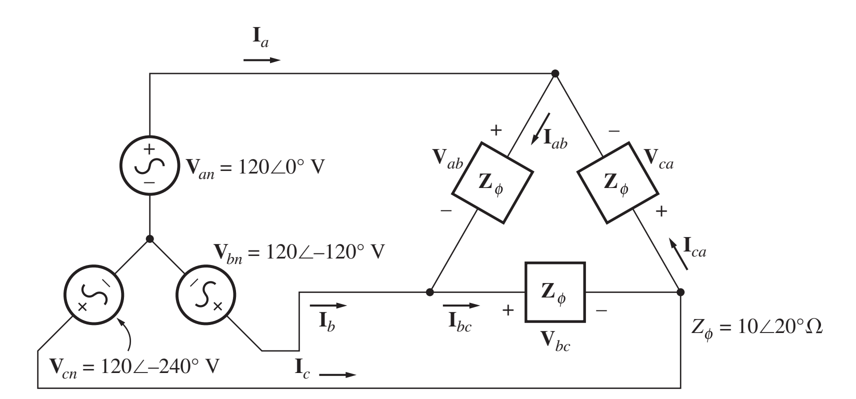


FIGURA PA-3 Sistema del problema A-5.

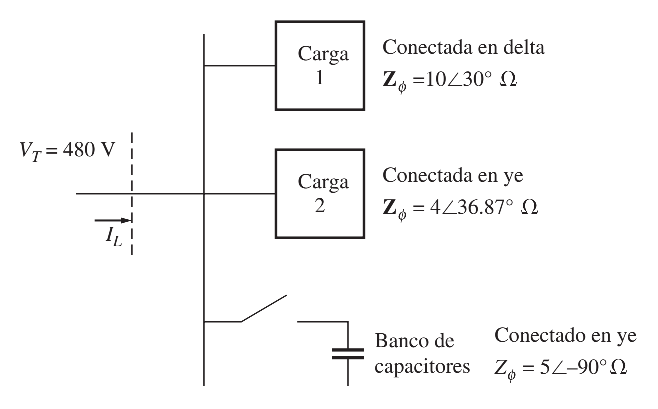


FIGURA PA-4 Sistema del problema A-6

BIBLIOGRAFÍA

1. Alexander, Charles K. y Mathew N.O. Sadiku, *Fundamentals of Electric Circuits*, McGraw-Hill, 2000.

APÉNDICE B Paso de bobina y devanados distribuidos

Como se mencionó en el capítulo 3, el voltaje inducido en una máquina de ca es sinusoidal sólo si se suprimen los componentes armónicos de la densidad de flujo del entrehierro. Este apéndice describe dos técnicas utilizadas por los diseñadores de maquinaria para suprimir los armónicos en las máquinas.

B.1 EFECTO DEL PASO DE BOBINA EN LAS MÁQUINAS DE CA

En la máquina de ca de diseño sencillo de la sección 3.4 los voltajes de salida de las bobinas del estator eran sinusoidales porque la distribución de la densidad de flujo del entrehierro también lo era. Si la distribución de la densidad de flujo del entrehierro no fuera sinusoidal, entonces los voltajes de salida del estator tampoco lo serían, tendrían la misma forma no sinusoidal que la distribución de densidad de flujo.

En general, la distribución de densidad de flujo del entrehierro en una máquina de ca no será sinusoidal. Los diseñadores de máquinas hacen todo lo que está a su alcance para producir distribuciones de flujo sinusoidales, pero no se ha podido llegar a un diseño perfecto. La distribución de flujo real consistirá en un componente sinusoidal fundamental más los armónicos. Estos componentes armónicos del flujo generarán componentes armónicos en los voltajes y en las corrientes del estator.

En realidad los componentes armónicos en los voltajes y corrientes del estator son indeseables, por lo que se han desarrollado técnicas para suprimidos en los voltajes y corrientes de salida de la máquina. La utilización de *devanados de paso fraccionado* es una técnica importante de supresión de armónicos.

Paso de una bobina

El *paso polar* es la distancia angular entre dos polos adyacentes en una máquina. El paso polar de una máquina en *grados eléctricos* es

$$\rho_p = \frac{360°}{P} \tag{B-1}$$

donde ρ_p es el paso polar en *grados mecánicos* y P es el número de polos en la máquina. Sin importar el número de polos en la máquina, el paso polar siempre es de 180 *grados eléctricos* (véase la figura B-1).

Si la bobina del estator pasa a través del mismo ángulo que el paso polar, se llama *bobina de paso completo*. Si la bobina del estator pasa a través de un ángulo menor que el paso polar, se llama *bobina de paso fraccionado*. El paso de una bobina de paso fraccionado a menudo se expresa como una fracción que indica la porción del paso polar que abarca. Por ejemplo, una bobina de

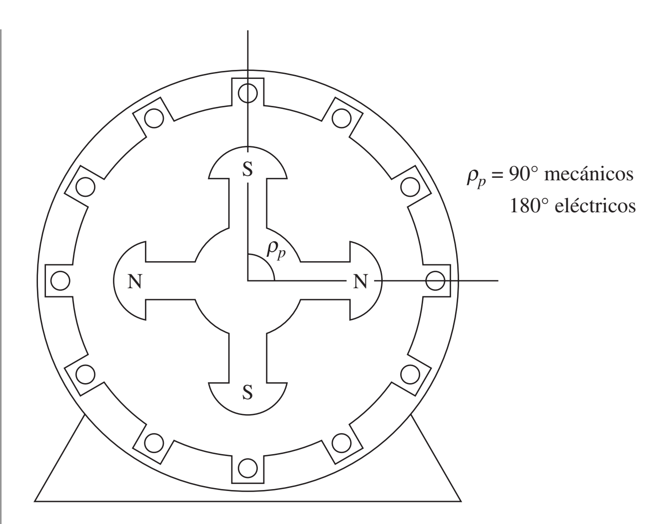


FIGURA B-1 El paso polar de una máquina de cuatro polos es de 90 grados mecánicos o de 180 eléctricos.

paso de 5/6 abarca cinco sextos de la distancia entre dos polos adyacentes. De manera alternativa, el paso de una bobina de paso fraccionado en grados eléctricos está dado por la ecuación (B-2):

$$\rho = \frac{\theta_m}{\rho_p} \times 180° \tag{B-2a}$$

donde θ_m es el ángulo mecánico que recorre la bobina en grados y ρ_p es el paso polar de la máquina en grados mecánicos, o

$$\rho = \frac{\theta_m P}{2} \times 180° \tag{B-2b}$$

donde θ_m es el ángulo mecánico que recorre la bobina en grados y P es el número de polos en la máquina. La mayoría de las bobinas prácticas del estator tienen un paso fraccionado, puesto que un devanado de paso fraccionado aporta ciertos beneficios importantes que se explicarán más adelante. Los devanados que usan bobinas de paso fraccionado se conocen como *devanados de cuerdas*.

El voltaje inducido de una bobina de paso fraccionado

¿Cuál es el efecto que tiene el paso fraccionado en el voltaje de salida de una bobina? Para encontrar la respuesta a esta pregunta, examínese una máquina simple con dos polos con el devanado de paso fraccionado que se muestra en la figura B-2. El paso polar de la máquina es de 180° y el paso de bobina es de ρ. El voltaje inducido por el campo magnético giratorio en la bobina se puede encontrar exactamente de la misma manera que en la sección anterior, por medio de la determinación de los voltajes en cada lado de la bobina. El voltaje total será igual a la suma de los voltajes en los lados individuales.

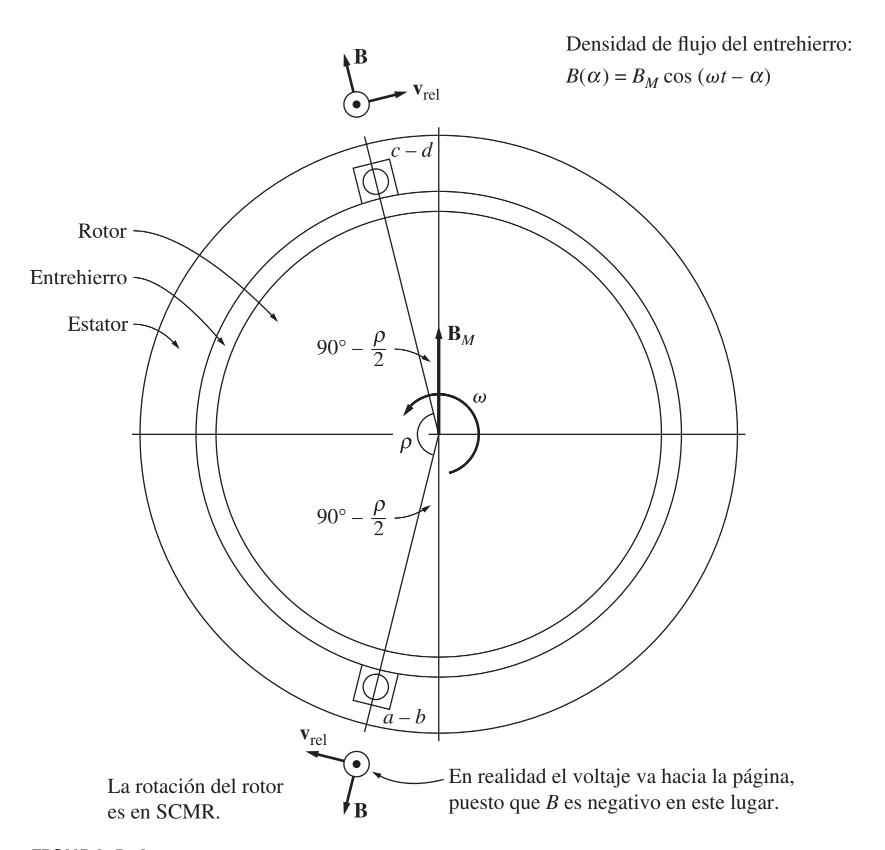


FIGURA B-2 Devanado de paso fraccionado de paso ρ. Las densidades y velocidades de flujo magnético vectoriales en los lados de la bobina. Las velocidades tienen un marco de referencia en donde el campo magnético es estacionario.

Al igual que en el caso anterior, suponga que la magnitud del vector de densidad de flujo **B** en el entrehierro entre el rotor y el estator varía sinusoidalmente con el ángulo mecánico, mientras que la dirección de **B** siempre es radialmente hacia afuera. Si α es el ángulo medido a partir de la dirección de la densidad de flujo máxima del rotor, entonces la magnitud del vector de densidad de flujo **B** en cualquier punto alrededor del rotor está dada por

$$B = B_M \cos \alpha \tag{B-3a}$$

Puesto que el rotor gira dentro del estator a una velocidad angular de ω_m, la magnitud del vector de densidad de flujo **B** a cualquier ángulo α alrededor del *estator* está dada por

$$B = B_M \cos (\omega t - \alpha) \tag{B-3b}$$

La ecuación del voltaje inducido en un alambre es

$$e_{\text{ind}} = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{l} \tag{1-45}$$

donde

v = velocidad del alambre en relación con el campo magnético
B = vector de densidad del flujo magnético
l = longitud del conductor en el campo magnético

Esta ecuación sólo se puede utilizar en un marco de referencia donde el campo magnético parezca estacionario. Si usted "se sienta en el campo magnético" de tal manera que éste parezca estacionario, observará que los lados de la bobina tienen una velocidad aparente $\mathbf{v}_{\text{rel}}$ y se puede aplicar la ecuación. La figura B-2 muestra el campo magnético y velocidades vectoriales desde el punto de vista de un campo magnético estacionario y un alambre en movimiento.

1. *Segmento ab*. En el segmento *ab* de la bobina de paso fraccionado, $\alpha = 90° + \rho/2$. Si se supone que **B** tiene una dirección radial hacia afuera del rotor, el ángulo entre **v** y **B** en el segmento *ab* es de 90°, mientras que la cantidad **v** × **B** tiene la misma dirección que **l**, por lo que

$$\begin{aligned} e_{ba} &= (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{l} \\ &= vBl \quad \text{dirigido hacia fuera de la página} \\ &= -vB_M \cos \left[\omega_m t - \left(90° + \frac{\rho}{2}\right)\right] l \\ &= -vB_M l \cos \left(\omega_m t - 90° - \frac{\rho}{2}\right) \end{aligned} \tag{B-4}$$

donde el signo negativo se debe al hecho de que en realidad **B** apunta hacia adentro cuando se supuso que apuntaba hacia afuera.

2. *Segmento bc*. El voltaje en el segmento *bc* es cero, puesto que la cantidad vectorial **v** × **B** es perpendicular a **l**, por lo que

$$e_{cb} = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{l} = 0 \tag{B-5}$$

3. *Segmento cd*. En el segmento *cd* el ángulo $\alpha = 90° - \rho/2$. Si se supone que **B** tiene una dirección radial hacia afuera del rotor, el ángulo entre **v** y **B** en el segmento *cd* es de 90°, mientras que la cantidad **v** × **B** tiene la misma dirección que **l**, por lo que

$$\begin{aligned} e_{dc} &= (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{l} \\ &= vBl \quad \text{dirigido hacia fuera de la página} \\ e_{ba} &= -vB_M \cos \left[\omega_m t - \left(90° - \frac{\rho}{2}\right)\right] l \\ &= -vB_M l \cos \left(\omega_m t - 90° + \frac{\rho}{2}\right) \end{aligned} \tag{B-6}$$

4. *Segmento da*. El voltaje en el segmento *da* es cero, puesto que la cantidad vectorial $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ es perpendicular a $\mathbf{l}$, por lo que

$$e_{ad} = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{l} = 0 \tag{B-7}$$

Por lo tanto, el voltaje total en la bobina será de

$$\begin{aligned} e_{\text{ind}} &= e_{ba} + e_{dc} \\ &= -vB_M l \cos\left(\omega_m t - 90° - \frac{\rho}{2}\right) + vB_M l \cos\left(\omega_m t - 90° + \frac{\rho}{2}\right) \end{aligned}$$

Con la ayuda de las identidades trigonométricas,

$$\cos\left(\omega_m t - 90° - \frac{\rho}{2}\right) = \cos(\omega_m t - 90°)\cos\frac{\rho}{2} + \operatorname{sen}(\omega_m t - 90°)\operatorname{sen}\frac{\rho}{2}$$

$$\cos\left(\omega_m t - 90° + \frac{\rho}{2}\right) = \cos(\omega_m t - 90°)\cos\frac{\rho}{2} - \operatorname{sen}(\omega_m t - 90°)\operatorname{sen}\frac{\rho}{2}$$

$$\operatorname{sen}(\omega_m t - 90°) = -\cos\omega_m t$$

Por lo tanto, el voltaje resultante total es de

$$\begin{aligned} e_{\text{ind}} &= vB_M l\left[-\cos(\omega_m t - 90°)\cos\frac{\rho}{2} - \operatorname{sen}(\omega_m t - 90°)\operatorname{sen}\frac{\rho}{2}\right. \\ &\qquad \left. + \cos(\omega_m t - 90°)\cos\frac{\rho}{2} - \operatorname{sen}(\omega_m t - 90°)\operatorname{sen}\frac{\rho}{2}\right] \\ &= -2vB_M l \operatorname{sen}\frac{\rho}{2}\operatorname{sen}(\omega_m t - 90°) \\ &= 2vB_M l \operatorname{sen}\frac{\rho}{2}\cos\omega_m t \end{aligned}$$

Puesto que $2vB_M l$ es igual a $\phi\omega_m$, la expresión final del voltaje en una sola vuelta es

$$e_{\text{ind}} = \phi\omega \operatorname{sen}\frac{\rho}{2}\cos\omega_m t \tag{B-8}$$

El anterior es el mismo valor que el del voltaje en un devanado de paso completo, excepto por el término sen $\rho/2$. Se acostumbra definir este término como el *factor de paso* k_p de la bobina. El factor de paso de una bobina está dado por

$$k_p = \operatorname{sen}\frac{\rho}{2} \tag{B-9}$$

En términos de factor de paso, el voltaje inducido en una bobina de una sola vuelta es de

$$e_{\text{ind}} = k_p \phi\omega_m \cos\omega_m t \tag{B-10}$$

Entonces, el voltaje total en una bobina de paso fraccionado de N vueltas es

$$e_{\text{ind}} = N_C k_p \phi\omega_m \cos\omega_m t \tag{B-11}$$

y su voltaje máximo es de

$$E_{\text{máx}} = N_C k_p \phi\omega_m \tag{B-12}$$

$$= 2\pi N_C k_p \phi f \tag{B-13}$$

Por lo tanto, el voltaje rms de cualquier fase del estator trifásico es

$$E_A = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} N_C k_p \phi f \tag{B-14}$$

$$= \sqrt{2}\pi N_C k_p \phi f \tag{B-15}$$

Nótese que para una bobina de paso completo, $\rho = 180°$, y la ecuación (B-15) se reduce al mismo resultado que antes.

Para las máquinas con más de dos polos, la ecuación (B-9) da el factor de paso si el paso de la bobina ρ está en grados eléctricos. Si el paso de la bobina está en grados mecánicos, entonces el factor de paso está dado por

$$k_p = \operatorname{sen} \frac{\theta_m P}{2} \tag{B-16}$$

Problemas con los armónicos y los devanados de paso fraccionado

Hay una muy buena razón para utilizar los devanados de paso fraccionado. Tiene que ver con el efecto de la distribución de densidad de flujo no sinusoidal en las máquinas reales. Este problema se puede entender si se examina la máquina que se muestra en la figura B-3. Ésta ilustra una máquina síncrona con polos salientes cuyo rotor "barre" a través de la superficie del estator. Puesto que la reluctancia del camino del campo magnético es *mucho menor* directamente debajo del centro del rotor que en su orilla (un entrehierro menor), el flujo se concentra fuertemente en ese punto y la densidad de flujo es muy alta allí. En la figura B-3 se puede observar el voltaje inducido resultante en los devanados. *Nótese que no es sinusoidal; contiene muchos componentes de frecuencia armónicos*.

Puesto que las ondas de voltaje resultante son simétricas en el centro del flujo del rotor, no hay *armónicos uniformes* presentes en el voltaje de fase. Sin embargo, los armónicos nones (tercero, quinto, séptimo, noveno, etc.) *están* presentes en el voltaje de fase hasta cierto punto y se deben tomar en cuenta en el diseño de máquinas de ca. En general, mientras más alto sea el número del componente de frecuencia armónico, menor será su magnitud en el voltaje de salida de fase; por lo que a partir de cierto punto (por arriba del noveno armónico) se pueden despreciar los efectos de armónicos más altos.

Cuando las tres fases están conectadas en Y o en Δ, desaparecen algunos de los armónicos de la salida de la máquina como resultado de la conexión trifásica. El componente del tercer armónico es uno de ellos. Si los voltajes fundamentales de cada una de las tres fases están dados por

$$e_a(t) = E_{M1} \operatorname{sen} \omega t \qquad \text{V} \tag{B-17a}$$

$$e_b(t) = E_{M1} \operatorname{sen} (\omega t - 120°) \qquad \text{V} \tag{B-17b}$$

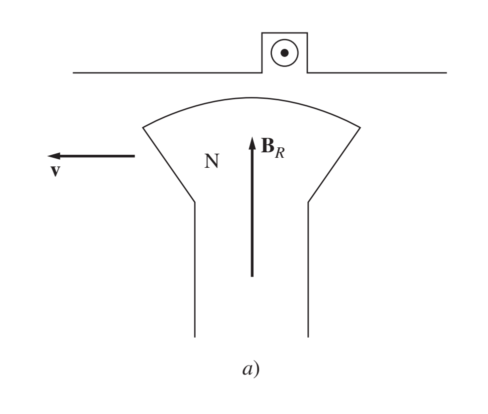
$$e_c(t) = E_{M1} \operatorname{sen} (\omega t - 240°) \qquad \text{V} \tag{B-17c}$$

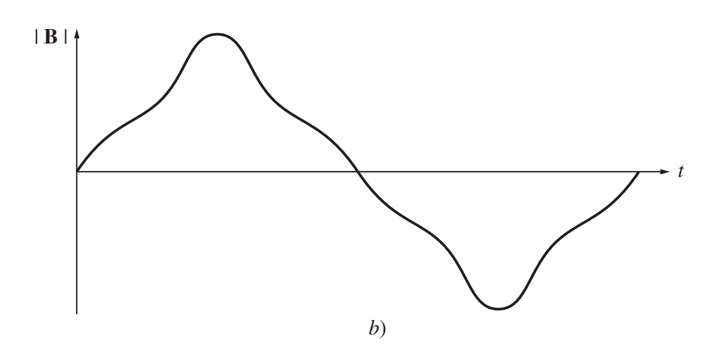
entonces los componentes del tercer armónico de voltaje estarán dados por

$$e_{a3}(t) = E_{M3} \operatorname{sen} 3\omega t \qquad \text{V} \tag{B-18a}$$

$$e_{b3}(t) = E_{M3} \operatorname{sen} (3\omega t - 360°) \qquad \text{V} \tag{B-18b}$$

$$e_{c3}(t) = E_{M3} \operatorname{sen} (3\omega t - 720°) \qquad \text{V} \tag{B-18c}$$





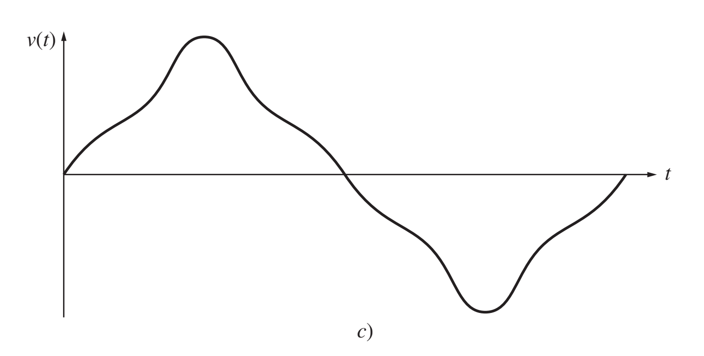


FIGURA B-3 *a*) Rotor ferromagnético que barre un conductor del estator. *b*) Distribución de densidad de flujo del campo magnético en función del tiempo en un punto sobre la superficie del estator. *c*) Voltaje inducido resultante en el conductor. Nótese que el voltaje es directamente proporcional a la densidad del flujo magnético en cualquier momento dado.

Nótese que los *componentes del tercer armónico del voltaje son idénticos* en cada fase. Si una máquina síncrona está conectada en Y, entonces el voltaje del tercer armónico *entre dos terminales cualesquiera* será cero (incluso si hay un gran componente del tercer armónico de voltaje en cada fase). Si la máquina está conectada en Δ, entonces los tres componentes del tercer armónico se suman y llevan una corriente del tercer armónico alrededor del interior del devanado Δ de la máquina. Puesto que los voltajes del tercer armónico caen a través de las impedancias internas de la máquina, tampoco hay un componente del tercer armónico de voltaje significativo en las terminales.

Este resultado se aplica no sólo a los componentes del tercer armónico, sino también a cualquier *múltiplo* de un componente del tercer armónico (como el noveno armónico). Estas frecuencias de armónicos especiales se llaman *armónicos triple n* y se suprimen automáticamente en las máquinas trifásicas.

Las frecuencias de armónicos que quedan son la quinta, la séptima, la onceava, la treceava, etc. Puesto que la fuerza de los componentes armónicos de voltaje disminuye con el incremento de la frecuencia, la mayoría de la distorsión real en la salida sinusoidal de una máquina síncrona es provocada por las frecuencias de los armónicos quinto y séptimo, que a veces se llaman *armónicos de grupo*. Si se puede encontrar una manera de reducir estos componentes, entonces el voltaje de salida de la máquina será un sinusoidal puro en la frecuencia fundamental (50 o 60 Hz).

¿Cómo se puede eliminar una parte del contenido armónico del voltaje de las terminales del devanado?

Una manera es diseñar el rotar para distribuir el flujo en una forma aproximadamente sinusoidal. A pesar de que esta acción ayudará a reducir el contenido armónico del voltaje de salida, puede en realidad hacer poco por lograrlo. Otro paso adicional que se utiliza es diseñar la máquina con devanados de paso fraccionado.

La clave del efecto de los devanados de paso fraccionado en el voltaje producido en el estator de una máquina es que el ángulo eléctrico del *n*-ésimo armónico es *n* veces el ángulo eléctrico del componente de la frecuencia fundamental. En otras palabras, si una bobina abarca 150 grados eléctricos en su frecuencia fundamental, abarcará 300 grados eléctricos en la frecuencia del segundo armónico, 450 grados eléctricos en la frecuencia del tercer armónico, etc. Si ρ representa el ángulo eléctrico que describe una bobina en su frecuencia *fundamental* y v es el número de armónicos que se examinan, entonces la bobina abarcará $v\rho$ grados eléctricos en esa frecuencia de armónico. Por lo tanto, el factor de paso de la bobina en la frecuencia armónica se puede expresar como

$$k_p = \operatorname{sen}\frac{v\rho}{2} \tag{B-19}$$

La idea importante que se debe tomar en cuenta es que *el factor de paso de un devanado es diferente en cada frecuencia armónica*. Si se elige adecuadamente el paso de bobina es posible eliminar casi por completo los componentes de frecuencia de armónicos en la salida de la máquina. En el siguiente ejemplo se verá cómo se suprimen los armónicos.

EJEMPLO B-1

Un estator trifásico con dos polos tiene bobinas con un paso de 5/6. ¿Cuáles son los factores de paso de los armónicos presentes en las bobinas de la máquina? ¿Este paso ayuda a suprimir el contenido armónico del voltaje generado?

Solución

El paso polar de la máquina en grados mecánicos es

$$\rho_p = \frac{360°}{P} = 180° \qquad \textbf{(B-1)}$$

Por lo tanto, el ángulo de paso mecánico de estas bobinas es de cinco sextos de 180° o 150°. A partir de la ecuación (B-2), el paso resultante en grados eléctricos es

$$\rho = \frac{\theta_m}{\rho_p} \times 180° = \frac{150°}{180°} \times 180° = 150° \qquad \textbf{(B-2}\textbf{\textit{a}}\textbf{)}$$

El ángulo de paso mecánico es igual al ángulo de paso eléctrico únicamente porque se trata de una máquina de dos polos. Para cualquier otro número de polos no serían iguales.

Por lo tanto, los factores de paso de las frecuencias fundamentales y armónicos nones más altos (recuérdese que los armónicos pares se eliminaron) son

Fundamental: $k_p = \text{sen}\,\frac{150°}{2} = 0.966$

Tercer armónico: $k_p = \text{sen}\,\frac{3(150°)}{2} = -0.707$ (Éste es un armónico triple *n* que no está presente en la salida trifásica.)

Quinto armónico: $k_p = \text{sen}\,\frac{5(150°)}{2} = 0.259$

Séptimo armónico: $k_p = \text{sen}\,\frac{7(150°)}{2} = 0.259$

Noveno armónico: $k_p = \text{sen}\,\frac{9(150°)}{2} = -0.707$ (Éste es un armónico triple *n* que no está presente en la salida trifásica.)

Los componentes de armónicos tercero y noveno sólo se suprimen ligeramente con este paso de bobina, pero esto no es importante dado que de todos modos no aparecen en las terminales de la máquina. Entre los efectos de los armónicos triple *n* y los efectos del paso de bobina, *se suprimen los armónicos tercero, quinto, séptimo y noveno en la frecuencia fundamental*. Por lo tanto, la utilización de devanados de paso fraccionado reduce drásticamente el contenido armónico del voltaje de salida de la máquina y sólo provocan un pequeño incremento en su voltaje fundamental.

En la figura B-4 se muestra el voltaje en las terminales de una máquina síncrona tanto con devanados de paso fraccionado como con devanados con un paso $\rho = 150°$. Nótese que los devanados de paso fraccionado producen una mejora visible en la calidad de la onda.

Se debe tomar en cuenta que hay ciertos tipos de armónicos de altas frecuencias, llamados *armónicos de dientes* o *de ranura*, que no se pueden suprimir por medio de la variación del paso de las bobinas del estator. Estos armónicos de ranura se discutirán junto con los devanados distribuidos en la sección B.2.

B.2 DEVANADOS DISTRIBUIDOS EN LAS MÁQUINAS DE CA

En la sección anterior se supuso implícitamente que los devanados asociados con cada fase de una máquina de ca estaban concentrados en un solo par de ranuras en la superficie del estator. De hecho, los devanados asociados con cada fase casi siempre están distribuidos entre varios pares de ranuras adyacentes, puesto que es simplemente imposible poner todos los conductores en una sola ranura.

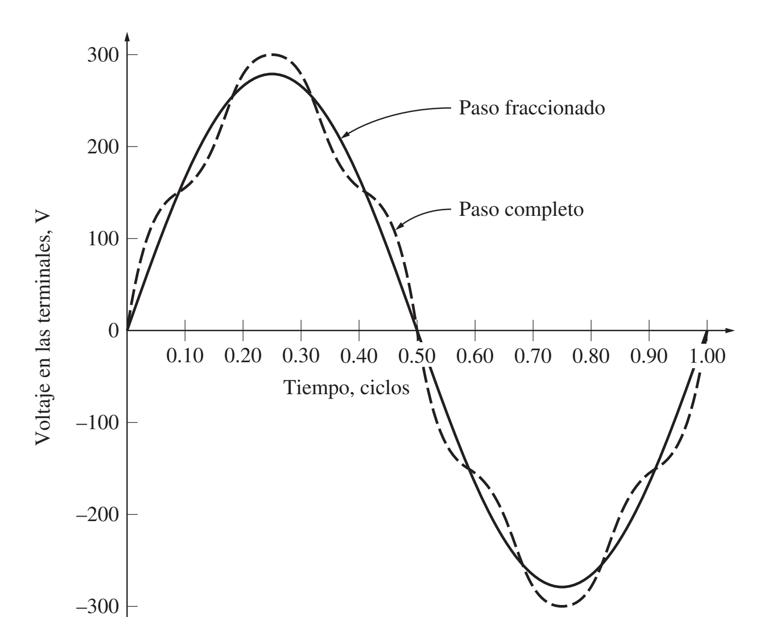


FIGURA B-4 Voltaje de línea que sale de un generador trifásico con devanados de paso completo y de paso fraccionado. A pesar de que el pico del voltaje del devanado de paso fraccionado es un poco menor que el del devanado de paso completo, su voltaje de salida es mucho más puro.

La construcción de los devanados del estator en las máquinas de ca reales es muy complicada. Los estatores de las máquinas de ca normales constan de varias bobinas en cada fase, distribuidas en ranuras alrededor de la superficie interior del estator. En las máquinas más grandes cada bobina es una unidad preformada que consta de un cierto número de vueltas, cada una aislada de las otras y del lado del estator en sí (véase la figura B-5). El voltaje en cualquiera de las vueltas sencillas de alambre es muy pequeño y sólo si se unen varias de estas vueltas en serie se pueden producir voltajes razonables. Por lo general, este gran número de vueltas está físicamente dividido entre varias bobinas que están ubicadas en ranuras espaciadas de manera uniforme a lo largo de la superficie del estator, como se muestra en la figura B-6.

El espaciado en grados entre las ranuras adyacentes de un estator se llama *paso de ranura* γ del estator. El paso de ranura se puede expresar en grados mecánicos o eléctricos.

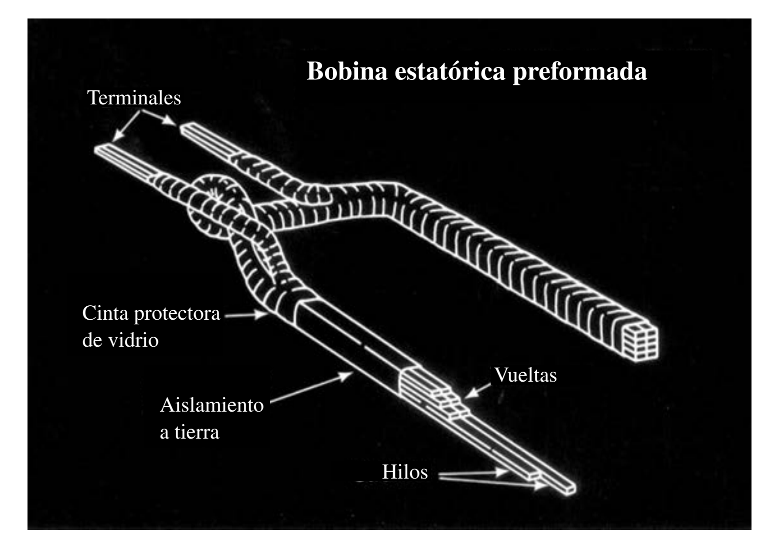
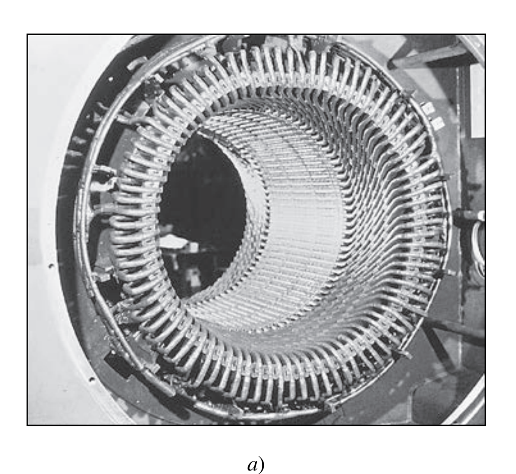
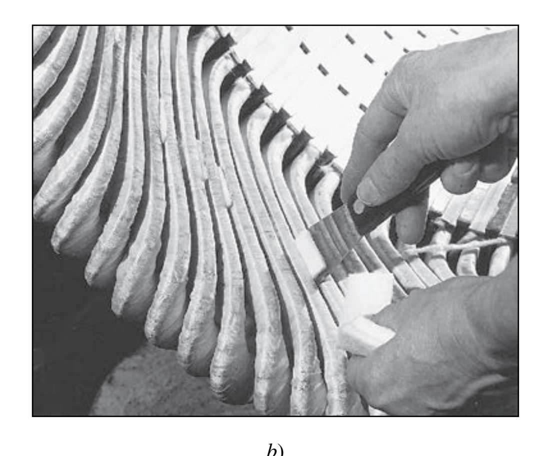


FIGURA B-5 La típica bobina estatórica preformada. (*Cortesía de General Electric Company*.)





a) *b*)

FIGURA B-6 *a*) Estator de máquina de ca con bobinas estatóricas preformadas. (*Cortesía de Westinghouse Electric Company*.) *b*) Vista en detalle de los extremos de la bobina en un estator. Nótese que un lado de la bobina estará más cerca de la orilla en su ranura y el otro lado estará más cerca del centro. Esta configuración permite que se utilice la misma forma de bobina estándar en cada ranura del estator. (*Cortesía de General Electric Company*.)

Excepto en máquinas muy pequeñas, por lo regular las bobinas del estator están formadas en *devanados de doble capa*, como se muestra en la figura B-7. Normalmente los devanados de doble capa son más fáciles de fabricar (menos ranuras para un número dado de bobinas) y las conexiones en los extremos son más sencillas que las de los devanados de una capa. Por lo tanto, son mucho menos caros de fabricar.

La figura B-7 muestra un devanado distribuido de paso completo para una máquina con dos polos. En este devanado hay cuatro bobinas asociadas con cada fase. Todos los lados de la bobina de una fase dada están localizados en ranuras adyacentes y se llaman *cinturón de fase* o *grupo de fase*. Nótese que hay seis cinturones de fase en este estator de dos polos. En general hay 3*P* grupos de fase en un estator con *P* polos, *P* en cada fase.

La figura B-8 muestra un devanado distribuido que utiliza bobinas de paso fraccionado. Nótese que este devanado aún tiene grupos de fase, pero que se pueden mezclar las fases de las bobinas dentro de una ranura individual. El paso de las bobinas es de 5/6 o de 150 grados eléctricos.

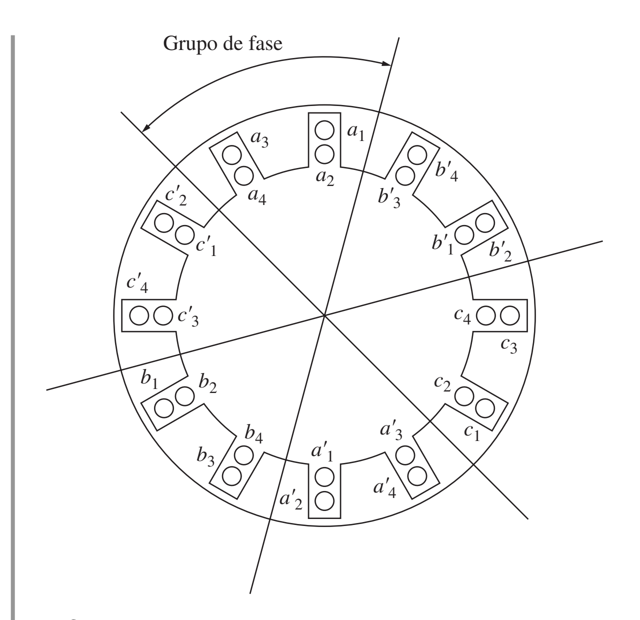


FIGURA B-7 Un devanado distribuido de paso completo de doble capa para una máquina de ca con dos polos.

Factor de amplitud o de distribución

Si se divide el número total requerido de vueltas en bobinas independientes, es posible lograr un uso más eficiente de la superficie interior del estator y se proporciona más fuerza estructural, puesto que las ranuras labradas en el marco del estator pueden ser más pequeñas. Sin embargo, el hecho de que las vueltas que componen una cierta fase estén en diferentes ángulos significa que sus voltajes serán un poco más pequeños de lo que se esperaría de otra manera.

Para entender este problema, examínese la máquina que se muestra en la figura B-9. Esta máquina tiene un devanado de una capa y el devanado del estator de cada fase (cada grupo de fase) está distribuido entre tres ranuras separadas por 20°.

Si la bobina central de la fase *a* tiene inicialmente un voltaje dado por

$$\mathbf{E}_{a2} = E \angle 0° \text{ V}$$

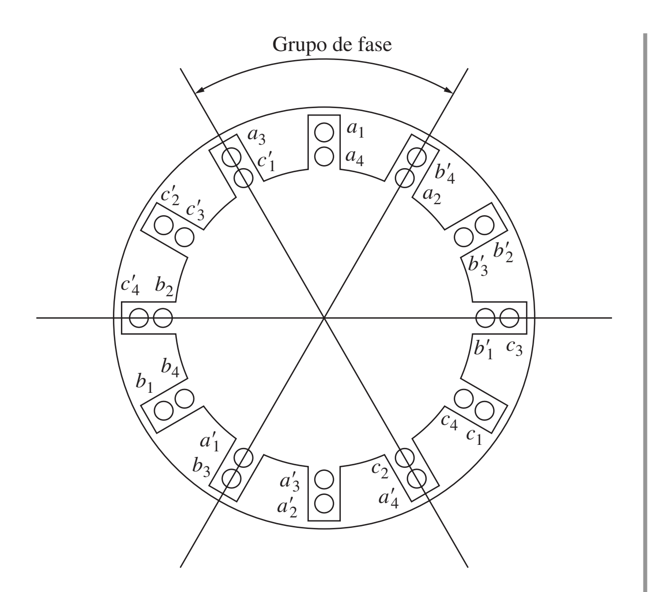


FIGURA B-8 Devanado de ca de paso fraccionado de doble capa para una máquina de ca con dos polos.

entonces los voltajes en las otras dos bobinas de la fase a serán

$$\mathbf{E}_{a1} = E \angle -20° \text{ V}$$
$$\mathbf{E}_{a3} = E \angle 20° \text{ V}$$

El voltaje total en la fase a está dado por

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_a &= \mathbf{E}_{a1} + \mathbf{E}_{a2} + \mathbf{E}_{a3} \\ &= E \angle -20° + E \angle 0° + E \angle 20° \\ &= E \cos(-20°) + jE \text{ sen } (-20°) + E + E \cos 20° + jE \text{ sen } 20° \\ &= E + 2E \cos 20° = 2.879\, E\end{aligned}$$

Este voltaje en la fase a no es exactamente la que se esperaría si las bobinas en una fase dada hubieran estado todas concentradas en la misma ranura. En ese caso, el voltaje E_a sería igual a $3E$ en lugar de $2.879E$. La relación entre el voltaje real en una fase del devanado distribuido y su valor esperado en un devanado concentrado con el mismo número de vueltas se llama *factor de amplitud* o *factor de distribución* del devanado. El factor de distribución se define como

$$k_d = \frac{V_\phi \text{ real}}{V_\phi \text{ esperado sin distribución}} \tag{B-20}$$

Entonces, el factor de distribución de la máquina de la figura B-9 es

$$k_d = \frac{2.879E}{3E} = 0.960 \tag{B-21}$$

El factor de distribución es una manera conveniente de resumir la disminución del voltaje provocada por la distribución espacial de las bobinas en un devanado del estator.

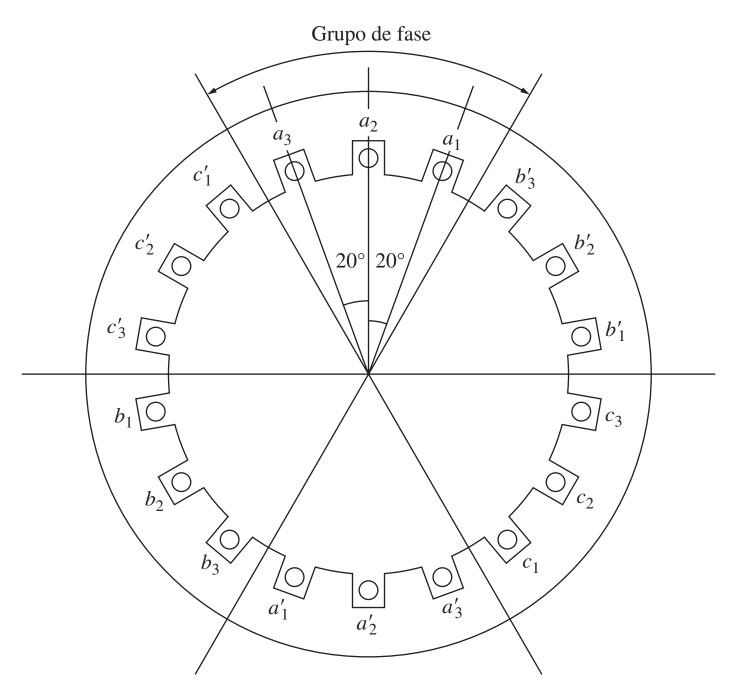


FIGURA B-9 Estator de dos polos con un devanado de una capa que consta de tres bobinas por fase, cada una separada por 20°.

Se puede mostrar (véase al final del apéndice la fuente registrada con el número 1) que en un devanado con n ranuras por grupo de fase espaciadas por γ grados, el factor de distribución está dado por

$$k_d = \frac{\text{sen}\,(n\gamma/2)}{n\,\text{sen}\,(\gamma/2)} \tag{B-22}$$

Nótese que en el ejemplo anterior con $n = 3$ y $\gamma = 20°$, el factor de distribución es

$$k_d = \frac{\text{sen}\,(n\gamma/2)}{n\,\text{sen}\,(\gamma/2)} = \frac{\text{sen}[(3)(20°)/2]}{3\,\text{sen}(20°/2)} = 0.960 \tag{B-22}$$

que es el mismo resultado que se obtuvo antes.

Voltaje generado que incluye los efectos de distribución

Ya se determinó que el voltaje rms en una sola bobina de N_C vueltas y un factor de paso de k_p es

$$E_A = \sqrt{2}\pi N_C k_p \phi f \tag{B-15}$$

Si la fase del estator consta de i bobinas, cada una con N_C vueltas, entonces habrá un total de $N_P = iN_C$ vueltas en la fase. El voltaje presente a través de la fase será igual al voltaje debido a N_P vueltas presentes en la misma ranura multiplicadas por la reducción provocada por el factor de distribución, por lo que el voltaje de fase total será

$$E_A = \sqrt{2}\pi N_P k_p k_d \phi f \tag{B-23}$$

El factor de paso y el factor de distribución de un devanado a veces se combinan en un solo *factor de devanado* k_w, para facilitar su uso. El factor de devanado de un estator está dado por

$$k_w = k_p k_d \tag{B-24}$$

Si se aplica esta definición a la ecuación del voltaje en una fase se tiene

$$E_A = \sqrt{2}\pi N_P k_w \phi f \tag{B-25}$$

EJEMPLO 8-2

El estator de una máquina síncrona simple con dos polos, trifásica, conectada en Y, se utiliza para hacer un generador. Tiene una construcción de bobina de doble capa, con cuatro bobinas del estator por fase distribuidas como se observa en la figura B-8. Cada bobina consta de 10 vueltas. Los devanados tienen un paso eléctrico de 150°, como se muestra en la figura. El rotor (y el campo magnético) gira a 3 000 r/min y el flujo por polo en la máquina es de 0.019 Wb.

a) ¿Cuál es el paso de ranura del estator en grados mecánicos? ¿Y en grados eléctricos?
b) ¿Cuántas ranuras abarcan las bobinas del estator?
c) ¿Cuál es la magnitud del voltaje de fase de una de las fases del estator de la máquina?
d) ¿Cuál es el voltaje en las terminales de la máquina?
e) ¿Cuánta supresión del componente del quinto armónico proporcionan los devanados de paso fraccionado del voltaje en relación con la disminución de su componente fundamental?

Solución

a) Este estator tiene seis cinturones de fase con dos ranuras por grupo de fase, por lo que tiene un total de 12 ranuras. Puesto que todo el estator abarca 360°, el paso del estator es

$$\gamma = \frac{360°}{12} = 30°$$

Éste es tanto el paso eléctrico como el mecánico, puesto que es una máquina con dos polos.

b) Debido a que hay 12 ranuras y dos polos en el estator, hay seis ranuras por polo. Un paso de bobina de 150 grados eléctricos es de 150°/180° = 5/6, por lo que las bobinas deben abarcar cinco ranuras del estator.

c) La frecuencia de la máquina es

$$f = \frac{n_m P}{120} = \frac{(3\,000 \text{ r/min})(2 \text{ polos})}{120} = 50 \text{ Hz}$$

De la ecuación (B-19) se sabe que el factor de paso para el componente fundamental del voltaje es

$$k_p = \text{sen}\,\frac{\nu\rho}{2} = \text{sen}\,\frac{(1)(150°)}{2} = 0.966 \qquad \textbf{(B-19)}$$

A pesar de que los devanados en un cierto grupo de fase están en tres ranuras, las dos ranuras en los extremos sólo tienen una bobina de la fase cada una. Por lo tanto, el devanado ocupa esencialmente dos ranuras completas. El factor de distribución del devanado es

$$k_d = \frac{\text{sen}\,(n\gamma/2)}{n\,\text{sen}\,(\gamma/2)} = \frac{\text{sen}[(2)(30°)/2]}{2\,\text{sen}\,(30°/2)} = 0.966 \qquad \textbf{(B-22)}$$

Por lo tanto, el voltaje en una sola fase del estator es

$$\begin{aligned} E_A &= \sqrt{2}\;\pi N_P k_p k_d \phi f \\ &= \sqrt{2}\;\pi(40 \text{ vueltas})(0.966)(0.966)(0.019 \text{ Wb})(50 \text{ Hz}) \\ &= 157 \text{ V} \end{aligned}$$

d) El voltaje en las terminales de la máquina es

$$V_T = \sqrt{3}E_A = \sqrt{3}(157 \text{ V}) = 272 \text{ V}$$

e) El factor de paso del componente del quinto armónico es

$$k_p = \text{sen}\,\frac{\nu\rho}{2} = \text{sen}\,\frac{(5)(150°)}{2} = 0.259 \qquad \textbf{(B-19)}$$

Puesto que el factor de paso del componente fundamental del voltaje es de 0.966 y el factor de paso del componente del quinto armónico del voltaje es 0.259, el componente fundamental disminuye 3.4%, mientras que el componente del quinto armónico disminuye en 74.1%. Por lo tanto, el componente del quinto armónico del voltaje disminuye en 70.7% más de lo que disminuye el componente fundamental.

Armónicos de diente o de ranura

Aun cuando los devanados distribuidos ofrecen ciertas ventajas en comparación con los devanados concentrados en términos de fortaleza del estator, utilización y facilidad de fabricación, el uso de devanados distribuidos presenta otro problema para el diseño de la máquina. La presencia de ranuras uniformes alrededor del interior del estator provoca variaciones regulares en la reluctancia y en el flujo en la superficie del estator. Estas variaciones regulares producen componentes de armónicos de voltaje llamados *armónicos de diente* o *de ranura* (véase la figura B-10). Los armónicos de ranura se presentan en frecuencias determinadas por el espaciado entre las ranuras adyacentes y están dados por

$$\nu_{\text{ran}} = \frac{2MS}{P} \pm 1 \qquad \textbf{(B-26)}$$

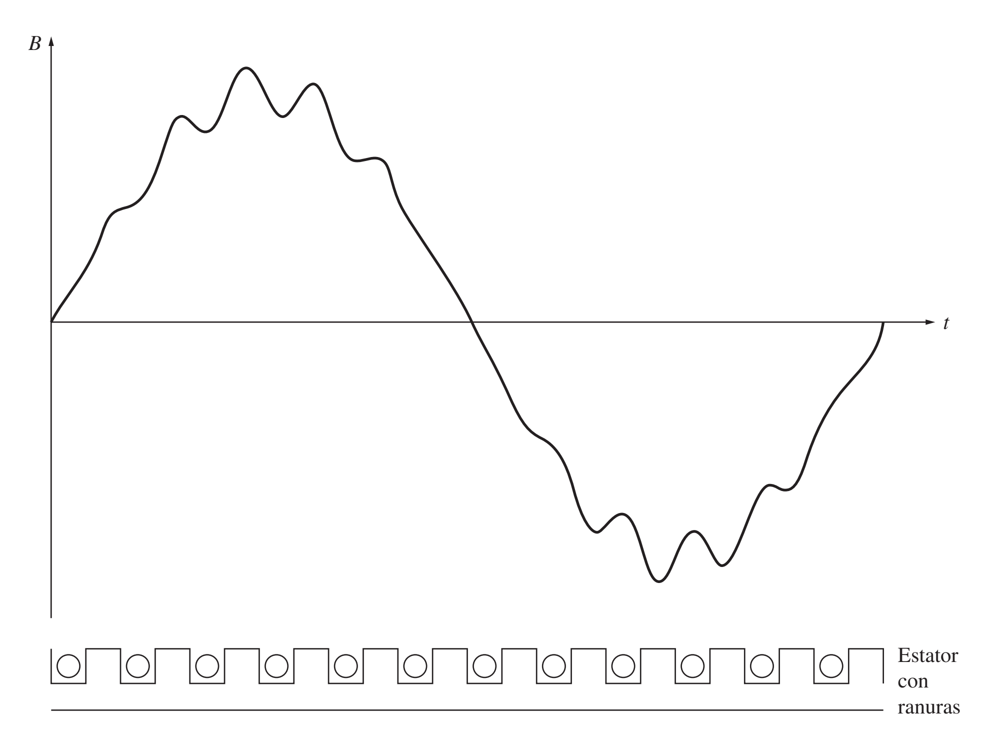


FIGURA B-10 Variaciones de densidad de flujo en el entrehierro debidas a los armónicos de diente o de ranura. La reluctancia de cada ranura es más alta que la reluctancia de la superficie del metal entre las ranuras, por lo que la densidad de flujo es menor directamente debajo de las ranuras.

donde

V_{ran} = número del componente armónico
S = número de ranuras en el estator
M = número entero
P = número de polos en la máquina

El valor $M = 1$ produce los armónicos de ranura de frecuencia más baja, que también son los que provocan más problemas.

Puesto que estos componentes armónicos los determina el espacio *entre las ranuras de bobinas adyacentes*, las variaciones en el paso de bobina y la distribución de bobina no pueden reducir estos efectos. Sin importar el paso de una bobina, *debe* comenzar y terminar en una ranura, por lo que el espaciado de la bobina es un entero múltiplo del espaciado básico que causa los armónicos de ranura en primera instancia.

Por ejemplo, considérese el estator de una máquina de ca con 72 ranuras con seis polos. En este tipo de máquina los dos armónicos del estator menores y más problemáticos son

$$v_{ran} = \frac{2MS}{P} \pm 1 \tag{B-26}$$

$$= \frac{2(1)(72)}{6} \pm 1 = 23, 25$$

Estos armónicos están a 1 380 y 1 500 Hz en una máquina de 60 Hz.

Los armónicos de ranura provocan varios problemas en las máquinas de ca:

1. Inducen los armónicos en el voltaje generado de los generadores de ca.
2. La interacción entre los armónicos de ranura del estator y del rotor produce pares parásitos en los motores de inducción. Estos pares pueden afectar seriamente la forma de la curva par-velocidad del motor.

3. Introducen vibración y ruido en la máquina.
4. Incrementan las pérdidas en el núcleo al introducir componentes de alta frecuencia de voltaje y corrientes en los dientes del estator.

Los armónicos de ranura son especialmente problemáticos en los motores de inducción, en los que pueden inducir armónicos de la misma frecuencia en el circuito de campo del rotor, lo que refuerza su efecto sobre el par de la máquina.

Hay dos técnicas comunes para reducir los armónicos de ranura. Éstas son los *devanados de paso fraccionado* y *los conductores de rotor sesgado*.

Los devanados de paso fraccionado involucran la utilización de un número fraccionado de ranuras por polo de rotor. Todos los ejemplos vistos de devanados han sido de ranura integral; es decir, tienen dos, tres, cuatro, o algún otro número entero de ranuras por polo. Por otro lado, se puede construir un estator con ranura fraccionada con 2½ ranuras por polo. El desplazamiento entre polos adyacentes que dan los devanados de ranura fraccionada ayuda a reducir tanto los armónicos de grupo de fase como los armónicos de ranura. Este método de reducción de armónicos se puede utilizar en cualquier tipo de máquina de ca. En las fuentes 1 y 2 de la bibliografía que viene al final de este apéndice se explican con detalle los armónicos de ranura fraccionada.

El otro método, mucho más común, para reducir los armónicos de ranura es *sesgar* los conductores del rotor de la máquina. Este método se utiliza principalmente en los motores de inducción. Se doblan ligeramente los conductores en el rotor del motor de inducción, de tal manera que cuando un extremo del conductor está bajo una ranura del estator, el otro extremo de la bobina está bajo una bobina vecina. En la figura B-11 se muestra este tipo de construcción de rotor. Puesto que un solo conductor de rotor está en dos ranuras de bobina al mismo tiempo (la distancia que corresponde a un ciclo eléctrico completo de la frecuencia de armónicos de ranura más baja), se cancelan los componentes de voltaje debido a las variaciones en el flujo de armónicos de ranura.

B.3 RESUMEN

En las máquinas reales las bobinas del estator a menudo son de paso fraccionado, lo que significa que no recorren la distancia que hay entre dos polos magnéticos. El tener un estator con devanados de paso fraccionado reduce ligeramente la magnitud del voltaje de salida, pero al mismo tiempo atenúa en forma drástica los componentes armónicos del voltaje, lo que provoca un voltaje de salida de la máquina mucho más uniforme. Un devanado del estator que utiliza bobinas de paso fraccionado se llama *devanado de cuerdas*.

Hay ciertos armónicos de altas frecuencias llamados armónicos de diente o de ranura que no se pueden suprimir con bobinas de paso fraccionado y son especialmente problemáticos en los motores de inducción. Se pueden reducir mediante la utilización de los devanados de ranura fraccionada o por medio de los conductores de rotor sesgado en los motores de inducción.

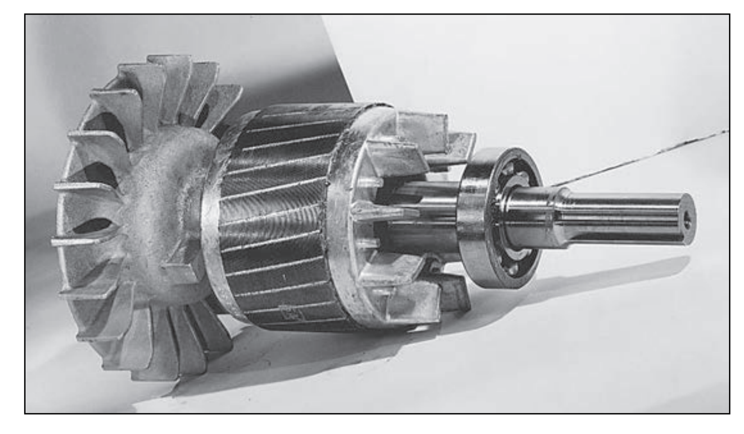


FIGURA B-11 Rotor del motor de inducción que muestra el sesgado del conductor. El sesgo de los conductores del rotor es igual a la distancia entre una ranura del estator y la siguiente. (*Cortesía de MagneTek, Inc.*)

Los estatores de las máquinas de ca reales simplemente no tienen una bobina para cada fase. Para obtener voltajes razonables de salida de una máquina se deben utilizar varias bobinas, cada una con una gran cantidad de vueltas. Este hecho requiere que los devanados se distribuyan dentro de un intervalo en la superficie del estator. Si se distribuyen los devanados del estator en una fase se reduce el posible voltaje de salida por un factor de distribución k_d, pero es físicamente más fácil poner más devanados en la máquina.

PREGUNTAS

B-l. ¿Por qué se usan devanados distribuidos en lugar de devanados concentrados en los estatores de las máquinas de ca?

B-2. *a*) ¿Qué es el factor de distribución de un devanado del estator? *b*) ¿Qué es el valor del factor de distribución en un devanado del estator concentrado?

B-3. ¿Qué son los devanados de cuerdas? ¿Por qué se utilizan en un devanado de estator de ca?

B-4. ¿Qué es paso polar? ¿Qué es el factor de paso? ¿Cómo se relacionan entre sí?

B-5. ¿Por qué los componentes del tercer armónico de voltaje no se encuentran en las salidas de las máquinas de ca trifásicas?

B-6. ¿Qué son los armónicos triple *n*?

B-7. ¿Qué son los armónicos de ranura? ¿Cómo se pueden disminuir?

B-8. ¿Cómo se puede hacer que la distribución (y flujo) de la fuerza magnetomotriz de una máquina de cd sea más sinusoidal?

PROBLEMAS

B-1. El inducido de un estator trifásico de dos ranuras está devanado para operar con dos polos. Si se utilizan devanados de paso fraccionado, ¿qué paso del devanado elegiría si desea eliminar el componente del quinto armónico de voltaje?

B-2. Deduzca la relación del factor de distribución del devanado k_d de la ecuación (8-22).

B-3. Una máquina síncrona trifásica con cuatro polos tiene 96 ranuras en el estator. Las ranuras contienen un devanado de doble capa (dos bobinas por ranura) con cuatro vueltas por bobina. El paso de bobina es de 19/24.

a) Encuentre el paso de ranura y de bobina en grados eléctricos.
b) Encuentre los factores de paso, de distribución y de devanado de la máquina.
c) ¿Qué tan bien suprime los armónicos tercero, quinto, séptimo, noveno y onceavo el devanado? Asegúrese de tomar en cuenta en su respuesta los efectos tanto del paso de bobina como de la distribución del devanado.

B-4. Se quiere instalar un devanado trifásico con cuatro polos y de dos capas en un estator con 48 ranuras. El paso del devanado del estator es de 5/6 y tiene 10 vueltas por bobina en los devanados. Todas las bobinas en cada fase están conectadas en serie y las tres fases están conectadas en Δ. El flujo por polo de la máquina es de 0.054 Wb y la velocidad de rotación del campo magnético es de 1 800 r/min.

a) ¿Cuál es el factor de paso del devanado?
b) ¿Cuál es el factor de distribución del devanado?
c) ¿Cuál es la frecuencia del voltaje producido en el devanado?
d) ¿Cuáles son los voltajes resultantes de fase y en las terminales del estator?

B-5. Un generador síncrono trifásico, conectado en Y, con seis polos, tiene seis ranuras por polo en su devanado del estator. El devanado en sí es de cuerdas (de paso fraccionado) de doble capa con ocho vueltas por bobina. El factor de distribución es k_d = 0.956 y el factor de paso es k_p = 0.981. El flujo en el generador es de 0.02 Wb por polo y la velocidad de rotación es de 1 200 r/min. ¿Cuál es el voltaje de línea producido por el generador en estas condiciones?

B-6. Una máquina síncrona trifásica, conectada en Y, a 50 Hz, con dos polos, tiene un estator con 18 ranuras. Las bobinas forman un devanado de cuerdas de doble capa (dos bobinas por ranura) y cada bobina tiene 60 vueltas. El paso de la bobina del estator es de 8/9.

a) ¿Cuánto flujo en el rotor se requeriría para producir un voltaje en las terminales (línea a línea) de 6 kV?
b) ¿Qué tan efectivas son las bobinas de este paso para reducir el componente del quinto armónico de voltaje? ¿Y el componente del séptimo armónico de voltaje?

B-7. ¿Qué paso de bobina utilizaría para eliminar por completo el componente del séptimo armónico de voltaje en el inducido (estator) de una máquina de ca? ¿Cuál es el número *mínimo* de ranuras requeridas en un devanado de ocho polos para obtener este paso exactamente? ¿Qué le haría este paso al componente del quinto armónico de voltaje?

B-8. Un generador síncrono trifásico de 13.8 kV, conectado en Y, a 60 Hz, con 12 polos, tiene 180 ranuras del estator con un devanado de doble capa y ocho vueltas por bobina. El paso de bobina del estator es de 12 ranuras. Los conductores de todos los cinturones (o grupos) de fase en cualquier fase están conectados en serie.

a) ¿Qué flujo por polo se requiere para obtener un voltaje en las terminales (de línea) en vacío de 13.8 kV?
b) ¿Cuál es el factor de devanado k_w de la máquina?

BIBLIOGRAFÍA

1. Fitzgerald. A.E. y Charles Kingsley, *Electric Machinery*, McGraw-Hill, Nueva York, 1952.
2. Liwschitz-Garik, Michael y Clyde Whipple, *Alternating-Current Machinery*, Princeton, N.J: Van Nostrand, 1961.
3. Werninck, E.H. (ed.), *Electric Motor Handbook*, McGraw-Hill, Londres, 1978.

APÉNDICE C Teoría de polos salientes de las máquinas síncronas

El circuito equivalente de un generador síncrono que se presentó en el capítulo 4 sólo es válido en el caso de máquinas que tienen rotores cilíndricos y no de aquellas con rotores de polos salientes. De la misma forma, la expresión de la relación entre el ángulo de par δ y la potencia que suministra el generador [ecuación (4-20)] sólo es válida para rotores cilíndricos. En el capítulo 4 se despreciaron los efectos que provocan las protuberancias de los rotores y se supuso que se podía utilizar la teoría cilíndrica simple. Esta suposición no está tan lejos de la realidad para el trabajo en estado estacionario, pero está a años luz de la realidad si se examina la conducta transitoria de generadores y motores.

El problema con el circuito equivalente simple de los motores de inducción es que desprecia los efectos del *par de reluctancia* en los generadores. Para entender la idea del par de reluctancia, véase la figura C-1. En ella se muestra un rotor de polos salientes sin devanados dentro de un estator trifásico. Si el campo magnético del estator se produce como se observa en la figura, inducirá un campo magnético en el rotor. Puesto que es *mucho* más fácil producir un flujo sobre el eje del rotor que producir un flujo que cruce este eje, el flujo inducido en el rotor se alineará con el eje del rotor. Puesto que hay un cierto ángulo entre el campo magnético del estator y el campo magnético del rotor, se inducirá un par en el rotor que tenderá a alinear el rotor con el campo del estator. La magnitud de este par es proporcional al seno de dos veces el ángulo entre los dos campos magnéticos (sen 2δ).

Puesto que la teoría del rotor cilíndrico de máquinas síncronas desprecia el hecho de que es más fácil establecer un campo magnético en ciertas direcciones que en otras (esto es, pasa por alto el efecto de los pares de reluctancia), es inexacta cuando se trata de rotores con polos salientes.

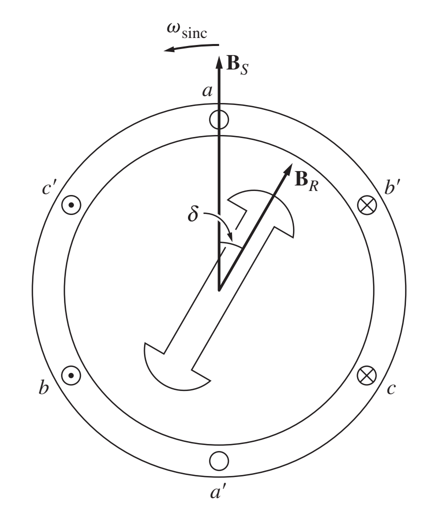


FIGURA C-1 Rotor de polos salientes que ilustra la idea del par de reluctancia. Se induce un campo magnético en el rotor por medio del campo magnético del estator y se produce un par en el rotor que es proporcional al seno de dos veces el ángulo entre los dos campos.

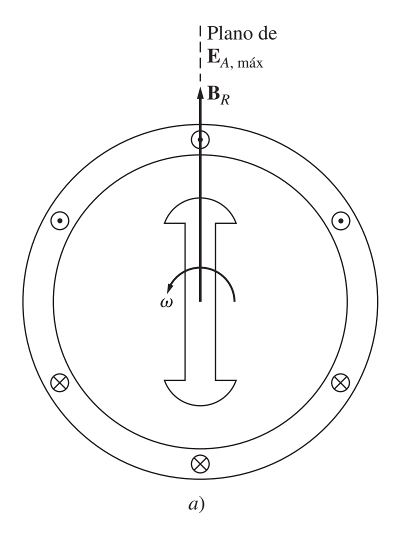
C.1 DESARROLLO DEL CIRCUITO EQUIVALENTE DE UN GENERADOR SÍNCRONO CON POLOS SALIENTES

Como en el caso de la teoría del rotor cilíndrico, hay cuatro elementos en el circuito equivalente de un generador síncrono:

1. Voltaje interno que produce el generador $\mathbf{E}_A$.
2. Reacción del inducido del generador síncrono.
3. Autoinductancia del devanado del estator.
4. Resistencia del devanado del estator.

El primero, tercero y cuarto elementos no cambian en la teoría de polos salientes de los generadores síncronos, pero se debe modificar el efecto de reacción del inducido para explicar el hecho de que es más fácil establecer un flujo en ciertas direcciones que en otras.

Esta modificación de los efectos de la reacción del inducido se logra de la siguiente manera. La figura C-2 muestra un rotor de polos salientes con dos polos que gira en sentido contrario al de las manecillas del reloj dentro de un estator de dos polos. El flujo del rotor se llama $\mathbf{B}_R$ y apunta hacia



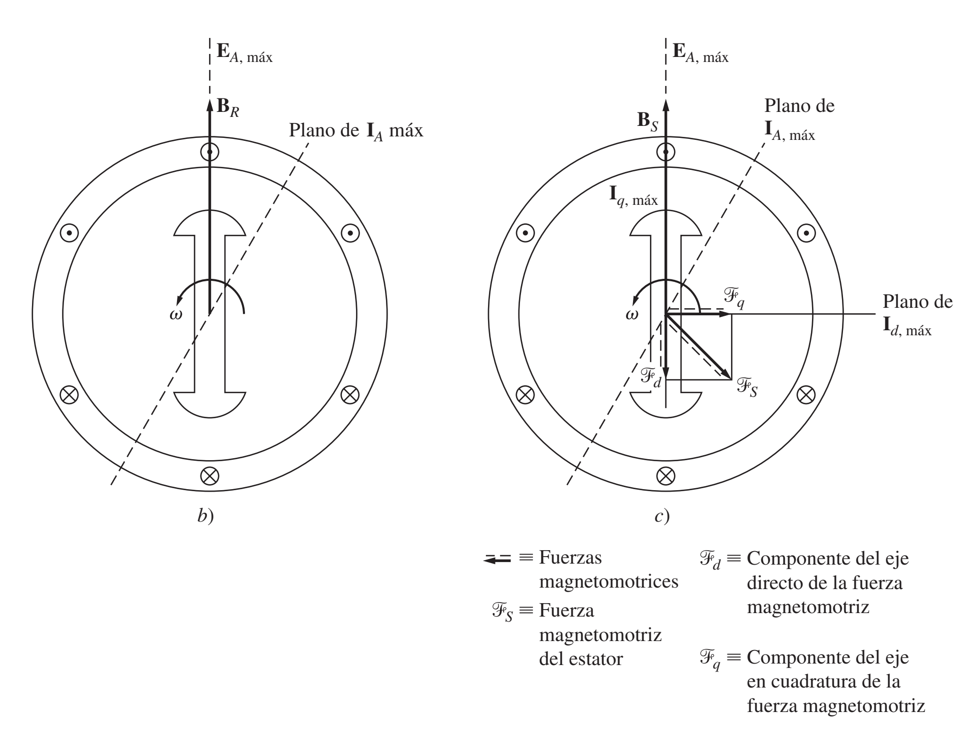


FIGURA C-2 Los efectos de la reacción del inducido en un generador síncrono de polos salientes. *a*) El campo magnético del rotor induce un voltaje en el estator, el cual llega a su máximo en los conductores que están directamente debajo de las caras polares. *b*) Si se conecta al generador una carga en retraso, fluirá una corriente del estator cuyo máximo se presenta con un ángulo por detrás de $\mathbf{E}_A$. *c*) Esta corriente del estator $\mathbf{I}_A$ produce en la máquina una fuerza magnetomotriz del estator.

arriba. Con base en la ecuación del voltaje inducido en un conductor en movimiento en la presencia de un campo magnético:

$$e_{\text{ind}} = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{l} \tag{1-45}$$

el voltaje en los conductores ubicados en la parte superior del estator será positivo con dirección hacia afuera de la página y el voltaje en los conductores en la parte inferior del estator tendrá una dirección hacia la página. El plano del voltaje inducido máximo estará directamente bajo el polo del rotor en todo momento.

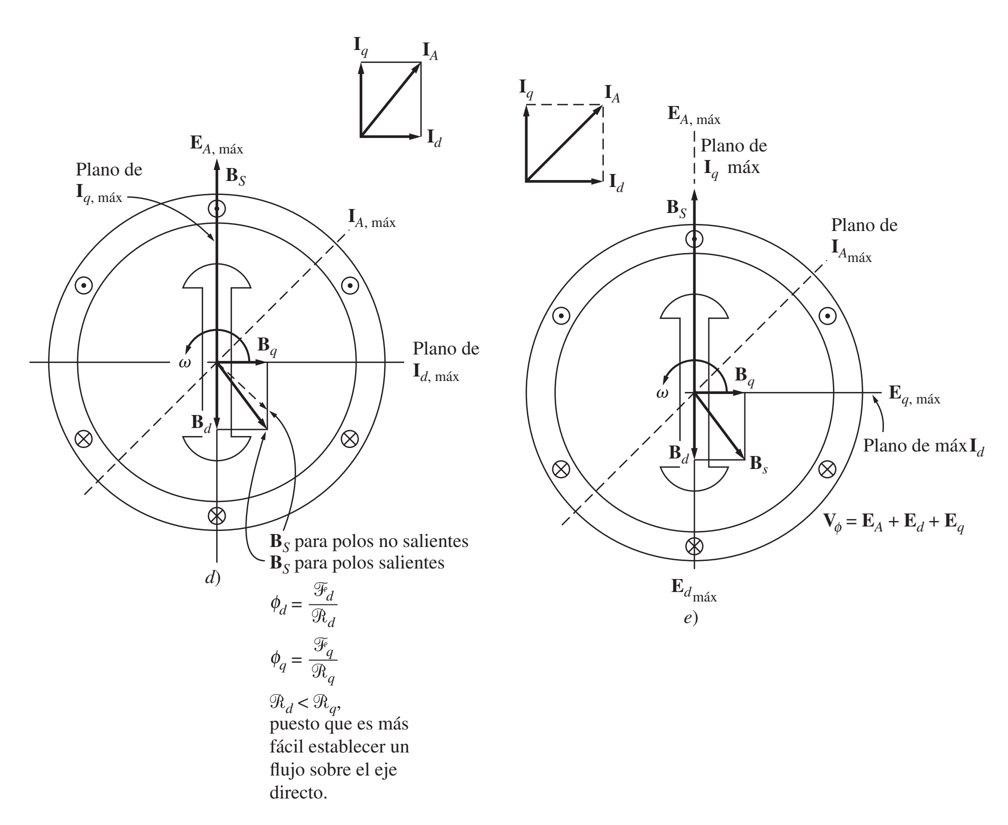


FIGURA C-2 (conclusión) *d*) La fuerza magnetomotriz del estator produce un flujo del estator $\mathbf{B}_S$. Sin embargo, el componente del eje directo de la fuerza magnetomotriz produce más flujo ampere-vuelta que el componente del eje en cuadratura, puesto que la reluctancia de la trayectoria del flujo del eje directo es menor que la reluctancia de la trayectoria del flujo del eje en cuadratura. *e*) Los flujos del estator del eje directo y del eje en cuadratura producen voltajes de reacción del inducido en el estator de la máquina.

Si ahora se conecta una carga en retraso a las terminales del generador, fluirá una corriente cuyo máximo estará retrasado en relación con el voltaje máximo. Esta corriente se muestra en la figura C-2*b*).

El flujo de corriente del estator produce una fuerza magnetomotriz que está retrasada 90° con respecto al plano de la corriente máxima del estator, tal como se muestra en la figura C-2*c*). En la teoría cilíndrica esta fuerza magnetomotriz produce un campo magnético del estator $\mathbf{B}_S$ que se alinea con la fuerza magnetomotriz del estator. Sin embargo, en realidad es más fácil producir un campo magnético en la dirección del rotor que uno en una dirección perpendicular al rotor. Por lo tanto, se separará la fuerza magnetomotriz del estator en sus componentes paralelos y perpendiculares al eje del rotor. Cada una de estas fuerzas magnetomotrices produce un campo magnético, pero se produce más flujo por ampere-vuelta sobre el eje que perpendicular a él (*en cuadratura con él*).

En la figura C-2*d*) se muestra el campo magnético del estator resultante comparado con el campo predicho por la teoría de rotor cilíndrico.

Ahora, cada componente del campo magnético del estator produce su propio voltaje en el devanado del estator debido a la reacción del inducido. Esos voltajes de reacción del inducido se muestran en la figura C-2*e*).

Entonces, el voltaje total en el estator es

$$\mathbf{V}_\phi = \mathbf{E}_A + \mathbf{E}_d + \mathbf{E}_q \tag{C-1}$$

donde $\mathbf{E}_d$ es el componente del eje directo del voltaje de reacción del inducido y $\mathbf{E}_q$ es el componente del eje en cuadratura del voltaje de reacción del inducido (véase la figura C-3). Al igual que en el caso de la teoría del rotor cilíndrico, cada voltaje de reacción del inducido es *directamente pro-*

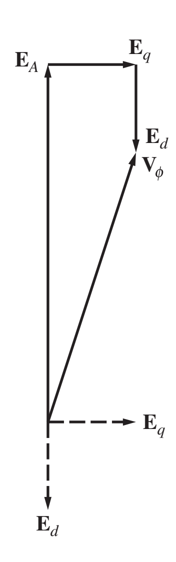


FIGURA C-3 El voltaje de fase del generador es igual a la suma de su voltaje interno generado más los voltajes de la reacción del inducido.

porcional a su corriente del estator y *está retrasado 90°* con respecto a ésta. Por lo tanto, se puede definir cada voltaje de reacción del inducido de la siguiente manera

$$\mathbf{E}_d = -jx_d\mathbf{I}_d \quad \textbf{(C-2)}$$

$$\mathbf{E}_q = -jx_q\mathbf{I}_q \quad \textbf{(C-3)}$$

y el voltaje total del estator es

$$\mathbf{V}_\phi = \mathbf{E}_A - jx_d\mathbf{I}_d - jx_q\mathbf{I}_q \quad \textbf{(C-4)}$$

Ahora se deben incluir la resistencia y la reactancia del inducido. Puesto que la autorreactancia del inducido X_A es independiente del ángulo del rotor, por lo general se añade a las reactancias de reacción del inducido directas y en cuadratura para producir la *reactancia síncrona directa* y la *reactancia síncrona en cuadratura* del generador:

$$X_d = x_d + X_A \quad \textbf{(C-5)}$$

$$X_q = x_q + X_A \quad \textbf{(C-6)}$$

La caída de voltaje por resistencia del inducido es igual a la resistencia del inducido multiplicada por la corriente del inducido $\mathbf{I}_A$.

Por lo tanto, la expresión final del voltaje de fase de un motor síncrono con polos salientes es

$$\mathbf{V}_\phi = \mathbf{E}_A - jX_d\mathbf{I}_d - jX_q\mathbf{I}_q - R_A\mathbf{I}_A \quad \textbf{(C-7)}$$

y el diagrama fasorial resultante se muestra en la figura C-4.

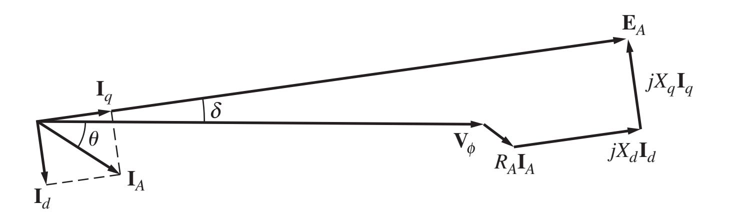


FIGURA C-4 Diagrama fasorial de un generador síncrono con polos salientes.

Nótese que este diagrama fasorial requiere que se separe la corriente del inducido en componentes que están en paralelo y en cuadratura con $\mathbf{E}_A$. Sin embargo, el *ángulo* entre $\mathbf{E}_A$ e $\mathbf{I}_A$ es $\delta + \theta$, que casi *nunca se conoce* hasta que se construye el diagrama. Normalmente sólo se conoce con anticipación el ángulo de factor de potencia θ.

Se puede construir un diagrama fasorial sin saber de antemano el ángulo δ, tal como se muestra en la figura C-5. Las líneas llenas de esta figura son las mismas que se observan en la figura C-4, mientras que las líneas de puntos presentan el diagrama fasorial como si la máquina tuviera un rotor cilíndrico con reactancia síncrona X_d.

Se puede encontrar el ángulo δ de $\mathbf{E}_A$ si se utiliza la información conocida en las terminales del generador. Nótese que el fasor $\mathbf{E}''_A$ que está dado por

$$\mathbf{E}''_A = \mathbf{V}_\phi + R_A\mathbf{I}_A + jX_q\mathbf{I}_A \quad \textbf{(C-8)}$$

es colineal al voltaje interno generado $\mathbf{E}_A$. Puesto que $\mathbf{E}''_A$ está determinado por la corriente en las terminales del generador, es posible encontrar el ángulo δ si se conoce la corriente del inducido. Una vez que se conoce el ángulo δ se puede dividir la corriente del inducido en sus componentes directos y en cuadratura y se puede determinar el voltaje interno generado.

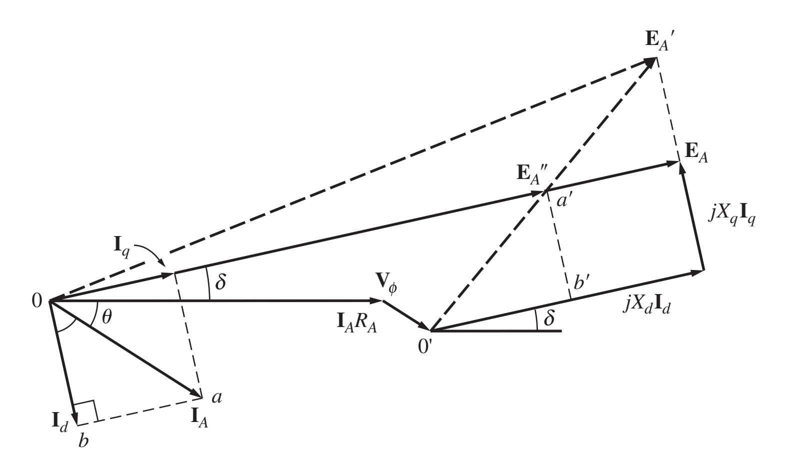


FIGURA C-5 Construcción de un diagrama fasorial sin conocimiento previo de δ. $\mathbf{E}_A''$ tiene el mismo ángulo que $\mathbf{E}_A$ y sólo se puede determinar $\mathbf{E}_A''$ con la información que se obtiene en las terminales del generador. Por lo tanto, es posible encontrar el ángulo δ y se puede dividir la corriente en los componentes *d* y *q*.

EJEMPLO C-1

Un generador síncrono de 480 V, 60 Hz, conectado en Δ, con cuatro polos, tiene una reactancia de eje directo de 0.1 Ω y una reactancia de eje en cuadratura de 0.075 Ω. Se puede despreciar la resistencia del inducido. A plena carga este generador suministra 1 200 A con un factor de potencia de 0.8 en retraso.

a) Encuentre el voltaje interno $\mathbf{E}_A$ que produce el generador a plena carga, suponiendo que tiene un rotor cilíndrico con una reactancia de X_d.

b) Encuentre el voltaje interno $\mathbf{E}_A$ que produce el generador a plena carga, suponiendo que tiene un rotor de polos salientes.

Solución

a) Puesto que el generador está conectado en Δ, la corriente del inducido a plena carga es

$$I_A = \frac{1\,200 \text{ A}}{\sqrt{3}} = 693 \text{ A}$$

El factor de potencia de la corriente es de 0.8 en retraso, por lo que el ángulo de impedancia θ de la carga es

$$\theta = \cos^{-1} 0.8 = 36.87°$$

Por lo tanto, el voltaje interno generado es

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_A &= \mathbf{V}_\phi + jX_S\mathbf{I}_A \\ &= 480 \angle 0° \text{ V} + j(0.1\ \Omega)(693 \angle -36.87° \text{ A}) \\ &= 480 \angle 0° + 69.3 \angle 53.13° = 524.5 \angle 6.1° \text{ V}\end{aligned}$$

Nótese que el ángulo de par δ es de 6.1°.

b) Suponga que el rotor es saliente. Para dividir la corriente en sus componentes de eje directo y de eje en cuadratura se requiere saber la *dirección* de $\mathbf{E}_A$. Esta dirección se puede determinar con la ecuación (C-8):

$$\mathbf{E}_A'' = \mathbf{V}_\phi + R_A\mathbf{I}_A + jX_q\mathbf{I}_A \tag{C-8}$$

$$\begin{aligned}&= 480\angle 0° \text{ V} + 0 \text{ V} + j(0.075\ \Omega)(693\angle -36.87° \text{ A}) \\ &= 480\angle 0° + 52\angle 53.13° = 513\angle 4.65° \text{ V}\end{aligned}$$

La dirección de $\mathbf{E}_A$ es $\delta = 4.65°$. Entonces, la magnitud del componente del eje directo de la corriente es

$$I_d = I_A \text{ sen } (\theta + \delta)$$
$$= (693 \text{ A}) \text{ sen } (36.87 + 4.65) = 459 \text{ A}$$

y la magnitud del componente del eje en cuadratura de la corriente es

$$I_q = I_A \cos (\theta + \delta)$$
$$= (693 \text{ A}) \cos (36.87 + 4.65) = 519 \text{ A}$$

Si se combinan las magnitudes y los ángulos se obtiene

$$\mathbf{I}_d = 459 \angle -85.35° \text{ A}$$
$$\mathbf{I}_q = 519 \angle 4.65° \text{ A}$$

El voltaje interno generado resultante es

$$\mathbf{E}_A = \mathbf{V}_\phi + R_A\mathbf{I}_A + jX_d\mathbf{I}_d + jX_q\mathbf{I}_q$$
$$= 480 \angle 0° \text{ V} + 0 \text{ V} + j(0.1\ \Omega)(459 \angle -85.35° \text{ A}) + j(0.075\ \Omega)(519 \angle 4.65° \text{ A})$$
$$= 524.3 \angle 4.65° \text{ V}$$

Nótese que la *magnitud de* $\mathbf{E}_A$ no se ve muy afectada por los polos salientes, pero el *ángulo* de $\mathbf{E}_A$ es considerablemente diferente con polos salientes que sin ellos.

C.2 ECUACIONES DE PAR Y DE POTENCIA DE LAS MÁQUINAS CON POLOS SALIENTES

La potencia de salida (o potencia convertida) de un generador síncrono con rotor cilíndrico en función del ángulo de par definida en el capítulo 4 es

$$P = \frac{3V_\phi E_A \text{ sen}\,\delta}{X_S} \qquad \textbf{(4-20)}$$

Esta ecuación supone que la resistencia del inducido es despreciable. De acuerdo con esta suposición, ¿cuál es la potencia de salida de un generador de polos salientes en función del ángulo de par? Para encontrar la respuesta a esta pregunta véase la figura C-6. La potencia de salida de un generador síncrono es igual a la suma de la potencia debida a la corriente del eje directo más la potencia debida a la corriente del eje en cuadratura:

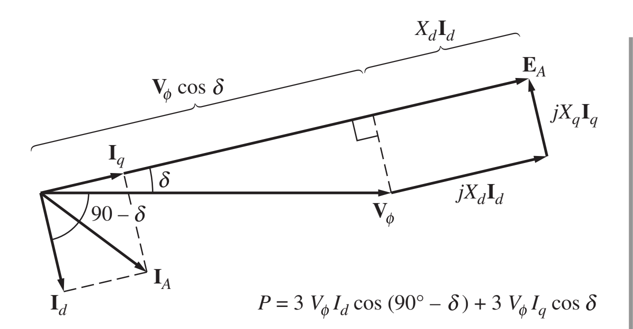


FIGURA C-6 Determinación de la potencia de salida de un generador síncrono con polos salientes. Como se muestra en la figura, tanto $\mathbf{I}_d$ como $\mathbf{I}_q$ contribuyen a la potencia de salida.

$$P = P_d + P_q \qquad \textbf{(C-9)}$$
$$= 3V_\phi I_d \cos(90° - \delta) + 3V_\phi I_q \cos\delta$$
$$= 3V_\phi I_d \text{ sen}\,\delta + 3V_\phi I_q \cos\delta$$

Con base en la figura C-6, la corriente del eje directo está dada por

$$I_d = \frac{E_A - V_\phi \cos\delta}{X_d} \qquad \textbf{(C-10)}$$

y la corriente del eje en cuadratura está dada por

$$I_q = \frac{V_\phi \text{ sen}\,\delta}{X_q} \qquad \textbf{(C-11)}$$

Si se sustituyen las ecuaciones (C-10) y (C-11) en la ecuación (C-9) se obtiene

$$P = 3V_\phi\left(\frac{E_A - V_\phi \cos\delta}{X_d}\right)\operatorname{sen}\delta + 3V_\phi\left(\frac{V_\phi \operatorname{sen}\delta}{X_q}\right)\cos\delta$$
$$= \frac{3V_\phi E_A}{X_d}\operatorname{sen}\delta + 3V_\phi^2\left(\frac{1}{X_q} - \frac{1}{X_d}\right)\operatorname{sen}\delta\cos\delta$$

Puesto que sen δ cos δ = ½ sen 2δ, esta expresión se reduce a

$$P = \frac{3V_\phi E_A}{X_d}\operatorname{sen}\delta + \frac{3V_\phi^2}{2}\left(\frac{X_d - X_q}{X_d X_q}\right)\operatorname{sen} 2\delta \qquad \textbf{(C-12)}$$

El primer término de la expresión es igual a la potencia en una máquina con rotor cilíndrico y el segundo es la potencia adicional debida al par de reluctancia en la máquina.

Puesto que el par inducido en el generador está dado por $\tau_{\text{ind}} = P_{\text{conv}}/\omega_m$, el par inducido en el motor se puede expresar como

$$\tau_{\text{ind}} = \frac{3V_\phi E_A}{\omega_m X_d}\operatorname{sen}\delta + \frac{3V_\phi^2}{2\omega_m}\left(\frac{X_d - X_q}{X_d X_q}\right)\operatorname{sen} 2\delta \qquad \textbf{(C-13)}$$

El par inducido de un generador con polos salientes en función del ángulo de par δ se encuentra representado en la figura C-7.

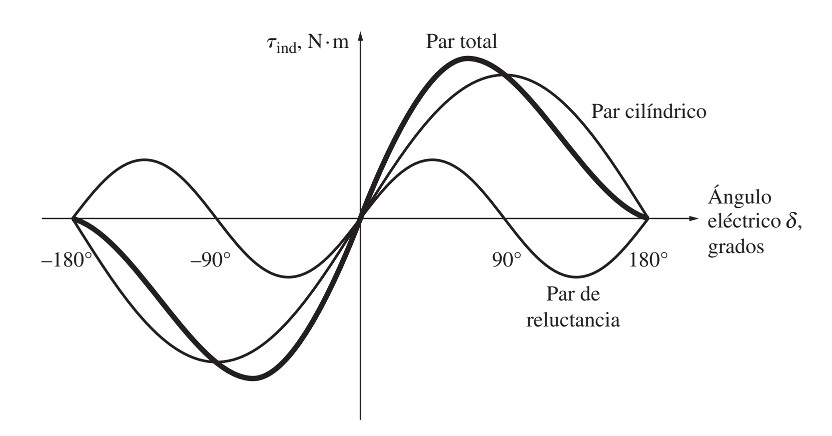


FIGURA C-7 Gráfica del par y el ángulo del par de un generador síncrono con polos salientes. Nótese el componente de par debido a la reluctancia del rotor.

PROBLEMAS

C-1. Un generador síncrono de 2 300 V, 1 000 kVA, factor de potencia de 0.8 en retraso, 60 Hz, de cuatro polos, conectado en Y, tiene una reactancia del eje directo de 1.1 Ω, una reactancia del eje en cuadratura de 0.8 Ω y una resistencia del inducido de 0.15 Ω. Se pueden despreciar las pérdidas por fricción, por rozamiento con el aire y misceláneas. La característica de circuito abierto del generador está dada en la figura P4-1.

a) ¿Cuánta corriente de campo se requiere para que V_T sea igual a 2 300 V cuando el generador opera en vacío?

b) ¿Cuál es el voltaje interno generado por la máquina si opera en condiciones nominales? ¿Cómo es este valor de $\mathbf{E}_A$ en comparación con el del problema 4-2*b*)?

c) ¿Qué fracción de la potencia a plena carga del generador se debe al par de reluctancia del rotor?

C-2. Un generador de 14 polos, conectado en Y, trifásico, accionado por una turbina hidráulica tiene los siguientes valores nominales: 120 MVA, 13.2 kV, factor de potencia de 0.8 en retraso y 60 Hz. Su reactancia del eje directo es de 0.62 Ω y su reactancia del eje en cuadratura es de 0.40 Ω. Se pueden despreciar todas las pérdidas rotacionales.

a) ¿Qué voltaje interno requiere este generador para operar en condiciones nominales?
b) ¿Cuál es la regulación de voltaje del generador en condiciones nominales?
c) Dibuje la curva de potencia y ángulo de par del generador. ¿A qué ángulo δ se llegará a la potencia máxima del generador?
d) ¿Cómo es la potencia máxima que se obtiene de este generador en comparación con la potencia máxima que proporcionaría si tuviera un rotor cilíndrico?

C-3. Suponga que una máquina de polos salientes se usa como motor.

a) Dibuje el diagrama fasorial de la máquina síncrona de polos salientes que se utiliza como motor.
b) Escriba las ecuaciones que describen los voltajes y las corrientes del motor.
c) Demuestre que el ángulo de par δ entre $\mathbf{E}_A$ y $\mathbf{V}_\phi$ del motor está dado por

$$\delta = \tan^{-1} \frac{I_A X_q \cos\theta - I_A R_A \operatorname{sen}\theta}{V_\phi + I_A X_q \operatorname{sen}\theta + I_A R_A \cos\theta}$$

C-4. Si la máquina del problema C-1 opera como *motor* en condiciones nominales, ¿cuál es el par máximo que se puede obtener de su eje sin desplazar los polos *si la corriente de campo es cero*?

APÉNDICE D

Tablas de constantes y factores de conversión

Constantes	
Carga del electrón	$e = -1.6 \times 10^{-19}$ C
Permeabilidad del espacio libre	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m
Permisividad del espacio libre	$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$ F/m

Factores de conversión		
Distancia	1 metro (m)	= 3.281 pies
		= 39.37 pulgadas
Masa	1 kilogramo (kg)	= 0.0685 slugs
		= 2.205 libras masa (lbm)
Fuerza	1 newton (N)	= 0.2248 libras fuerza (lb-pie)
		= 7.233 poundals
		= 0.102 kg (fuerza)
Par	1 newton-metro (N • m)	= 0.738 libras-pie (lb • ft)
Energía	1 joule (J)	= 0.738 pies-libra (ft • lb)
		= 3.725×10^{-7} caballos de fuerza-hora (hp • h)
		= 2.778×10^{-7} kilowatts-hora (kWh)
Potencia	1 watt (W)	= 1.341×10^{-3} hp
		= 0.7376 ´pies • lbf/s
	1 caballo de fuerza	= 746 W
Flujo magnético	1 weber (Wb)	= 10^8 maxwells (líneas)
Densidad de flujo magnético	1 tesla (T)	= 1 Wb/m^2
		= 10 000 gauss (G)
		= 64.5 kilolíneas/$pulgada^2$
Intensidad de magnetización	1 ampere • vuelta/m	= 0.0254 A • vueltas/pulgada
		= 0.0126 oersted (Oe)

Índice analítico

Los números de página seguidos de una “n” indican que la entrada se encuentra en las notas.

D

E

F

K

L

M

N

O

P

R

S

T

U

V

Z